

В. В. БАТЫГИН, И. Н. ТОПТЫГИН

**СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО
ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ**

Под редакцией М. М. Бредова

Издание третье, исправленное

R&C **РХД**
Dynamics **Москва**

2002

ЗАДАЧИ

ГЛАВА I

ВЕКТОРНОЕ И ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 1. Векторная и тензорная алгебра. Преобразования векторов и тензоров

Скаляром (инвариантом) в трехмерном пространстве называется величина, которая не изменяет своего значения при поворотах координатной системы.

Вектором в трехмерном пространстве называется совокупность трех величин, преобразующихся при поворотах системы координат по формулам

$$A'_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} A_k. \quad (I.1)$$

Здесь A_k — проекции вектора на оси исходной, а A'_i — на оси повернутой системы координат; α_{ik} — коэффициенты преобразования, представляющие собою косинусы углов между k -й осью исходной и i -й осью повернутой системы координат.

В дальнейшем мы воспользуемся следующим правилом суммирования, принятым в тензорном анализе: будем опускать знак суммы, подразумевая суммирование во всех тех случаях, когда в данном выражении встречаются два одинаковых индекса. В соответствии с этим правилом, равенства (I.1) запишутся так:

$$A'_i = \alpha_{ik} A_k.$$

Тензором II ранга в трехмерном пространстве называется девятикомпонентная величина T_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$), преобразующаяся при поворотах координатной системы следующим образом:

$$T'_{ik} = \alpha_{il} \alpha_{km} T_{lm} \quad (I.2)$$

(сумма по l, m). Аналогично тензор s -го ранга в пространстве трех измерений определяется законом преобразования:

$$T'_{i_1 k_1 \dots i_s k_s} = \alpha_{i_1 i'_1} \alpha_{k_1 k'_1} \dots \alpha_{i_s i'_s} \alpha_{k_s k'_s} T_{i'_1 k'_1 \dots i'_s k'_s}. \quad (I.3)$$

В этом равенстве величины T имеют по s индексов.

Величины, преобразующиеся как вектор при поворотах координатной системы, могут двояко вести себя при инверсии системы координат (преобразование $x' = -x, y' = -y, z' = -z$). Те векторы, компоненты¹ которых при инверсии координат меняют знак, называются полярными векторами, или просто векторами. Векторы, компоненты которых не меняют знака при инверсии системы координат, называются псевдовекторами, или аксиальными векторами. Примером аксиального вектора может служить векторное произведение двух полярных векторов. Аналогично тензор s -го ранга называется просто тензором, если его компоненты преобразуются при инверсии как произведения s координат, т. е. умножаются на $(-1)^s$, и псевдотензором, если его компоненты умножаются на $(-1)^{s+1}$.

Таблица коэффициентов преобразования

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{I.4})$$

называется матрицей преобразования. Определитель, элементы которого совпадают с элементами некоторой матрицы, называется определителем этой матрицы:

$$|\hat{\alpha}| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}. \quad (\text{I.5})$$

Суммой двух матриц $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ называется такая матрица $\hat{\gamma}$, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц-слагаемых:

$$\gamma_{ik} = \alpha_{ik} + \beta_{ik}. \quad (\text{I.6})$$

Произведением двух матриц $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ называется такая матрица $\hat{\gamma}$, элементы которой получаются из элементов перемножаемых матриц α_{ik} и β_{ik} по правилу:

$$\gamma_{ik} = \alpha_{il}\beta_{lk} \quad (\text{I.7})$$

(суммирование по l). Матрица $\hat{\gamma}$ описывает такое преобразование, которое получается при последовательном выполнении преобразования сначала с матрицей $\hat{\beta}$, а затем с матрицей $\hat{\alpha}$.

Единичной матрицей называется матрица вида

$$\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.8})$$

¹Мы не делаем различия между ковариантными и контравариантными компонентами векторов и тензоров (см., например, [107]), так как оно несущественно для вопросов, рассматриваемых в этой книге.

Она описывает тождественное преобразование ($A'_i = A_i$). Элементы единичной матрицы обозначаются символом δ_{ik} :

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

Матрица вида

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I.10})$$

называется диагональной матрицей.

Если элементы матрицы удовлетворяют условиям

$$\alpha_{ik}\alpha_{il} = \delta_{kl}, \quad (\text{I.11})$$

то она называется ортогональной.

