

### უძრავი წერტილის იტერაცია (Fixed-Point Iteration)

ფუნქციის უძრავი წერტილი:

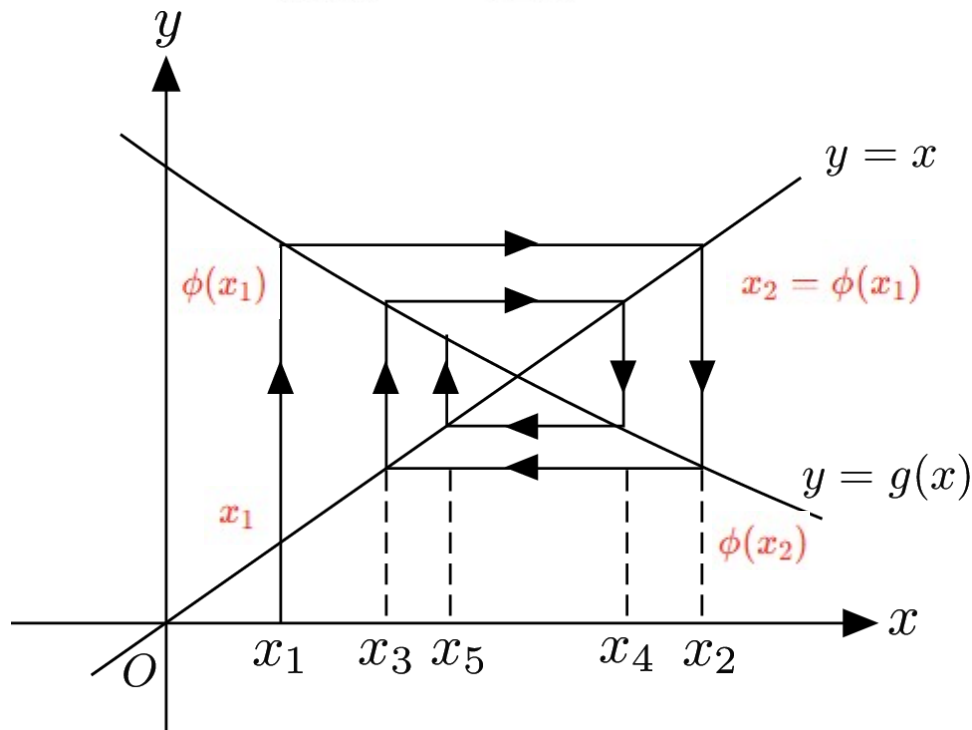
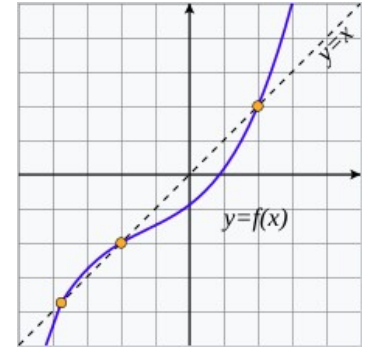
$$x = \phi(x)$$

უძრავი წერტილის პოვნის რიცხვითი მეთოდი: უძრავი წერტილის იტერაცია

$$x_{n+1} = \phi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ფუნქციის უძრავი წერტილის გამოთვლა იტერაციული მეთოდით:

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) = \phi(\alpha),$$



იტერაციისას უძრავი წერტილისკენ მიზიდვა, ან განზიდვა;

მიმზიდავი უძრავი წერტილი: მწკრივი კრებადია ნულისკენ  $x, \phi(x), \phi(\phi(x)), \phi(\phi(\phi(x))), \dots$

მიზიდვისათვის:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq m|x - y|, \quad m < 1,$$

განვსაზღვროთ შემოვლის მიმართულება, ან გამოვიყენოთ შებრუნებული ფუნქცია:

