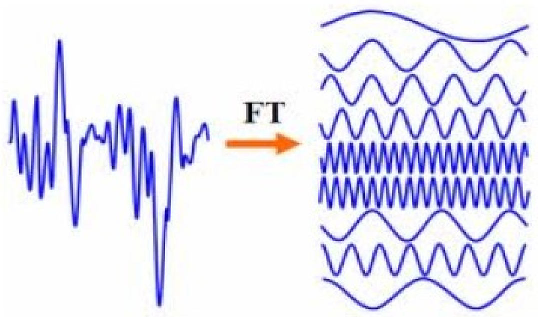
ფურიე ანალიზი

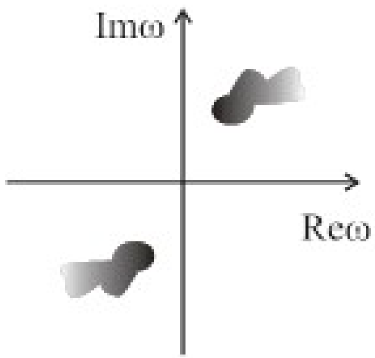
უწყვეტი ფურიე გარდაქმნა:



$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega$$

f(t) – რეალური;
F(ω) – კომპლექსური;



ფიზიკური ფუნქციის ფურიე სახის სიმეტრია: $F^*(-\omega) = F(\omega)$

ფურიე გარდაქმნის თვისებები

სუპერპოზიცია: $$f_1(t) + f_2(t) \rightarrow F_1(\omega) + F_2(\omega)$$

კონვოლუცია: $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) \mathrm{d}\tau \rightarrow F_1(\omega) F_2(\omega)$$

წრფივი დიფერენციალური განტოლების ფურიე ანალიზი

არაერთგვაროვანი დიფ. განტოლება:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \alpha \frac{df(t)}{dt} + \omega_0^2 f(t) = g(t)$$

ფურიე სახე:

$$-\omega^2 F(\omega) + i\alpha\omega F(\omega) + \omega_0^2 F(\omega) = G(\omega)$$

ალგებრული განტოლება (თუ მოხერხდა ინტეგრალის აღება):

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \exp(i\omega t) dt$$

☞ *N რიგის ერთგვაროვანი დიფ. განტოლება მუდმივი კოეფიციენტებით:*

$$a_n \frac{d^n f(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} + \dots a_1 \frac{df(t)}{dt} + a_0 f(t) = 0$$

ფურიე გაშლის შემდეგად ვიპოვით განტოლების <u>სპექტრს</u>:

$$a_n (-i\omega)^n + a_{n-1}(-i\omega)^{n-1} + \dots - a_1 i\omega + a_0 = 0$$

ამონახსნის აღდგენა:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp(-i\omega t) dt$$

☞ *N რიგის ერთგვაროვანი დიფ. განტოლება ცვლადი კოეფიციენტებით:*

$$a_n \frac{d^n f(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} + \dots a\frac{df(t)}{dt} + a_0(t) f(t) = 0, \qquad a_0(t) = \alpha t$$

(წრფივად) ცვლადი კოეფიციენტის ფურიე გაშლა:

$$\alpha t f(t) \to i\alpha \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

$$\left[a_n(-i\omega)^n + a_{n-1}(-i\omega)^{n-1} + \dots + a_0\right]F(\omega) + i\alpha\frac{dF(\omega)}{d\omega} = 0$$

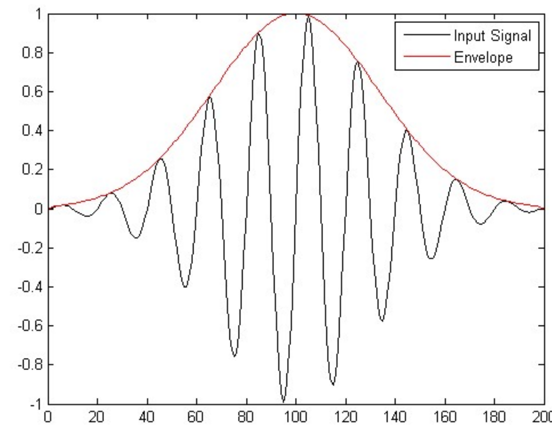
N რიგის დიფ. განტოლება გადავწერეთ პირველი რიგის დიფ. განტოლებად.

