

## რიცხვითი ინტეგრება

$$\int_a^b f(x) dx.$$

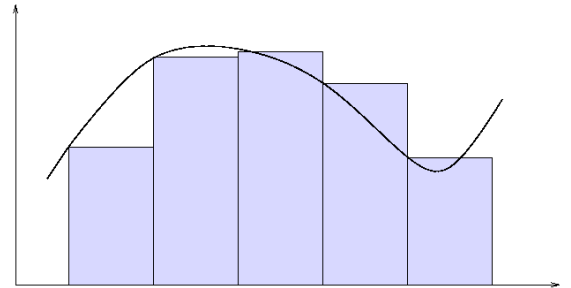
ზოგიერთი მარტივი ფუნქციაც კი ანალიზურად არა ინტეგრებადია. მაგ:  $\operatorname{erf}(b) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^b e^{-x^2} dx,$

### მართკუთხედების მეთოდი

$$Int = \sum_{k=1}^N \Delta x \cdot f(x_k)$$

ერთგვაროვანი ზადისათვის:

$$Int = dx \cdot \text{sum}(f);$$

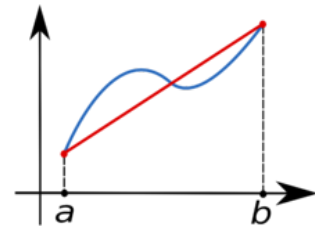


### ტრაპეციის წესი

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} \right].$$

ზადეზე:

$$Int = \sum_{k=1}^N (x_{k+1} - x_k) \frac{(f(x_{k+1}) + f(x_k))}{2}$$

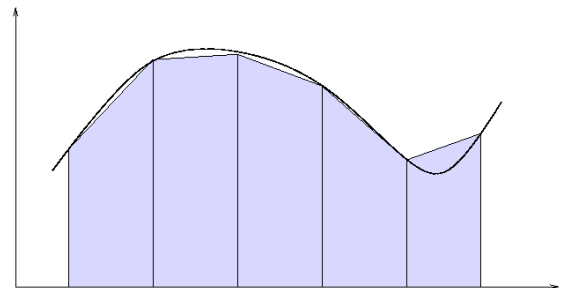


ერთგვაროვან ზადეზე:

$$Int = \frac{\Delta x}{2} \sum_{k=1}^N (f(x_{k+1}) + f(x_k))$$

ან:

$$Int = \Delta x \cdot \left[ \sum_{k=1}^N f(x_k) - f(x_1) - f(x_N) \right]$$



ცდომილება:

$$error = \int_a^b f(x)dx - (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2} + \dots$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a)dx + \int_a^b f'(a)(x-a)dx + \int_a^b f''(a) \frac{(x-a)^2}{2} dx + \dots$$

$$\int_a^b f(x)dx = f(a)(b-a) + f'(a) \frac{(b-a)^2}{2} + f''(a) \frac{(b-a)^3}{6} + \dots$$

$$f'(a) \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{f(b) - f(a)}{2} (b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \frac{f(b) + f(a)}{2} + f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{6}.$$

$$error = f''(\xi) \frac{(b-a)^3}{6}.$$

თუკი  $x$ -ში წერტილების რაოდენობაა  $N$ :

$$\Delta x \propto (b-a) / N$$

$$error \propto O(N^{-3}).$$

## სიმსონის მეთოდი

ყოველ ინტერვალში ინტეგრალი

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx.$$

ამოვხსნათ შემდეგი პოლინომიალის გამოყენებით:

$$f(x) = f_i + (x - x_i)f'_i + \frac{(x - x_i)^2}{2}f''_i + \frac{(x - x_i)^3}{3!}f'''_i + O(h^4)$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx = 2hf_i + 0 + \frac{1}{3}h^3 f''_i + 0 + O(h^5)$$

ცენტრალური წარმოებულის გამოყენებით:

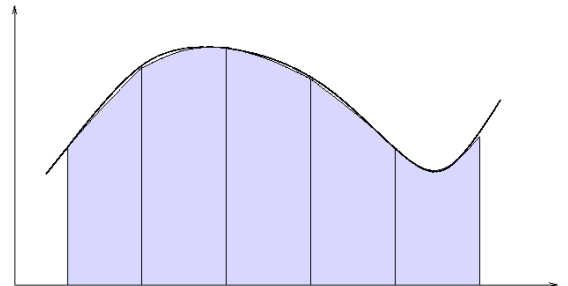
$$h^2 f''_i = (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) + O(h^4)$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx = 2hf_i + \frac{1}{3}h(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) + O(h^5)$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} f(x) dx = \frac{h}{3} (f(x_{k-1}) + 4f(x_k) + f(x_{k+1})) + O(h^5)$$

$$\text{error} = \frac{f^{(4)}(\xi_k)}{45} (x_{k+1} - x_{k-1})^5.$$

$$\text{error} \propto O(N^{-5}).$$



$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^N \left( \frac{h}{3} (f(x_{k-1}) + 4f(x_k) + f(x_{k+1})) + O(h^5) \right)$$

სიმსონის წესის იმპლემენტაცია ერთგვაროვან ზადეზე:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_1) + 4U + 2E + f(x_N))$$

სადაც:

$$U = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_N).$$

$$E = f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{N-2}).$$

အမည်ကျော်:

1.

Compute the integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x} dx$$

2.

Compute the integral  $\int_0^{\infty} (1+x^2)^{-4/3} dx$  with five correct decimals.

3.

Propose a suitable plan (using a computer) for computing the following integrals, for  $s = 0.5, 0.6, 0.7, \dots, 3.0$ :

(a)  $\int_0^{\infty} (x^3 + sx)^{-1/2} dx$ ;      (b)  $\int_0^{\infty} (x^2 + 1)^{-1/2} e^{-sx} dx$ , error  $< 10^{-6}$ ;

(c)  $\int_{\pi}^{\infty} (s+x)^{-1/3} \sin x dx$ .