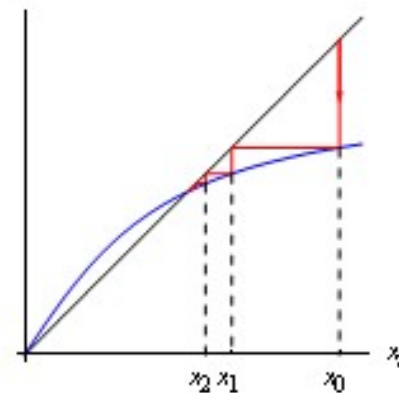
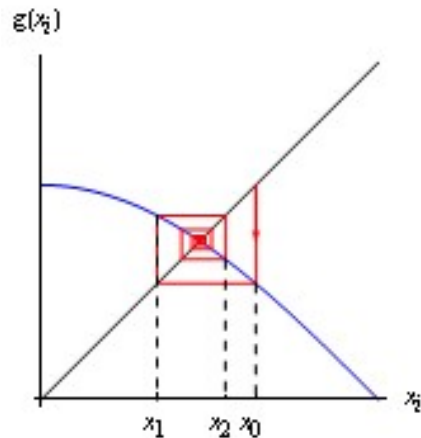
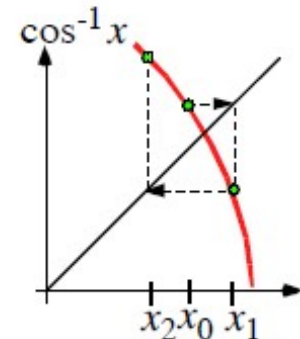
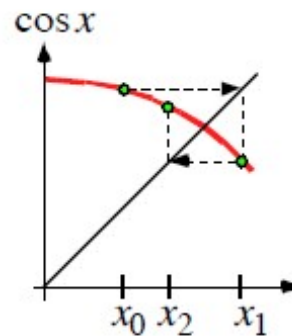
მაგალითად:

$$x - \cos x = 0$$

$$x_{k+1} = \cos x_k$$

or

$$x_{k+1} = \cos^{-1} x_k$$



უძრავი წერტილის იტერაციული მეთოდით პოვნისათვის იტერაციების გაჩერების პირობა:

- წინასწარ აღებული სიზუსტე: `Max_Delta`
- იტერაციების მაქსიმალური რიცხვი: `Max_iter`

ფუნქცია, რომლისთვისაც ვეძებთ უძრავ წერტილს

userdef\_fun.m

```
function out_var = userdef_fun(in_var);
out_var = cos(in_var).^2;
```

უძრავი წერტილის იტერაციული მეთოდით საძებნი ფუნქცია

fixedpoint\_solver.m

```
function out = fixedpoint_solver(Xinit,Max_iter,Max_Delta);

x1 = Xinit;
y1 = userdef_fun(x1);
x2 = y1;
y2 = userdef_fun(x2);
x3 = y2;
% First iteration complete

Num_iter = 1;

while (abs(x2-x1)>Max_Delta) && (Num_iter<Max_iter)
    x1 = x3;
    x2 = userdef_fun(x1);
    x3 = userdef_fun(x2);
    Num_iter = Num_iter + 1;
end

out = x3;
```



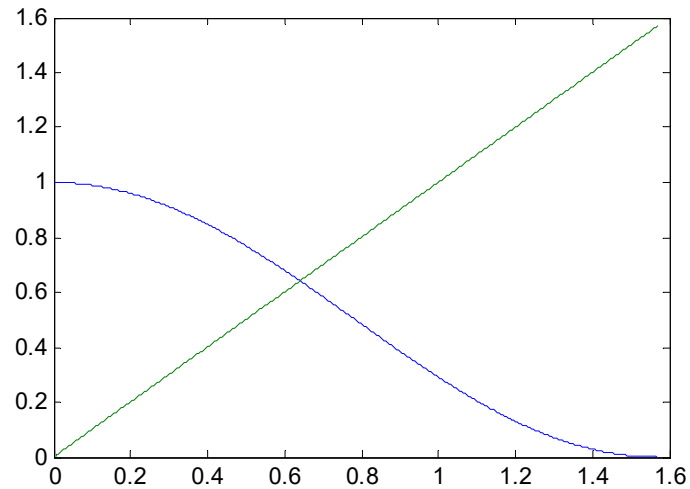
*ფუნქცია არ ამოწმებს უძრავი წერტილის იტერაციის კრებადობას*