ამონახსნის აღდგენა (შებრუნებული ფურიე გარდაქმნა):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\exp(-i\omega t)dt$$

მონაცემების დამუშავება: ჰილბერტის გარდაქმნის მეთოდით

სიგნალი (ვექტორი): $s(t)$



- რას უდრის სიგნალის მყისი ამპლიტუდა და ფაზა?
- სიგნალის რა ნაწილია ჰარმონიული/პერიოდული, და რა ნაწილის აპერიოდული?

„სიგნალის პროცესირების/ფილტრაციის მეთოდები“

ფუნქციის ჰილბერტის გაფართოება:

$$D(t) \equiv S(t) + iS_H(t)$$

სადაც ფუნქციის ანალიზური გაფართოება მოცემულია ჰილბერტის გარდაქმნით:

$$S_H(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(\tau)}{t-\tau}\,d\tau$$

კონვოლუცია: $S(t)\,,\ \dfrac{1}{\pi t}$

ფურიე სახე: $s_H(\omega) = is(\omega)\,sgn(\omega)$

ჰარმონიული კომპონენტის ფაზის წანაცვლება $\pi/2$-ით.

მაგალითად:

$$S(t) = A\cos(\omega t)\,,$$
$$S_H(t) = A\,sin(\omega t)$$

რთული სიგნალის ფაზა და ამპლიტუდა:

$$D(t) \equiv S(t) + iS_H(t) = A(t)e^{i\varphi(t)}$$

$$A(t) = \sqrt{S^2(t) + S_H^2(t)}$$

ფურიე გარდაქმნით ვექტორის ჰილბერტის გარდაქმნის გამოთვლის პროცედურა (ω>0):

1. $S(t) \to s(\omega)$
2. $\mathrm{Im}[s(\omega)] \leftrightarrow \mathrm{Re}[s(\omega)] \quad : \quad s(\omega) \to s_H(\omega)$
3. $s_H(\omega) \to S_H(t)$

Matlab

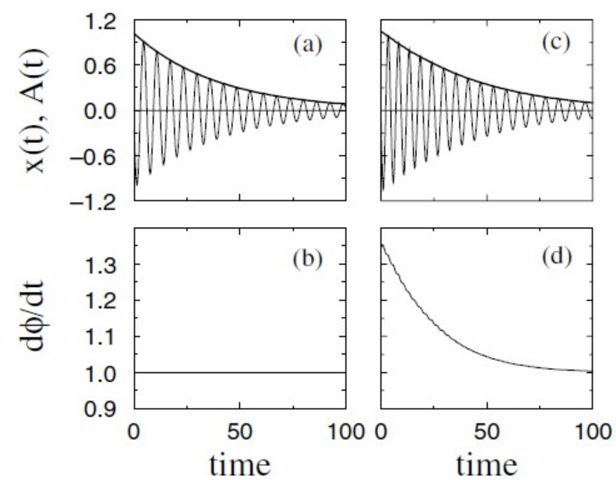
```
D = hilbert(S);
```

დავალება 10.1.

მოცემულია ფუნქცია: $$s(t) = \cos(5t) + 0.5\, e^{-0.1t} \sin(20t).$$

ჩაატარეთ ფურიე ანალიზი. იპოვეთ მახასიათებელი სიხშირეები სპექტრში. გამოყავით:

1. აპერიოდული კომპონენტი;
2. პერიოდული კომპონენტი;

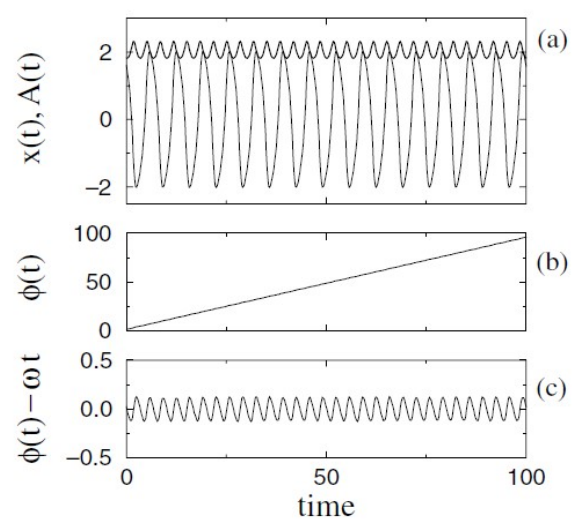


დავალება 10.2.

