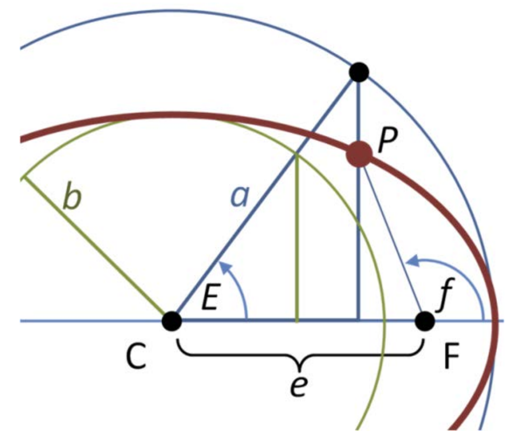
იტერაციული მეთოდები

ამოცანის მაგალითი:

იპოვეთ ელიფსურ ორბიტაზე მბრუნავი პლანეტის კოორდინატები დროის t მომენტში.

ელიფსის განტოლება: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$



ორბიტის წერტილი: *P(x,y)*

ორბიტის ექსცენტრისიტეტი: $$e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\,.$$

ექსცენტრული ანომალიის კუთხე: E

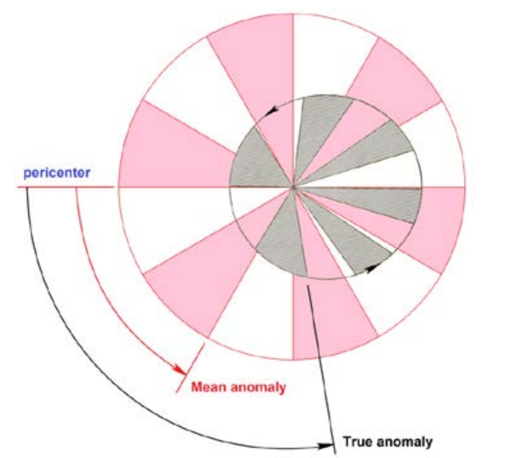
გამოთვლა: $$\cos E=\frac{x}{a},\qquad \sin E=\frac{y}{b}$$

$$\begin{aligned} x &= a\cos(E-e) \\ y &= a\sqrt{1-e^2}\sin E \end{aligned}$$

საშუალო ანომალია: M

რა კუთხეს მოწერდა პერიასტრიდან წრიულ ორბიტაზე თანაბარი სიჩქარით მბრუნავი სხეული

$$M=E-e\sin E.$$



ვიპოვოთ E მოცემული M-სათვის **$f(E,M)=0.$**

როგორ ამოვხნათ ტრანსცენდენტული განტოლებები?

ფუნქციის ნულები

ამოვხსნათ არაწრფივი (ტრანსცედენტული) განტოლება: $f(x)=0$

ამოხსნის მნიშვნელოვანი 3 წესი:

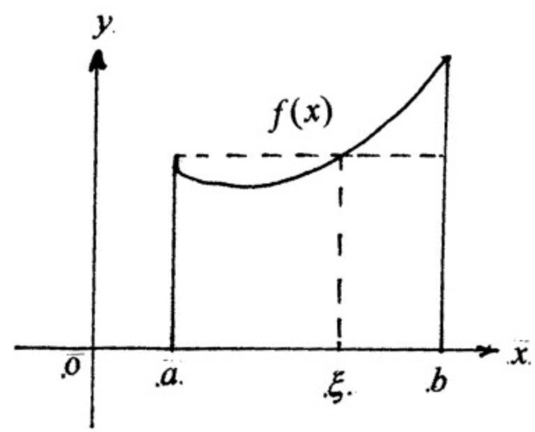
3 rules

1. graph the function
2. make a graph of the function
3. make sure that you have made a graph of the function

ბისექციის მეთოდი

საშუალო მნიშვნელობის თეორემა
$f(a) < k$
$f(b) > k$

$f(x)$ უწყვეტი ფუნქციაა, მაშინ მოიძებმება $a<\xi<b$ რომლისთვისაც $f(\xi)=k$



$f(x_{min}) <0, \ f(x_{max}) >0,$
$f(x_{min}) >0, \ f(x_{max}) <0,$

$f(x_{min})*f(x_{max}) <0$: მოიძებნება $x_{min} < x_k < x_{max}$: $f(x_k) = 0.$

ამოცანა: ვიპოვოთ x_k.