მაგალითი:

`Xinit = 0.1; Max_Delta = 1e-10;`

$$x = \cos^2(x)$$

Max_iter	out
10	0.546457502843768
20	0.603353388813703
30	0.625346578274696
40	0.634654270190017
50	0.638661592769074
100	0.641668024299846
1e+3	0.641714370826628
1e+4	0.641714370826628
1e+5	0.641714370826628



უძრავი წერტილის იტერაციის მეთოდი:

+ იმპლემენტაციის/ინტერპრეტაციის სიმარტივე	- არ არის გარანტირებული კრებადობა
+ არ გვჭირდება წარმოებული	- დამოკიდებულია საწყისი წერტილის არჩევაზე
+ იტერაციის დაბალი რიცხვითი “ფასი”	- შეიძლება ჩაიციკლოს (!) ან გახდეს განშლადი

### დავალება 3.1.

გამოითვალეთ ელიფსურ ორბიტაზე მბრუნავი პლანეტის ექსცენტრული ანომალიის კუთხის დამოკიდებულება საშუალო ანომალიის კუთხეზე  $E=E(M)$ , ორბიტის ექსცენტრისიტეტის სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის:  $e=0.01, 0.05, 0.1, 0.2$ .

## ნიუტონის მეთოდი (Newton-Raphson method)

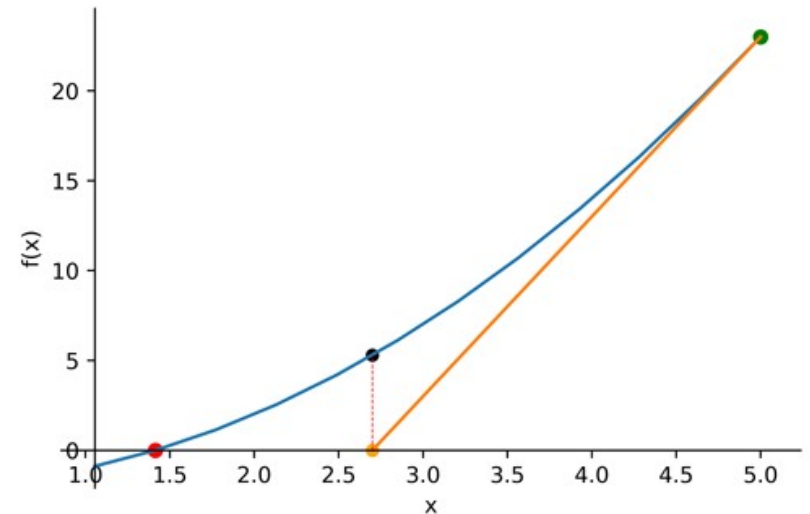
### დავუშვათ

არსებობს  $f(x)$  და მისი პირველი რიგის წარმოებული;

$$f(x) = 0$$

$$y = f(x)$$

თუ  $f'(x_n) \neq 0$ .



### მეთოდი

$f(x)$  წრფივი აპროქსიმაცია მხეზით და წრფის  $x$  ღერძთან გადაკვეთის წერტილის პოვნა;

$$T(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) = 0,$$

პირველი ტრუნკაცია (ტეილორის მწკრივი);

შემდგომი იტერაცია:

$$x_{n+1} = x_n + h_n, \quad h_n = -f(x_n)/f'(x_n).$$

ამონახსნი:

$$|h_n| < \delta$$

მაგალითი:

$$f(x) = (x/2)^2 - \sin x = 0$$

$$f'(x) = x/2 - \cos x,$$

$$x_0 = 1.8$$

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h_n$
0	1.800000000000	-0.163847630878	1.127202094693	-0.145357812631
1	1.945357812631	0.015436106659	1.338543359427	0.011532018406
2	1.933825794225	0.000095223283	1.322020778469	0.000072028582
3	1.933753765643	0.000000003722	1.321917429113	0.000000002816
4	1.933753762827			

### ნიუტონის მეთოდი:

- + კვადრატული კრებადობა მარტივ ფესვთან;
- + შესაძლებელია სხვადასხვა მოდიფიკაციები/გაუმჯობესება

