

რიცხვითი ინტეგრება

1. ანალიზური ფუნქციის რიცხვითი ინტეგრება

რატომ? ზოგიერთი მარტივი ფუნქციაც კი ანალიზურად არა ინტეგრებადია.

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{erf}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-x^2} dx$$

ა) ანალიზური ფუნქციის დისკრეტული წარმოდგენა (sampling);

ბ) დისკრეტული ვექტორის ინტეგრების ალგორითმი;

არსებობს ინტეგრალის თეორიული ზღვარი („ანალიზური ზღვარი“) რომლისკენაც რიცხვითი ინტეგრალის შედეგი უნდა იკრიბებოდეს;

2. დისკრეტული ვექტორის (ფუნქციის) ინტეგრება

(რიცხვითი/ექსპერიმენტის შედეგი, მეჩხერი მონაცემები, არაგლუვი/სტოქასტური კომპონენტი, ...);

არ არსებობს ცალსახა შედეგი - დამოკიდებულია დამატებით ინტერპეტაციაზე; საჭიროა ამოხსნის სიზუსტის ცოდნა;

მარტივი კვადრატურების მეთოდი: მარტივი ჯამი

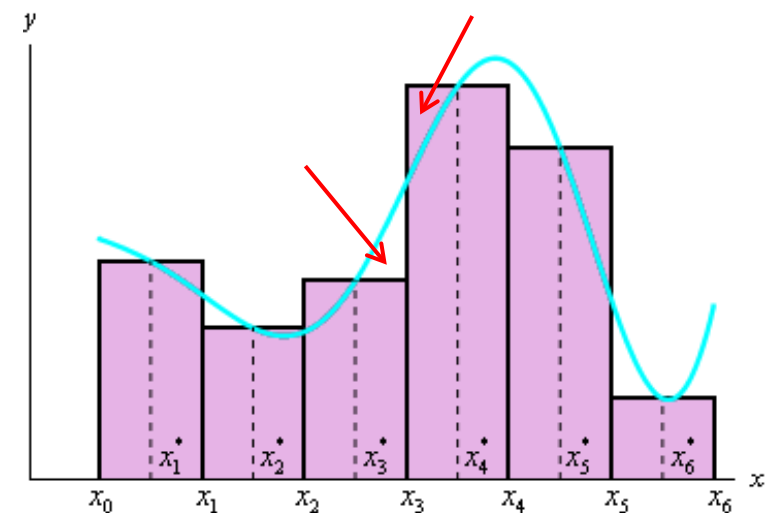
$$Int = \sum_{k=1}^N \Delta x \cdot f(x_k)$$

ერთგვაროვანი ბადისათვის $\Delta x = \text{const.}$

ფართობის შეფასება დისკრეტული ჯამის გამოყენებით.

ცდომილება:

მართკუთხედების ფართობის ჯამი განსხვავდება ინტეგრალური ფართისაგან



რომბერგის მეთოდი (ტრაპეციის წესი)

მართკუთხედების ნაცვლად ჯამის ელემენტებად ავიღოთ ტრაპეციების ფართობი:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right].$$

ინტეგრალი: მეზობელი ტრაპეციების ფართობის ჯამი:

$$Int = \sum_{k=1}^N (x_{k+1} - x_k) \frac{(f(x_{k+1}) + f(x_k))}{2}$$

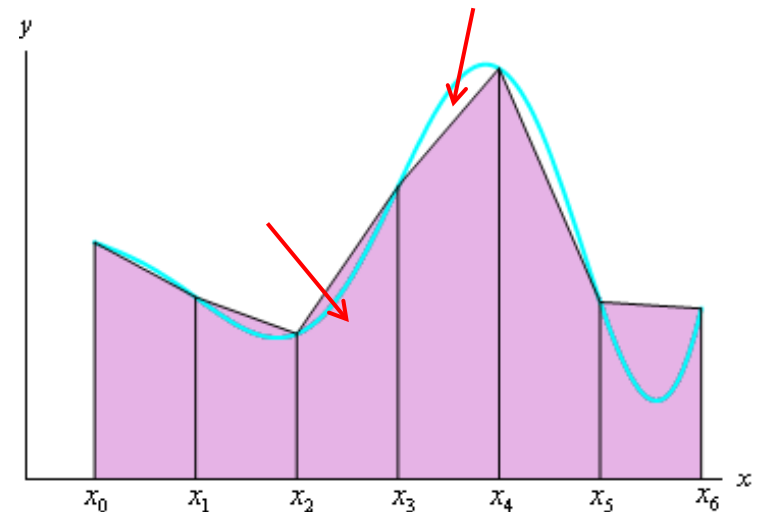
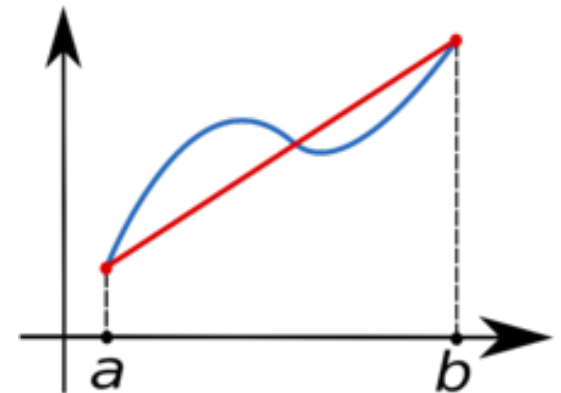
ერთგვაროვან ბადეზე ($\Delta x = const.$):

