

იტერაციული მეთოდები

ამოცანის მაგალითი:

იპოვეთ ელიფსურ ორბიტაზე მბრუნავი პლანეტის კოორდინატები დროის t მომენტში.

ელიფსის განტოლება:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ორბიტის წერტილი: $P(x,y)$

ორბიტის ექსცენტრისიტეტი:
$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

ექსცენტრული ანომალიის კუთხე: E

გამოთვლა:
$$\cos E = \frac{x}{a}, \quad \sin E = \frac{y}{b}$$

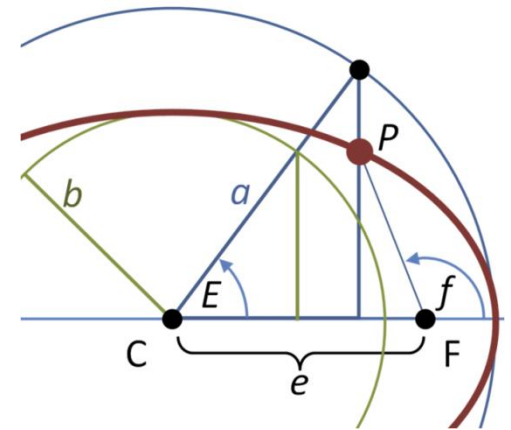
საშუალო ანომალია: M

რა კუთხეს მოწერდა პერიასტრიდან წრიულ ორბიტაზე თანაბარი სიჩქარით მბრუნავი სხეული

$$M = E - e \sin E.$$

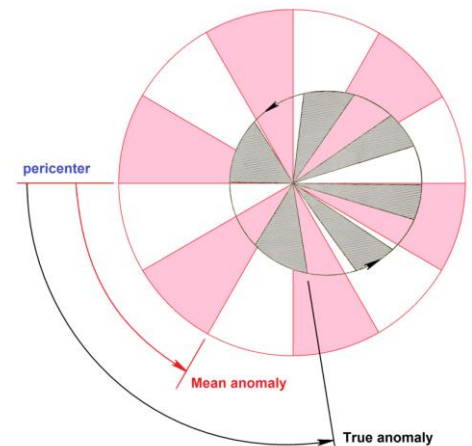
ვიპოვოთ E მოცემული M -სათვის $f(E,M)=0.$

როგორ ამოვხნათ ტრანსცენდენტული განტოლებები?



$$x = a \cos(E - e)$$

$$y = a \sqrt{1 - e^2} \sin E$$



ფუნქციის ნულები

ამოვხსნათ არაწრფივი (ტრანსცედენტული) განტოლება: $f(x)=0$

ამოხსნის მნიშვნელოვანი 3 წესი:

3 rules

1. graph the function
2. make a graph of the function
3. make sure that you have made a graph of the function

ბისექციის მეთოდი

საშუალო მნიშვნელობის თეორემა

$$f(a) < k$$

$$f(b) > k$$

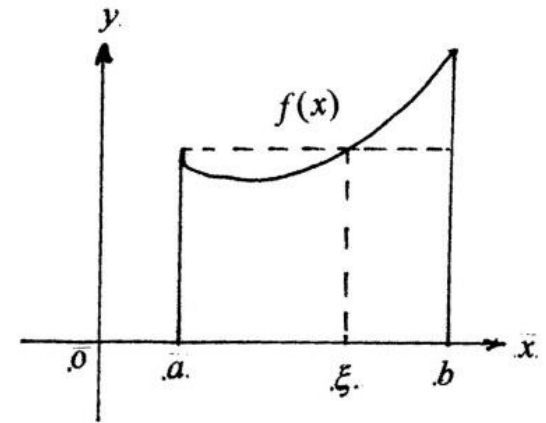
$f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ მოიძებნება $a < \xi < b$ რომლისთვისაც $f(\xi) = k$

$$f(x_{min}) < 0, f(x_{max}) > 0,$$

$$f(x_{min}) > 0, f(x_{max}) < 0,$$

$f(x_{min}) * f(x_{max}) < 0$: მოიძებნება $x_{min} < x_k < x_{max} : f(x_k) = 0$.

