რიცხვითი წარმოებულები

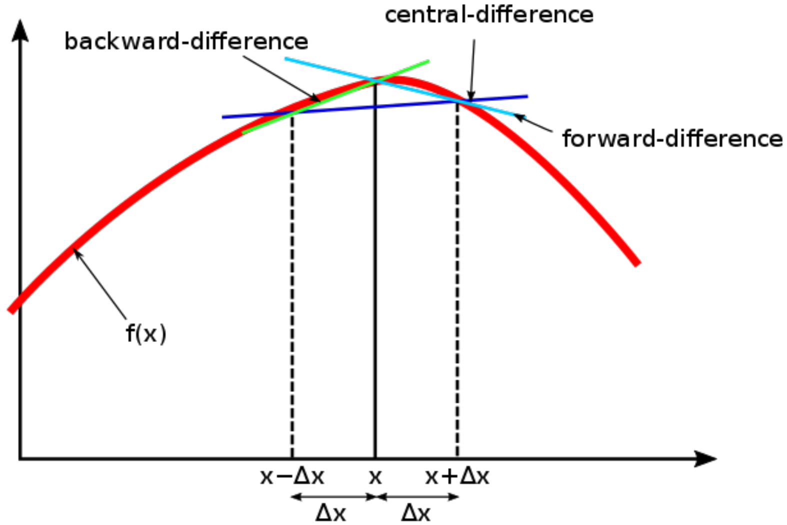
“გლუვი ფუნქციის” წარმოებულის გამოთვლა მცირე h ბიჯზე სხვაობების გამოყენებით:

$$\boxed{f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h},}$$

ტეილორის „ჩამოჭრილი“ მწკრივი:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi), \qquad \xi \in (x, x+h).$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi), \qquad \xi \in (x, x+h).$$



„მარცხენა“ და „მარჯვენა“ წარმოებულები:

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h},$$

„ცენტრალური“ წარმოებული *(L+R)/2* :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

ცენტრალური წარმოებულის ფორმულის ცდომილება:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1), \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(\xi_2). \end{aligned}$$

$\xi_1 \in (x, x+h)$

$\xi_2 \in (x-h, x).$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)],$$

$$f'''(\xi) = \frac{1}{2}[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)].$$

$\xi \in (x-h, x+h)$

საბოლოოდ:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f'''(\xi),$$

პირველი რიგის ცენტრალური წარმოებულის ფორმის ცდომილების რიგი: $O(h^2)$

მეორე რიგის ცენტრალური წარმოებული:

$$\boxed{f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.}$$

$$f(x \pm h) = f(x) \pm hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) \pm \frac{h^3}{6} f'''(x) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\xi_\pm).$$

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{h^2}{24}\left(f^{(4)}(\xi_-) + f^{(4)}(\xi_+)\right) = f''(x) + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi),$$

ცდომილება:

$$-\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in (x-h, x+h).$$

მეორე რიგის ცენტრალური წარმოებულის (3 წერტილიანი) ფორმის ცდომილების რიგი: $O(h^2)$

5 წერტილიანი ფორმულა (სტენსილი)
(5 point stencil)

5 მეზობელი წერტილი: $\{x-2h, x-h, x, x+h, x+2h\}.$

$$\boxed{f'(x) \approx \frac{-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)+f(x-2h)}{12h}}$$

$$f(x \pm h) = f(x) \pm hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) \pm \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + O_{1\pm}(h^4). \qquad (E_{1\pm}).$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3}f^{(3)}(x) + O_1(h^4). \qquad (E_1).$$

$$f(x \pm 2h) = f(x) \pm 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) \pm \frac{4h^3}{3}f^{(3)}(x) + O_{2\pm}(h^4). \qquad (E_{2\pm})$$

$$f(x+2h) - f(x-2h) = 4hf'(x) + \frac{8h^3}{3}f^{(3)}(x) + O_2(h^4). \qquad (E_2).$$