$$Int = \frac{\Delta x}{2} \sum_{k=1}^N (f(x_{k+1}) + f(x_k))$$

ანუ:

$$Int = \Delta x \cdot \left[\sum_{k=1}^N f(x_k) - f(x_1) - f(x_N) \right]$$

```
N = length(f);
int = dx*(sum(f)-f(1)-f(N));
```



ცდომილების გამოთვლა:

$$\text{error} = \int_a^b f(x)dx - (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2} + \dots$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a)dx + \int_a^b f'(a)(x-a)dx + \int_a^b f''(a) \frac{(x-a)^2}{2} dx + \dots$$

$$\int_a^b f(x)dx = f(a)(b-a) + f'(a) \frac{(b-a)^2}{2} + f''(a) \frac{(b-a)^3}{6} + \dots$$

$$f'(a) \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{f(b) - f(a)}{2} (b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \frac{f(b) + f(a)}{2} + f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{6}.$$

$$\text{error} = f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{6}.$$

$$\Delta x \propto (b-a) / N$$

$$\text{error} \propto O(N^{-3}).$$

სიმსონის მეთოდი

ინტეგრალი ყოველ ინტერვალში $\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx$.

ამოვხსნათ შემდეგი პოლინომიალის გამოყენებით:

$$f(x) = f_i + (x - x_i)f'_i + \frac{(x - x_i)^2}{2}f''_i + \frac{(x - x_i)^3}{3!}f'''_i + O(h^4)$$

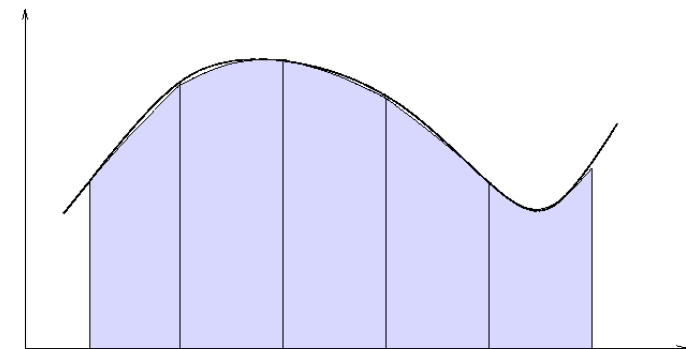
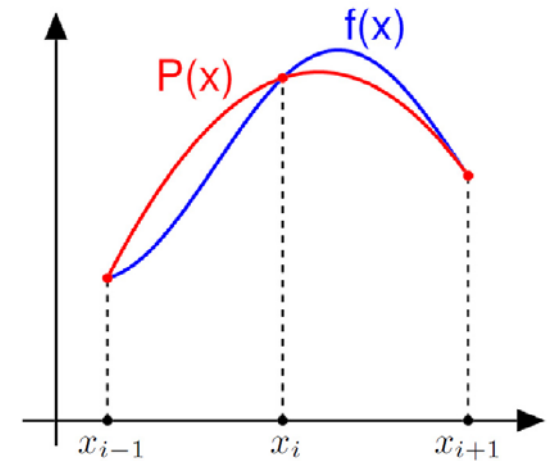
$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx = 2hf_i + 0 + \frac{1}{3}h^3f''_i + 0 + O(h^5)$$

ცენტრალური წარმოებულის გამოყენებით:

$$h^2f''_i = (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) + O(h^4)$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx = 2hf_i + \frac{1}{3}h(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) + O(h^5)$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x) dx = \frac{h}{3}(f(x_{k-1}) + 4f(x_k) + f(x_{k+1})) + O(h^5)$$