ამოცანა: ვიპოვოთ x_k .



პირველი ნაბიჯი (იტერაცია): შევამოწმოთ $f(x)$ უწყვეტი ფუნქციის ნულის არსებობა (a_0, b_0) ინტერვალში:

$$f(a_0)f(b_0) < 0.$$

$f(x)$ ფუნქციის 0 ვიცით $(x=a_0-b_0)$ სიზუსტით.

სიზუსტის მომატება შესაძლებელია ინტერვალის საზღვრების შემცირებით - იტერაციებით:

$$(a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset (a_3, b_3) \supset \dots$$

k -ური იტერაციის შემდეგ ჩვენი ინტერვალა (ამონახსნის სიზუსტე):

$$I_k = (a_k, b_k),$$

ამონახსნად მიახლოებით შეიძლება ავიღოთ k იტერაციის ინტერვალის შუა წერტილი:

$$m_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k).$$

თუკი $f(m_k) = 0$, ამონახსნი ნაპოვნია.

თუკი $f(m_k) < e$, სადაც e საძებნი ამონახსნის მისაღები სიზუსტეა, ამონახსნი ნაპოვნია წინასწარ განსაზღვრული საჭირო სიზუსტით.

სხვა შემთხვევაში შეგვიძლია ჩავატაროთ შემდეგი იტერაცია ...

$(k+1)$ იტერაციისათვის ინტერვალის შერჩევის წესი:

$$I_{k+1} = (a_{k+1}, b_{k+1})$$

$(k+1)$ ინტერვალის საზღვრები:

$$(a_{k+1}, b_{k+1}) = \begin{cases} (m_k, b_k), & \text{if } f(m_k)f(a_k) > 0; \\ (a_k, m_k), & \text{if } f(m_k)f(a_k) < 0. \end{cases}$$

ბისექციით გაყოფის შემდეგ ვირჩევთ ინტერვალს სადაც ლოკალიზებულია ფუნქციის ნული:

$$f(a_{k+1})f(b_{k+1}) < 0$$

ინტერვალის სიგრძის შემცირება n იტერაციის შემდეგ: $(a_n, b_n) \quad 2^{-n}(b_0 - a_0)$.

ზუსტი ამონახსნი: $x = \alpha$

ბიჯების რაოდენობა: n

რიცხვითი ამონახსნი: $x = m_n$

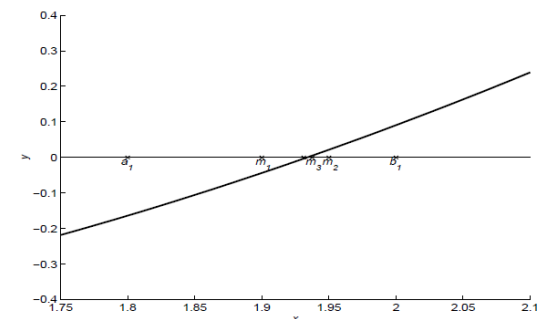
$$|\alpha - m_n| < 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0).$$

ინტერვალის ერთი რიგით შემცირება:

$$10^{-1} \approx 2^{-3.3}$$

წინასწარ განსაზღვრული სიზუსტე: δ

$$\log_2((b - a)/\delta)$$



შუა წერტილის დათვლის მეთოდი:

$$m_k = a_k + \frac{b_k - a_k}{2}$$

მაგალითი:

ვიპოვოთ ფუნქციის ნულები:

$$(x/2)^2 - \sin x = 0.$$

პასუხის იტერაციული გაუმჯობესება:

n	a_n	b_n	m_n
1	1.8	2	1.9
2	1.9	2	1.95
3	1.9	1.95	1.925
4	1.925	1.95	1.9375
5	1.925	1.9375	1.93125
6	1.93125	1.9375	1.934375

```

fa = f(a);
while |b - a| > δ
    m = a + (b - a)/2;
    fm = f(m);
    if fm · fa ≤ 0
        b = m;
    else
        a = m;  fa = fm;
    end;
end;
root = a + (b - a)/2;
    
```