გამოვაკლოთ: $8 \times E_1 - E_2$

$$8f(x+h) - 8f(x-h) - f(x+2h) + f(x-2h) = 12hf'(x) + O(h^4)$$

5 წერტილიანი წარმოებულის ფორმულის ცდომილების რიგი: $O(h^4)$

მაღალი რიგის წარმოებულები (5 წერტილიანი სტენსილი)

$$f''(x) \approx \frac{-f(x+2h)+16f(x+h)-30f(x)+16f(x-h)-f(x-2h)}{12h^2}$$

$$f^{(3)}(x) \approx \frac{f(x+2h)-2f(x+h)+2f(x-h)-f(x-2h)}{2h^3}$$

$$f^{(4)}(x) \approx \frac{f(x+2h)-4f(x+h)+6f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{h^4}$$

ორი ცვლადის ფუნქცია

$$f_x(x,y) \approx \frac{f(x+h,y)-f(x-h,y)}{2h}$$

$$f_y(x,y) \approx \frac{f(x,y+k)-f(x,y-k)}{2k}$$

მეორე რიგის წარმოებული:

$$f_{xx}(x,y) \approx \frac{f(x+h,y) - 2f(x,y) + f(x-h,y)}{h^2}$$

$$f_{yy}(x,y) \approx \frac{f(x,y+k) - 2f(x,y) + f(x,y-k)}{k^2}$$

ორი ცვლადის ფუნქციის შერეული წარმოებული:

$$f_{xy}(x,y) \approx \frac{f(x+h,y+k) - f(x+h,y-k) - f(x-h,y+k) + f(x-h,y-k)}{4hk} .$$

ანონსი:

წარმოებულის გამოსათვლელი n რიგის სიზუსტის დისკრეტული ფორმულიდან $(n+1)$ რიგის სიზუსტის ფორმულის მიღება: რიჩარდსონის ექსტრაპოლაცია >>>> ლექცია 13.

ცდომილების წყაროები: 1. დამრგვალება (truncation);
2. სისტემური (formula);

ფუნქციის დისკრეტული წარმოებულის ასაღებად ოპტიმალური ბიჯის შერჩევა:

დიდი ბიჯი: n რიგის დისკრეტული ფორმულის (სისტემური) ცდომილება $m\ O(h^{n-1})$;
m - ბიჯების რაოდენობა;

მცირე ბიჯი: დისკრეტული ოპერაციების (ბიჯების) რაოდენობის ზრდა და დამრგვალების ცდომილების დაგროვება.

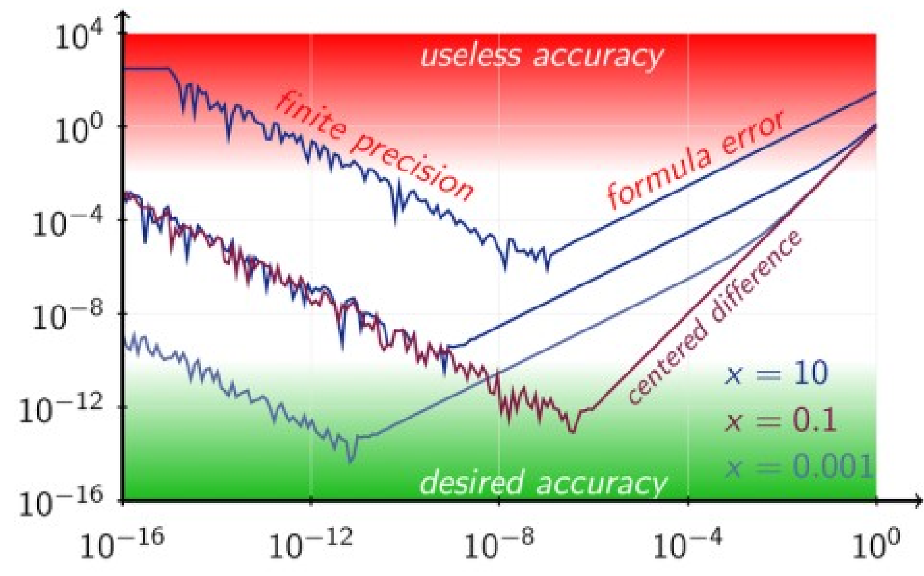
ცვლადის ტიპი (მაგ. floating point) და დამრგვალების ცდომილება:

- Single precision (32bit);
- Double precision (64 bit);

მინიმალური ჯამური ცდომილება: ოპტიმალური ბიჯი h.