სიმსონის ფორმულის ცდომილება:

$$error = \frac{f^{(4)}(\xi_k)}{45} (x_{k+1} - x_{k-1})^5.$$

$$error \propto O(N^{-5}).$$

სიმსონის ფორმულა დისკრეტულ დომენზე:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^N \left(\frac{h}{3} (f(x_{k-1}) + 4f(x_k) + f(x_{k+1})) \right)$$

სიმსონის წესის იმპლემენტაცია ერთგვაროვან ბადეზე:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_1) + 4K + 2L + f(x_N))$$

სადაც თუკი N ლუწია:

$$K = f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{N-1}).$$

$$L = f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_N).$$

ინტეგრება ინტერპოლანტით

დისკრეტულ ვექტორზე შესაძლებელია უწყვეტი ფუნქციის ინტერპოლაცია ლაგრანჟის პოლინომების გამოყენებით (იხ. ლექცია 5):

$$P(x_k) = y_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

$$P(x) = \sum_k \left(\prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \right) y_k.$$

$$P(x) = c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_{n-1} x + c_n,$$

N დისკრეტული წერტილიდან ავაგეთ უწყვეტი ფუნქცია N რიგის პოლინომის სახით. შესაძლებელია როგორც გაწარმოება, ასევე ინტეგრება:

$$I = \int_a^b P(x) dx = M(b) - M(a)$$

$$M(x) = c_1 \frac{x^n}{n} + c_2 \frac{x^{n-1}}{n-1} + \dots + c_{n-1} \frac{x^2}{2} + c_n x$$

ცდომილების ფუნქცია:

$$E(f) = \int_a^b E_n(x) dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx.$$

$$\text{error} \propto O(1/(N+1)!).$$

სინგულარული ფუნქციის ინტეგრება

ანალიზური ფუნქციის შემთხვევაში ვარჩევთ რიცხვითი ინტეგრებისათვის მისაღებ ანალიზურ ფორმას; მაგალითად სინგულარობა:

1.) ანალიზური გარდაქმნა:

$$x = t^2$$

$$I = \int_0^1 e^{t^2} 2 dt.$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^x dx.$$

2.) ნაწილობრივ ანალიზური ინტეგრება:

$$I = \int_0^1 x^{-1/2} e^x dx = 2x^{1/2} e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x^{1/2} e^x dx$$

3.) ანალიზური აპროქსიმაცია და რიცხვითი კორექტორი:

$$I = \int_0^1 x^{-3} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_0^1 x^{-3} \left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right) dx$$

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{x^3} dx$$

სინგულარული ნაწილის
ანალიზური ინტეგრალი

რეგულარული ნაწილის რიცხვითი
ინტეგრალი (კორექტორი)

ანალიზური ინტეგრალი + რიცხვითი კორექტორი;

ინტეგრალები უსასრულო საზღვრებში

ლოკალიზებული ფუნქცია $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$

შევაფასოთ ლოკალიზაციის საზღვრები და შევცვალოთ უსასრულობები სასრულო საზღვრებით:

ინტეგრალის გამოთვლა წინასწარ მოცემული სიზუსტით.

არალოკალიზებული ფუნქცია

შემოვიყვანოთ ცვლადი, რომელიც

1. დააპროექცირებს უსასრულო ინტერვალს სასრულოზე;
2. არ შემოიყვანს სინგულარობებს ინტეგრების ინტერვალს შიგნით;

მაგალითად:

$$y = e^{-x}$$

$$y = \frac{1}{1+x}$$

დავალება 6.1.

რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით გამოითვალეთ ინტეგრალი 30 დისკრეტული წერტილის ვექტორით მარტივი ჯამის, რომბერგის და სიმსონის ფორმულით. შეადარეთ მიღებული შედეგები.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{\sin(x)}{\sqrt{2}}\right) dx$$

დავალება 6.2.

გამოითვალეთ შემდეგი ინტეგრალი $1e-5$ სიზუსტით და დახაზეთ რიცხვითი მეთოდით დათვლილი ინტეგრალის ზედა საზღვარზე დამოკიდებულების გრაფიკი ინტერვალში $(1, 1e+4)$.

$$\int_0^\infty (1+x^2)^{-4/3} dx$$

დავალება 6.3.

მოიფიქრეთ შემდეგი ინტეგრალების ამოხსნის გეგმა რიცხვითი მეთოდების გამოყენებით. ამოხსენით ინტეგრალები პარამეტრის შემდეგი მნიშვნელობებისთვის: $a=0.5, 1, 2$.

$$\int_0^\infty (x^3 + ax)^{-1/2} dx \quad (1)$$

$$\int_\pi^\infty (a+x)^{-1/3} \sin(x) dx \quad (2)$$

$$\int_0^\infty (1+x^2)^{-1/2} e^{-ax} dx \quad (3)$$