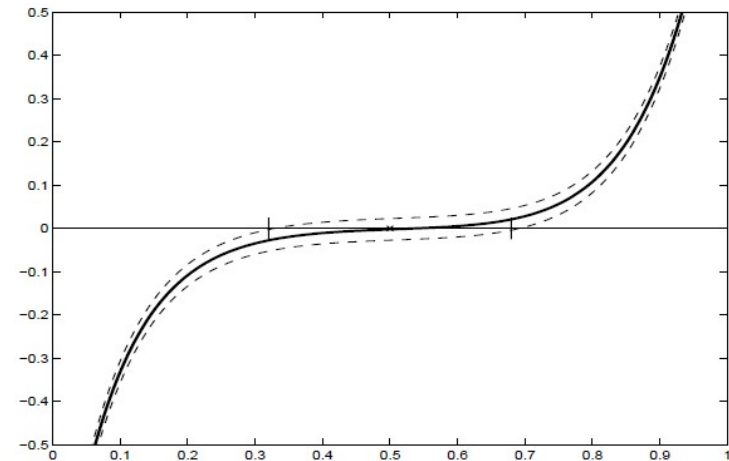
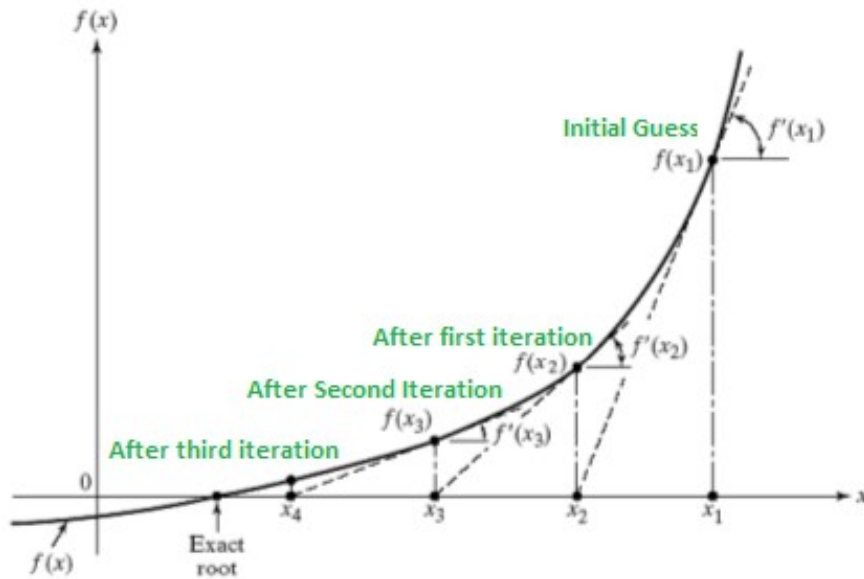


Figure 6.5.1. An ill-conditioned root.

- საჭიროა წარმოებულების გამოთვლა;
- იტერაციები შეიძლება გახდეს განშლადი (მაგ. გადაღუნვის წერტილი);
- პრობლემა, როდესაც წარმოებული უახლოვდება ნულს;
- ვერ ვაფასებთ ცდომილების ფუნქციას;
- უჭირს გლობალური ამონახსნების პოვნა;

დაზღვეული ნიუტონის მეთოდი

ბისექცია + ნიუტონის მეთოდი

საწყისი ინტერვალი:  $a < b$ , ვთქვათ  $f(a)f(b) < 0$ .

1. ბისექციის იტერაცია:  $a' = x, b' = b$  ან  $a' = a, b' = x$ , სადაც:  $f(a')f(b') \leq 0$ .

2. ნიუტონის იტერაცია:  $z = x - f(x)/f'(x)$

თუკი  $a < z < b$ :  $x = z$   
 სხვა შემთხვევაში:  $x = (a + b) / 2$   
 $z \in [a, b]$

$$b - z = b - x + f(x)/f'(x) \geq 0$$

$$z - a = x - a - f(x)/f'(x) \geq 0.$$

ა)  $f'(x) > 0$ .  $(b - x)f'(x) \geq -f(x)$  and  $(x - a)f'(x) \geq f(x)$ .