დავალება 4.1

sin(x) ფუნქციის მაგალითზე (0,2*pi) ინტერვალში გამოთვალეთ ოპტიმალური დისკრეტული ბიჯის ცენტრალური წარმოებულის ფორმულისათვის. ააგეთ ცდომილების დამოკიდებულება დისკრეტიზაციის ბიჯზე (ანალიზური და რიცხვით გამოთვლებს შორის სხვაობა, იხ. სურათი.)



დავალება 4.2.

გამოითვალეთ წარმოებულები ფუნქციისათვის $f(x) = sin^2(1.2x) + cos^2(0.8x)$ *მშემდეგ ინტერვალში:*

```
x = (0:0.1:20);
```

f1_an(x) $= d/dx\, f(x)$: ანალიზური წარმოებული;
f1_left(x) $= d/dx\, f(x)$: რიცხვითი წარმოებული: მარცხენა ფორმულა;
f1_right(x) $= d/dx\, f(x)$: რიცხვითი წარმოებული: მარჯვენა ფორმულა;
f1_center(x) $= d/dx\, f(x)$: რიცხვითი წარმოებული: ცენტრალური წარმოებულის ფორმულა;
f1_5(x) $= d/dx\, f(x)$: რიცხვითი წარმოებული: 5 წერტილიანი ფორმულა;

f2_an(x) $= d^2/dx^2 f(x)$: მეორე რიგის ანალიზური წარმოებული;
f2_center(x) $= d^2/dx^2 f(x)$: მეორე რიგის რიცხვითი წარმოებული: ცენტრალური ფორმულა;
f2_5(x) $= d^2/dx^2 f(x)$: მეორე რიგის რიცხვითი წარმოებული: 5 წერტილიანი ფორმულა;

დახაზეთ ერთ გრაფიკზე:

1. (f1_an-f1_left)
2. (f1_an-f1_right)
3. (f1_an-f1_center)
4. (f1_an-f1_5)

დახაზეთ ერთ გრაფიკზე:

1. (f2_an-f1_left)
2. (f2_an-f1_center)
3. (f2_an-f1_5)

სტოქასტური ვექტორი (პროცესი)

“ვინერის პროცესი”

„გლუვი“ ფუნქციების რიცხვითი წარმოებულის გამოსათვლელი ფორმები დისკრეტულ ვექტორებზე არ მუშაობენ სტოქასტური ვექტორებისათვის.

შემთხვევითი რიცხვები [-1,1] ინტერვალში:

$\xi_1, \xi_2, \ldots$

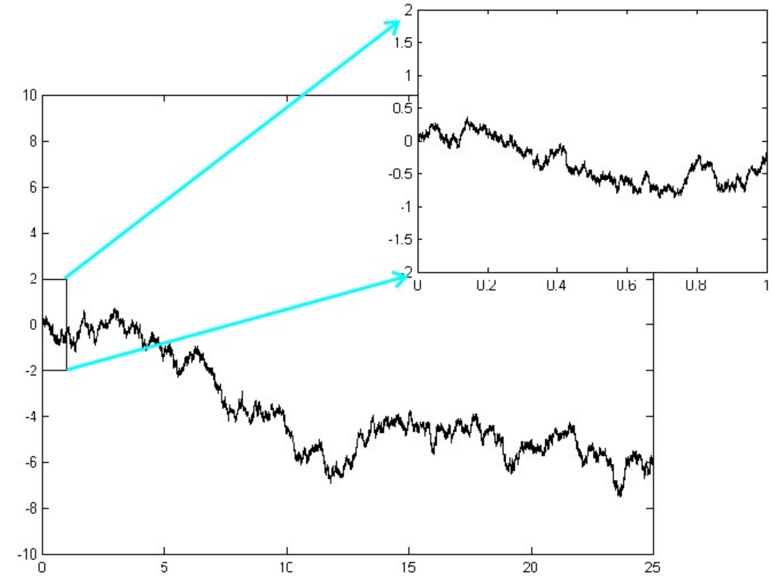
შემთხვ. რიცხვებისაგან შედგენილი სტოქასტური ვექტორი