პირველი ნაბიჯი (იტერაცია): შევამოწმოთ *f(x)* უწყვეტი ფუნქციის ნულის არსებობა *(a0,b0)* ინტერვალში:

$$f(a_0)f(b_0) \; < \; 0.$$

f(x) ფუნქციის 0 ვიცით *(x=a0-b0)* სიზუსტით.

სიზუსტის მომატება შესაძლებელია ინტერვალის საზღვრების შემცირებით - იტერაციებით:

$$(a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset (a_3, b_3) \supset \cdots$$

k-ური იტერაციის შემდეგ ჩვენი ინტერვალია (ამონახსნის სიზუსტე):

$$I_k = (a_k, b_k),$$

ამონახსნად მიახლოებით შეიძლება ავიღოთ *k* იტერაციის ინტერვალის შუა წერტილი:

$$m_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k).$$

თუკი $f(m_k) = 0$, ამონახსნი ნაპოვნია.

თუკი $f(m_k) < e$, სადაც *e* საძებნი ამონახსნის მისაღები სიზუსტეა, ამონახსნი ნაპოვნია წინასწარ განსაზღვრული საჭირო სიზუსტით.

სხვა შემთხვევაში შეგვიძლია ჩავატაროთ შემდეგი იტერაცია ...

(k+1) იტერაციისათვის ინტერვალის შერჩევის წესი:

$$I_{k+1} = (a_{k+1}, b_{k+1})$$

(k+1) ინტერვალის საზღვრები:

$$(a_{k+1}, b_{k+1}) = \begin{cases} (m_k, b_k), & \text{if } f(m_k)f(a_k) > 0; \\ (a_k, m_k), & \text{if } f(m_k)f(a_k) < 0. \end{cases}$$

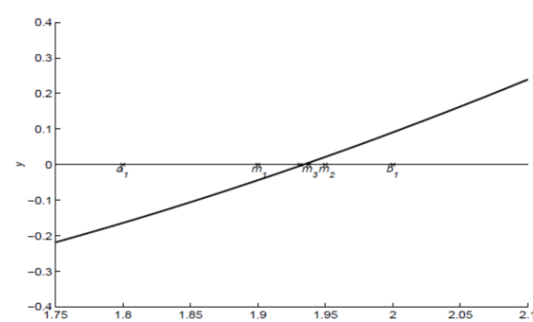
ბისექციით გაყოფის შემდეგ ვირჩევთ ინტერვალს სადაც ლოკალიზებულია ფუნქციის ნული:

$$f(a_{k+1})f(b_{k+1}) < 0$$

ინტერვალის სიგრძის შემცირება n იტერაციის შემდეგ: (a_n, b_n) $2^{-n}(b_0 - a_0).$

ზუსტი ამონახსნი: $x = \alpha$
ბიჯების რაოდენობა: n
რიცხვითი ამონახსნი: $x = m_n$

$$|\alpha - m_n| < 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0).$$



ინტერვალის ერთი რიგით შემცირება: $10^{-1} \approx 2^{-3.3}$

წინასწარ განსაზღვრული სიზუსტე: δ $\log_2((b-a)/\delta)$

შუა წერტილის დათვლის მეთოდი:

$$m_k = a_k + \frac{b_k - a_k}{2}$$

მაგალითი:

ვიპოვოთ ფუნქციის ნულები:

$$(x/2)^2 - \sin x = 0$$

პასუხის იტერაციული გაუმჯობესება:

n	a_n	b_n	m_n
1	1.8	2	1.9
2	1.9	2	1.95
3	1.9	1.95	1.925
4	1.925	1.95	1.9375
5	1.925	1.9375	1.93125
6	1.93125	1.9375	1.93375

```
fa = f(a);
while |b - a| > δ
    m = a + (b - a)/2;
    fm = f(m);
    if fm · fa ≤ 0
      b = m;
    else
      a = m;   fa = fm;
    end;
end;
root = a + (b - a)/2;
```