დაფინგის ოსცილატორი:

$$x''(t) + 0.05\, x'(t) + x(t) + x(t)^3 = 0$$

იპოვეთ: *x(t)* და რხევის ტრაექტორიის მომვლები (ამპლიტუდა) *A(t)*.



დავალება 10.3.

ვან დერ პოლის განტოლება:

$$x''(t) - (1-x^2)\, x'(t) + x(t) = 0$$

იპოვეთ: *x(t)* და რხევის ტრაექტორიის მომვლები (ამპლიტუდა) *A(t)*.
დახაზეთ ამონახსნის ფაზური პორტრეტი (x,x');

დისკრეტული ფურიე გარდაქმნა

ფურიე მწკრივი:

$$X(k) = \sum_{j=1}^{N} x(j)\omega_N^{(j-1)(k-1)}$$

$$x(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X(k)\omega_N^{-(j-1)(k-1)}$$

$$\omega_N \equiv e^{2i\pi/N}, \quad N < \infty$$

ვექტორი: *x(1), x(2), ..., x(N)*
ფურიე სახე: *X(1), X(2), ..., X(N)*

```
fftshift (0-2pi) -> (-pi,+pi)
```

სტანდარტული დისკრეტული გაშლა: `ft`

სწრაფი ფურიე გაშლა (fast Fourier transform): `fft / ifft` ($N=2^n$, მაგ: 512, 1024, ...)

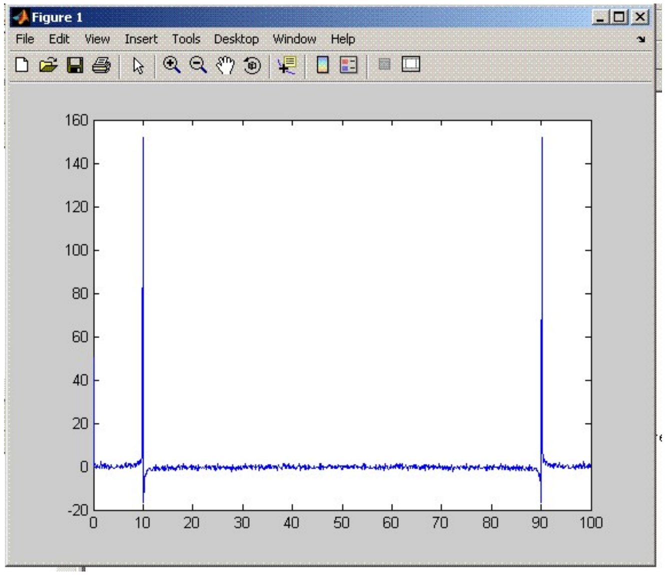
Matlab

```
t0 = 0;
tfin = 100;
dt = 0.1;

t = (t0:dt:tfin);
T = tfin-t0;
N = length(t);

f = sin(2*pi*t) + 0.1*rand(1,N);
G = fft(f);

plot(abs(G));
```

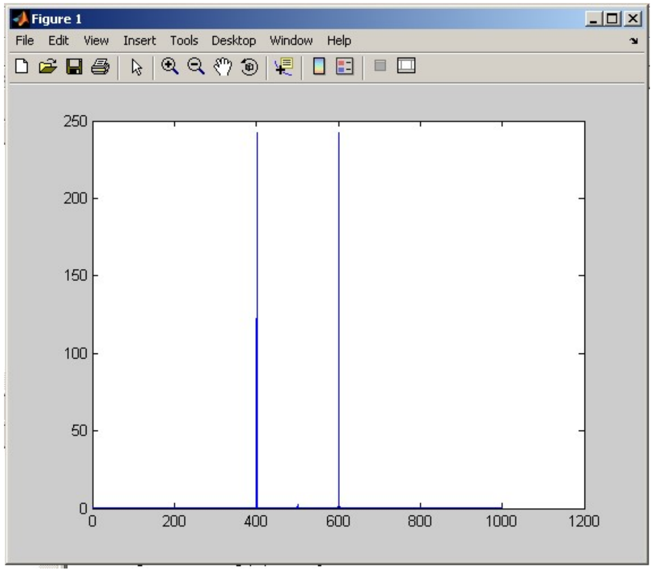


ენერგიის სპექტრალური სიმკვრივე

```
GG = fftshift(G);

Eomega = abs(GG).^2;

plot(Eomega);
```