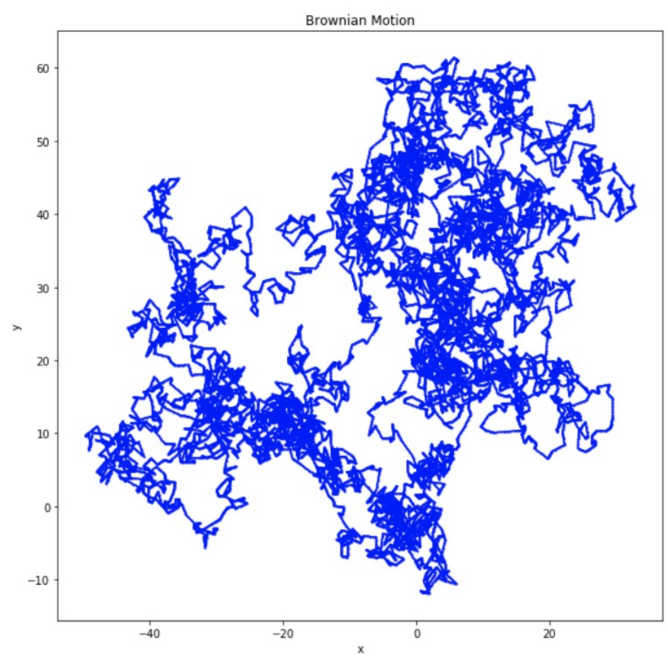
$$W_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{1 \le k \le [nt]} \xi_k, \qquad t \in [0,1]$$

„ქაოსური ჰევისაიდის ფუნციების ჯამი“

$n \to \infty$: ვინერის პროცესი W_t

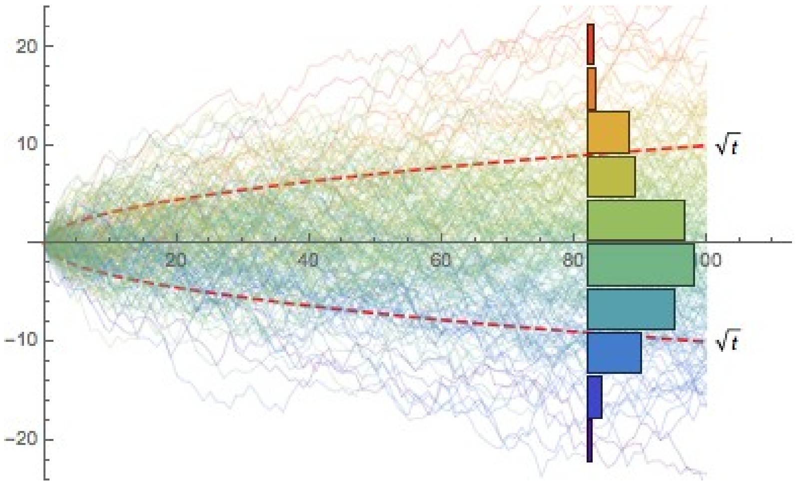
ფიზიკური მაგალითი: მოძრაობა ორ განზომილებაში ვინერის პროცესით მოცემულ X-Y გადაადგილებით: ბროუნის მოძრაობა Bn





ვინერის პროცესის თვისებები

ვინერის პროცესის ალბათობის განაწილების ფუნქცია:



$$f_{W_t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

ვინერის პროცესის ინტეგრალი:

$$W^{(-1)}(t) := \int_0^t W(s)ds$$

ვინერის სტოქასტური ვექტორი ფურიე მწკრივებით:

$$W_t = \xi_0 t + \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \frac{\sin \pi n t}{\pi n}$$

დიფერენციალური განტოლება:

$$\frac{dX_t}{dt} = a(X_t)$$

ვიპოვოთ ამონახსნი თუკი საწყისი მნიშვნელობა X_0 ქაოსურია: სტოქასტური პროცესი.