ფსევდოკოდი

ორ საფეხუროვანი ბისექციის მეთოდი (ერთზე მეტი მოსალოდნელი ფესვი)

1. Hunting stage
2. Iterative stage

„გაყავი და იბატონე“

1. ნადირობის ბიჯი:

შევარჩიოთ ბიჯი, რომელიც გარკვეული მოსაზრებებიდან ორ ფესვს შორის მანძილზე ნაკლებია: d

$$f(a + d), f(a + 2d), f(a + 3d), \dots$$

აღმოვაჩინოთ ინტერვალები სადაც იმყოფებიან ფესვები:

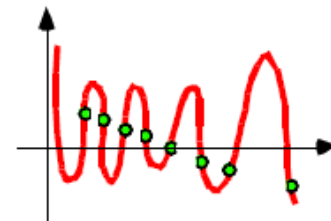
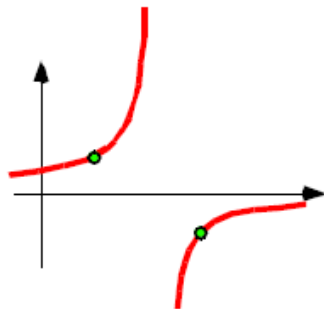
$$f(a + kd)f(a + (k + 1)d) < 0$$

დავიმახსოვრეთ ფესვების პოზიციები: k .

2. სტანდარტული ბისექციის მეთოდი ყოველ ფესვთან ახლოს;

ბისექციის მეთოდის თვისებები

- + გარანტირებული კრებადობა მარტივ ფესვზე;
- + კრებადობის მოსალოდნელი ტემპი;
- + წინასწარ განსაზღვრული სიზუსტის არსებობა;
- განშლადობა პოლუსებზე;
- ჯერადი ნულები (ჰარმონიული ფუნქცია, ცილინდრული ფუნქცია);
- საჭიროა ინტერვალის შემოყვანა (გამოცნობა);
- ყველაზე ნელი იტერაციული მეთოდი;



დავალება 2.1.

შემდეგ განტოლებების ფესვები მოთავსებულია ინტერვალში $(0, 1.6)$. იპოვეთ ფესვები ბისექციის მეთოდის გამოყენებით 10^{-6} –ზე მეტი სიზუსტით.

$$x \cos(x) = \ln(x) \quad (1)$$

$$2x = \exp(-x) \quad (2)$$

$$\exp(-2x) = 1 - x \quad (3)$$

დავალება 2.2.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის ნულები:

$$4 \sin x + 1 - x = 0 \quad (1)$$

$$1 - x - e^{-2x} = 0 \quad (2)$$

$$(1 + x)e^{x-1} - 1 = 0 \quad (3)$$

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 8 = 0 \quad (4)$$

$$e^x + x^2 + x = 0 \quad (5)$$

$$3x^2 + \operatorname{tg}(x) = 0 \quad (6)$$

დავალება 2.3.

ბისექციის მეთოდში ინტერვალის გაყოფის წერტილად არითმეტიკული საშუალოს ადებს საშუალებას იძლევა მოხდეს აბსოლუტური ცდომილების მინიმიზება. ინტერვალის გაყოფისას გეომეტრიული საშუალოს გამოყენებით ($ab > 0$) ხდება ფარდობითი ცდომილების მინიმიზება. აირჩიეთ 2.1. დავალების რამდენიმე განტოლება და შეადარეთ ინტერვალის გაყოფის ეს ორი მეთოდი:

$$m_k = a_k + \frac{b_k - a_k}{2} \quad m_k = \sqrt{a_k b_k}$$