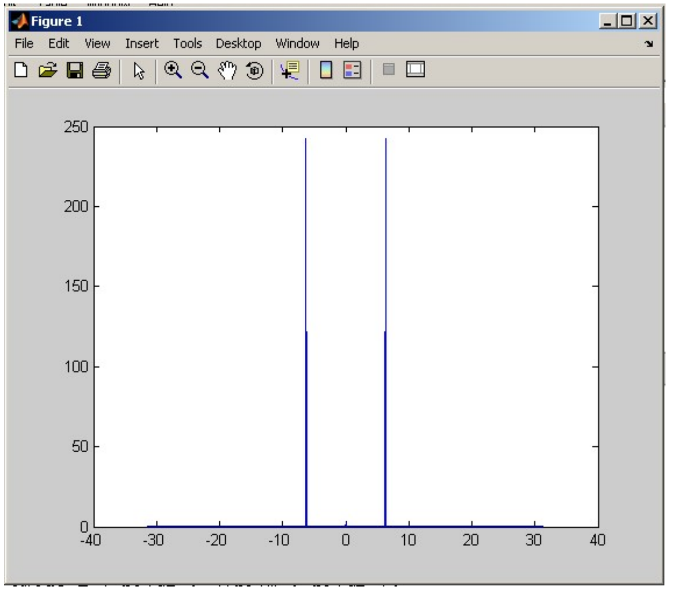
სიხშირეები:

$$\Delta\omega_{max} = \frac{2\pi}{\Delta t}$$

$$\Delta\omega_{min} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \left(\; -\Delta\omega_{max}/2 \;\; : \;\; \Delta\omega_{min} \;\; : \;\; \Delta\omega_{max}/2 \; \right)$$

```
omega = (-pi/dt : 2*pi/T : pi/dt );
plot(omega,Eomega);
```



შეამოწმეთ:

Matlab ფუნქციები:

```
fft
fftshift
ifft
```

დავალება 10.4.
ჩაატარეთ მზის ლაქების რიცხვის სპექტრალური ანალიზი დროში (Matlab sunspot მონაცემები):
```
load sunspot.dat
year=sunspot(:,1);
wolf=sunspot(:,2);
```
იპოვეთ მზის ლაქების ვარიაციის პერიოდები;

დავალება 10.5.
ჩაატარეთ Matlab chirp მონაცემების სპექტრალური ანალიზი:
```
x = chirp(t,0,1,Fs/6);
```

დავალება 10.6.
ჩაატარეთ მოცემული ფუნქციის სპექტრალური ანალიზი:
$f(t) = \sin(t)\exp(0.2\ t) + \cos(3t)\exp(-0.1t) + 0.2\,rand$
```
1. Plot E(omega) vs. omega
2. Plot Re(F) vs. Im(F)
3. G1(omega) = F(omega) + random noise in phase;
4. G2(omega) = F(omega) + random noise in amplitude;
5. plot on single graph:  f(t), f1(t), f2(t)

   Random noise: Max amplitude = 0.2*Max(F);
   F = A*exp(i*phi) : A - Amplitude; phi - phase;
   f1 = ifft G1
   f2 = ifft G2
6. subplot(2,2,1); plot f'(t) vs f(t)
7. subplot(2,2,2); plot f1' vs f1
8. subplot(2,2,3); plot f2' vs f2
```

დანართი: ანალიზური ფუნქციის ფურიე გარდაქმნების ცხრილი

ფუნქცია	ფურიე სახე
$f(x)$	$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$
1	$\sqrt{2\pi} \cdot \delta(\omega)$
$\delta(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
e^{iax}	$\sqrt{2\pi} \cdot \delta(\omega - a)$
$\cos(ax)$	$\sqrt{2\pi} \cdot \frac{\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)}{2}$
$\cos(ax^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{\omega^2}{4a} - \frac{\pi}{4}\right)$
x^n	$i^n \sqrt{2\pi} \delta^{(n)}(\omega)$

ფუნქცია	ფურიე სახე
$\frac{1}{x}$	$-i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn}(\omega)$
$\|x\|^{\alpha}$	$\frac{-2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\pi\alpha/2)\Gamma(\alpha+1)}{\|\omega\|^{\alpha+1}}$
$\operatorname{sgn}(x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{i\omega}$
$u(x)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{i\pi\omega} + \delta(\omega)\right)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT)$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$
$\log \|x\|$	$-\frac{\sqrt{\pi/2}}{\|\omega\|} - \sqrt{2\pi}\gamma\delta(\omega)$
$(\mp ix)^{-\alpha}$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\alpha)} u(\pm\omega) (\pm\omega)^{\alpha-1}$