



ივანე ჯავახიშვილის სახელობის  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

## ლექცია 4

აკადემიური და პრატის კურსის ასებითი მოყვარული 2,

ს. თბილი (2016)

## Finite Volume

Conservation equation in the integral form

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U(t,x) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot F(t,x) d\Omega = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U(t,x) d\Omega + \oint_S F(t,x) \cdot n ds = 0$$

აკადემიური და პრატის კურსის ასებითი მოყვარული 2,

ს. თბილი (2016)

აკადემიური და პრატის კურსის ასებითი მოყვარული 2,

ს. თბილი (2016)

## Finite Volume

Evaluating flux

$$\oint_S F(t,x) \cdot n ds \approx \sum_{faces} F_k n_k$$

*Numerical flux calculation problem*

აკადემიური და პრატის კურსის ასებითი მოყვარული 2,

ს. თბილი (2016)

## Cells and Faces

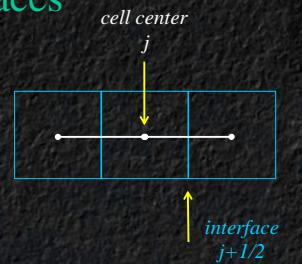
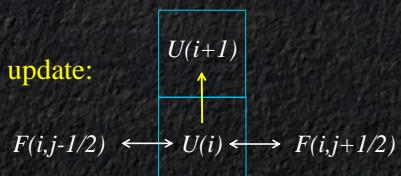
Grid cell centers:

$$j=1, 2, 3, \dots, n.$$

Cell interfaces:

$$j=1/2, 3/2, \dots, n-1/2.$$

Finite Volume update:



## Finite Volume

Time stepping algorithm

$$U(i+1, j) = U(i, j) - \frac{\Delta t}{\Delta x_j} (F^*(i, j + 1/2) - F^*(i, j - 1/2))$$

flux on the cell faces

ასტრონომიული და გეოზოგიკური კონფიგურაციების მოდელიზაცია 2,

ს. მარგარიტიანი (2016)

## Finite Volume

Multidimensional problem:

Unsplit integration

$$U(i+1, j, k) = U(i, j, k) - \frac{\Delta t}{\Delta x_j} (F^*(i, j + 1/2, k) - F^*(i, j - 1/2, k)) - \frac{\Delta t}{\Delta y_j} (G^*(i, j, k + 1/2) - G^*(i, j, k - 1/2))$$

ასტრონომიული და გეოზოგიკური კონფიგურაციების მოდელიზაცია 2,

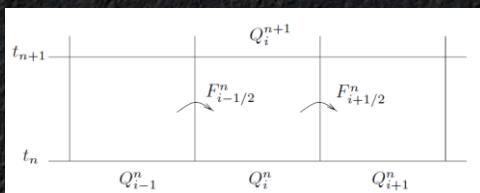
ს. მარგარიტიანი (2016)

ს. მარგარიტიანი (2016)

## Finite Volume

Leveque, Sec. 4

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n),$$



ასტრონომიული და გეოზოგიკური კონფიგურაციების მოდელიზაცია 2,

ს. მარგარიტიანი (2016)

## Boundary Conditions

Numerical flux calculation over the domain:

$$\sum_{volume \; faces} F_k n_k = \sum_{boundary} F_k n_k$$

ასტრონომიული და გეოზოგიკური კონფიგურაციების მოდელიზაცია 2,

ს. მარგარიტიანი (2016)

ს. მარგარიტიანი (2016)

## Numerical Flux Function

Estimating flux on the faces

$$\begin{aligned} U(i+1, j) &= U(i, j) - \frac{\Delta t}{\Delta x_j} (F(i, j+1/2) - F(i, j-1/2)) = \\ &= \frac{\Delta t}{\Delta x_j} (F(U(i, j+1/2)) - F(U(i, j-1/2))) \\ &U(i, j+1/2), U(i, j-1/2) - ? \end{aligned}$$

ასტრონომიული და ბლობული გენერაციის მოდელების შემთხვევაში 2,

აკ. მოგზაური (2016)