ბ)  $f'(x) < 0$   $(b - x)f'(x) \leq -f(x)$  and  $(x - a)f'(x) \leq f(x)$ .



## მაღალი რიგის ნიუტონის მეთოდი

მეორე რიგის წარმოებული:

$$T(h) = f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2}f''(x_n) = 0.$$

ამონახსნის იტერაცია:  $h = x - x_n$

თუკი:

$$f'(x_n)^2 \geq 2f(x_n)f''(x_n)$$

$$h_n = -\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 2\frac{f(x_n)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2}} \right).$$

$$x_{n+1} = x_n - u(x_n) \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2t(x_n)}},$$

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad t(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

## სეკანტის მეთოდი

ნიუტონის მეთოდის მინუსი: ფუნქციის ანალიზური წარმოებულის არსებობა.

შემთხვევა: *უცნობია ფუნქციის წარმოებული ანალიზური სახით;*

სეკანტის მეთოდში წარმოებულის შეფასება ხდება დისკრეტულად:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

$$x_{n+1} = x_n + h_n,$$

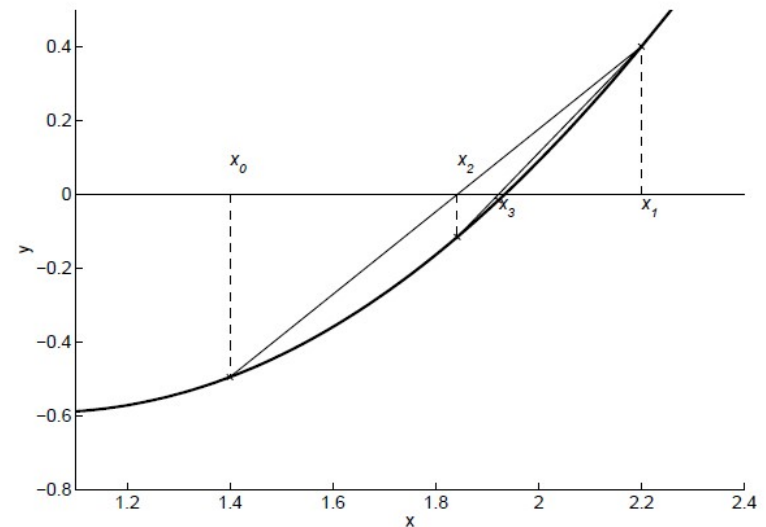
$$h_n = -f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},$$

მაგალითი:

$$f(x) = (x/2)^2 - \sin x = 0$$

$$x_0 = 1.5, x_1 = 2.$$

$n$	$x_n$	$f(x_n)$	$h_n$
0	1.5	-0.434994986604	
1	2.0	+0.090702573174	-0.086268778965
2	<b>1.913731221035</b>	-0.026180060742	+0.019322989205
3	<b>1.933054210240</b>	-0.000924399645	+0.000707253882
4	<b>1.933761464122</b>	+0.000010180519	-0.000007704220
5	<b>1.933753759902</b>	-0.000000003867	+0.000000002925
6	<b>1.933753762827</b>		



- ნელი კრებადობა
- მდგრადობა 😞

### სკალარული ფუნქციის მინიმუმის პოვნა

ერთგანზომილებიანი მინიმიზაციის პრობლემა (ოპტიმიზაციის ამოცანები).

თუკი ფუნქცია დიფერენცირებადია მინიმუმში:

$$f'(x^*) = 0.$$

ფუნქციის წარმოებულის ნულთან ტოლობა (მეორე წარმოებული დადებითია, ან საზღვრები).

*ფუნქციის ლოკალური მინიმუმები.*

#### დავალება 3.2.

იპოვეთ  $x = \tan(x)$  განტოლების დადებითი ფესვები;

#### დავალება 3.3.

გამოიყენეთ ნიუტონის მეთოდი და იპოვეთ შემდეგი განტოლების ამონახსნი  $1e-6$  სიზუსტით:

$$x = 1 - e^{-2x} \quad (1)$$

$$x \ln(x) - 1 = 0 \quad (2)$$