იტოს (Ito) სტოქასტური კალკულუსი

$$dX_t = a(X_t)dt + c(X_t)dB_t$$

"რეგულარული" პროცესი „სტოქასტური" პროცესი

a(X) - დრეიფის ფუნქცია
c(X) – დიფუზიის ფუნქცია

შემთხვევითი პროცესის წარმოებული შემთხვევითი სიდიდეა (stochastic self-similar process).
შესაძლებელია მხოლოდ (სტოქასტური) ინტეგრალის გამოთვლა(!)

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s)ds + \int_0^t c(X_s)dB_s$$

სადაც იტოს სტოქასტური ინტეგრალი:

$$I_t = \int_0^t c(X_s)dB_s$$

ამონახსნის „რეგულარულ" და „ქაოსური" ნაწილად გაყოფა:

$$X_t = x_t + I_t$$

იტოს სტოქასტური დიფერენციალი:

იტოს ლემა:

“დრეიფი” “დიფუზია”

$$dX_t = \mu_t \, dt + \sigma_t \, dB_t,$$ 1

სტოქასტური პროცესის დიფერენციალი (dY_t)::

$$Y_t = f(t, X_t)$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma_t \frac{\partial f}{\partial x} dB_t$$ 2

დამატებითი წევრები:
1. კვადრატული წევრი;
2. დისპერსიული ნაწილი;

სტოქასტური ვექტორების ნამრავლის დიფერენციალი:

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t$$ 3

ვინერის დისკრეტული პროცესის მოდელირება

ერთმანეთისგან დამოუკიდებელი შემთხვევითი რიცხვების ვექტორი: *(Z_1, Z_2, … Z_n)*

$$W_0 = 0$$
$$W_1 = W_0 + Z_1\,(t_1 - t_0)^{1/2}$$
$$W_2 = W_1 + Z_2\,(t_2 - t_1)^{1/2}$$
$$\ldots$$
$$W_{k+1} = W_k + Z_k\,(t_{k+1} - t_k)^{1/2}$$

შემთხვევითი პროცესი, რომელიც იკრიბება ბროუნის პროცესისაკენ როდესაც $n \to \infty$.

მაგალითი:

„გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობა“: $a(X) = aX,\ c(X) = bX,\ a,c = constant.$

ავიღოთ სტოქასტური ვექტორის ლოგარითმული ფუნქცია: $f(X) = \log(X)$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sigma_t^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) dt + \sigma_t \frac{\partial f}{\partial x}\, dB_t$$

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dB_t$$

$$\begin{aligned} d\log X_t &= \frac{1}{X_t} dX_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{X_t^2}\right)^2 (dX_t)^2 \\ &= \frac{dX_t}{X_t} - \frac{1}{2} b^2 dt \\ &= \left(aX_t - \frac{1}{2} b^2\right) dt + \alpha dB_t \end{aligned}$$

$$\log X_t = \log X_0 + \left(a - \frac{1}{2} b^2\right) t + bB_t$$

$$X_t = X_0 e^{\left(a - \frac{1}{2} b^2\right) t + bB_t}$$

კავშირი ბრუნის მოძრაობასა და გეომეტრიულ ბროუნის მოძრაობას შორის:

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right)$$

დავალება 4.2

ააგეთ ვინერის სტოქასტური ვექტორი და დახაზეთ გეომეტრიული ბროუნის მოძრაობის ტრაექტორიები:

$$Y_t = Y_0 e^{\alpha t + \beta B_t}$$

შემდეგი პარამეტრებისათვის:

1.) α=1, β=0.1;
2.) α=0, β=0.1;
3.) α=0.5, β=0.5;
4.) α=0.1, β=1;