## Numerical Flux Function

Estimating numerical flux:

*Upwind – Zeroth approximation*

*Central difference – Averaging conservation variable*

*Central difference – Averaging fluxes*

*Lax-Wendroff – Finite difference analog calculation of the numerical fluxes*

ასტრონომიული და ბლობული გენერაციის მოდელების შემთხვევაში 2,

აკ. მოგზაური (2016)

## Upwind

$$F_{i+1/2}^* = \begin{cases} F(U_i) & \text{if } \lambda_{i+1/2} \geq 0 \\ F(U_{i+1}) & \text{if } \lambda_{i+1/2} < 0 \end{cases}$$

Finding flux direction and projecting cell centered flux value on the cell face.

$$\text{“wave velocity”} \quad \lambda = \partial F / \partial U$$

ასტრონომიული და ბლობული გენერაციის მოდელების შემთხვევაში 2,

აკ. მოგზაური (2016)

## Central Difference

1. Averaging  $U(i,j)$
2. Averaging  $F(i,j)$

$$F_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(F(U_i) + F(U_{i+1})) \quad \text{or} \quad F_{i+1/2}^* = F\left(\frac{U_i + U_{i+1}}{2}\right)$$

ასტრონომიული და ბლობული გენერაციის მოდელების შემთხვევაში 2,

აკ. მოგზაური (2016)

## Finite Volume

Lax-Wendroff flux estimation

$$F_{i+1/2}^* = \frac{1}{2}(F(U_i) + F(U_{i+1})) - \frac{\lambda_{i+1/2}\Delta t}{2\Delta x_{i+1/2}}(F(U_{i+1}) - F(U_i))$$

Calculating numerical flux using finite difference methods on cell center to face transition.

ஸ்ரீமாத்திராஜ கு. வெள்ளி முருகை அனாலிச் தொழில்நுட்ப முனையாளர் 2,

பூ. முத்தோப்பு (2016)

## Finite Volume Method

Discrete formulation of the conservation equation at every cell/interface

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U(t,x) d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot F(t,x) d\Omega &= \\ = \frac{\partial}{\partial t} U_{cell.average}(t, x_j) + F_R(t, x_j) - F_L(t, x_j) &= 0 \end{aligned}$$

ஸ்ரீமாத்திராஜ கு. வெள்ளி முருகை அனாலிச் தொழில்நுட்ப முனையாளர் 2,

பூ. முத்தோப்பு (2016)

## Diffusion Equations

Implicit (Crank-Nicolson)

$$\begin{aligned} q_t &= \beta q_{xx}, \\ f(q_x, x) &= -\beta(x)q_x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_i^{n+1} &= Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n), \\ \frac{d}{dt} \int_{C_i} q(x, t) dx &= f(q(x_{i-1/2}, t)) - f(q(x_{i+1/2}, t)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_i^{n+1} &= Q_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} [\beta_{i+1/2}(Q_{i+1}^n - Q_i^n) - \beta_{i-1/2}(Q_i^n - Q_{i-1}^n) \\ &\quad + \beta_{i+1/2}(Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}) - \beta_{i-1/2}(Q_i^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1})]. \end{aligned}$$

ஸ்ரீமாத்திராஜ கு. வெள்ளி முருகை அனாலிச் தொழில்நுட்ப முனையாளர் 2,

பூ. முத்தோப்பு (2016)

## Finite Volume

Finite Difference

- Problems with conservation
- Irregular geometries

Finite Volume

- + Explicit (hyperbolic)
- + easily adaptable
- + unstructured grids
- problems towards the edges



Unstructured Grid

end

[www.tevza.org/home/course/modelling-II\\_2016/](http://www.tevza.org/home/course/modelling-II_2016/)

Leveque – *Finite Volume Methods for Hyperbolic equations*,  
Sec. 4.1-4.9, pages 64-76

აუთორული და პეტრი გრიგორი მაკარიშვილის მუკლურის 2,  
ს. თბილი (2016)