ფსევდოკოდი

ორ საფეხუროვანი ბისექციის მეთოდი
(ერთზე მეტი მოსალოდნელი ფესვი)

1. Hunting stage
2. Iterative stage

„გაყავი და იბატონე“

1. ნადირობის ბიჯი:

შევარჩიოთ ბიჯი, რომელიც გარკვეული მოსაზრებებიდან ორ ფესვს შორის მანძილზე ნაკლებია: d

$$f(a+d),\ f(a+2d),\ f(a+4d),\ldots,$$

აღმოვაჩინოთ ინტერვალები სადაც იმყოფებიან ფესვები:

$$f(a)f(a+2^k d)\ <\ 0.$$

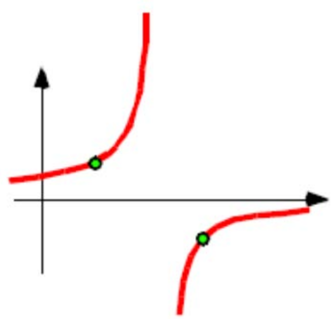
დავიმახსოვრეთ ფესვების პოზიციები: k.

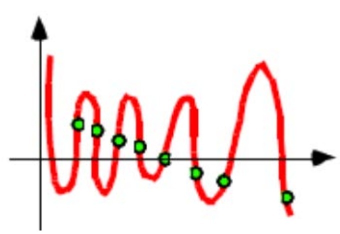
2. სტანდარტული ბისექციის მეთოდი ყოველ ფესვთან ახლოს;

ბისექციის მეთოდის თვისებები

+ გარანტირებული კრებადობა მარტივ ფესვზე;
+ კრებადობის მოსალოდნელი ტემპი;
+ წინასწარ განსაზღვრული სიზუსტის არსებობა;

- განშლადობა პოლუსებზე;
- ჯერადი ნულები (ჰარმონიული ფუნქცია, ცილინდრული ფუნქცია);
- საჭიროა ინტერვალის შემოყვანა (გამოცნობა);
- ყველაზე ნელი იტერაციული მეთოდი;





დავალება 2.1.

შემდეგ განტოლებების ფესვები მოთავსებულია ინტერვალში *(0,1.6)*. იპოვეთ ფესვები ბისექციის მეთოდის გამოყენებით 10^{-6} –ზე მეტი სიზუსტით.

$$x\cos(x) = \ln(x) \qquad (1)$$

$$2x = \exp(-x) \qquad (2)$$

$$\exp(-2x) = 1 - x \qquad (3)$$

დავალება 2.2.

იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის ნულები:

$$4\sin x + 1 - x = 0 \qquad (1)$$

$$1 - x - e^{-2x} = 0 \qquad (2)$$

$$(1+x)e^{x-1} - 1 = 0 \qquad (3)$$

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 8 = 0 \qquad (4)$$

$$e^x + x^2 + x = 0 \qquad (5)$$

$$3x^2 + tg(x) = 0 \qquad (6)$$

დავალება 2.3.

ბისექციის მეთოდში ინტერვალის გაყოფის წერტილად არითმეტიკული საშუალოს აღება საშუალებას იძლევა მოხდეს აბსოლუტური ცდომილების მინიმიზება. ინტერვალის გაყოფისას გეომეტრიული საშუალოს გამოყენებით ($ab>0$) ხდება ფარდობითი ცდომილების მინიმიზება. აირჩიეთ 2.1. დავალების რამდენიმე განტოლება და შეადარეთ ინტერვალის გაყოფის ეს ორი მეთოდი:

$$m_k = a_k + \frac{b_k - a_k}{2} \qquad m_k = \sqrt{a_k b_k}$$