Матрица $\hat{\alpha}^{-1}$, удовлетворяющая условиям

$$\hat{\alpha}\hat{\alpha}^{-1} = \hat{\alpha}^{-1}\hat{\alpha} = \hat{1}, \quad (\text{I.12})$$

называется обратной матрице $\hat{\alpha}$. Она описывает обратное преобразование, т. е. если $A'_i = \alpha_{ik}A_k$, то $A_k = \alpha_{ki}^{-1}A'_i$.

Матрица $\hat{\alpha}$, которая получается из $\hat{\alpha}$ заменой строк на столбцы, называется транспонированной:

$$\hat{\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\alpha}_{ik} = \alpha_{ki}. \quad (\text{I.13})$$

1. Два направления \mathbf{n} и \mathbf{n}' определяются в сферической системе координат углами ϑ, α и ϑ', α' . Найти косинус угла θ между ними.

2. Доказать тождества:

а) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C});$

б) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})]\mathbf{C} - [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]\mathbf{D} =$
 $= [\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})]\mathbf{B} - [\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})]\mathbf{A}.$

3. Во всех декартовых системах координат задана совокупность трех величин a_i ($i = 1, 2, 3$) и известно, что $a_i b_i = \text{inv}$ относительно поворотов и отражений. Доказать, что если b_i — произвольный вектор (псевдовектор), то a_i — также вектор (псевдовектор).

4. Доказать, что если $a_i = T_{ik}b_k$ в каждой системе координат и T_{ik} — тензор II ранга, а b_k — вектор, то a_i — тоже вектор.

5. Доказать, что $\frac{\partial a_i}{\partial x_k}$ есть тензор II ранга.

6. Доказать, что если T_{ik} — тензор II ранга и P_{ik} — псевдотензор II ранга, то $T_{ik}P_{ik}$ — псевдоскаляр.

7. Показать, что симметрия тензора есть свойство, инвариантное относительно вращения, т. е. тензор, симметричный (антисимметричный) в некоторой системе отсчета, остается симметричным (антисимметричным) и во всех системах, повернутых относительно исходной.

8. Показать, что если тензор S_{ik} — симметричный, а тензор A_{ik} — антисимметричный, то $A_{ik}S_{ik} = 0$.

9. Доказать, что сумма диагональных компонент тензора II ранга является инвариантом.

10*. В некоторых случаях бывает удобно вместо декартовых компонент вектора a_x, a_y, a_z рассматривать его циклические компоненты, определяемые формулами $a_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x \pm ia_y)$, $a_0 = a_z$. Выразить скалярное и векторное произведения двух векторов через их циклические компоненты. Выразить также циклические компоненты радиуса-вектора через шаровые функции¹ Лежандра.

11*. Найти компоненты тензора ε_{ik}^{-1} , обратного тензору ε_{ik} . Рассмотреть, в частности, случай, когда ε_{ik} является симметричным тензором, заданным в главных осях.

12. Пусть во всех координатных системах компоненты вектора \mathbf{a} линейно выражаются через компоненты вектора \mathbf{b} : $a_i = \varepsilon_{ik}b_k$. Доказать, что совокупность величин ε_{ik} является тензором II ранга. (Точнее, ε_{ik} является тензором, если \mathbf{a} и \mathbf{b} — оба полярные векторы или псевдовекторы, и псевдотензором, если один из векторов — полярный, а другой — аксиальный.)

13. Показать, что совокупность величин $A_{ikl}B_{ik}$, где A_{ikl} — тензор III ранга, а B_{ik} — тензор II ранга, является вектором.

14. Найти закон преобразования совокупности объемных интегралов $T_{ik} = \int x_i x_k dV$ при пространственных поворотах и отражениях (x_i и x_k — декартовы координаты).

¹Определение шаровых функции приведено в приложении 2.

15. Составить матрицы преобразования базисных ортов: при переходе от декартовых координат к сферическим и обратно; при переходе от декартовых координат к цилиндрическим и обратно.

16. Записать матрицу преобразования компонент вектора: при отражении трех координатных осей; при повороте декартовой системы координат вокруг оси z на угол α .

17. Найти матрицу преобразования компонент вектора при повороте координатных осей, определяемом углами Эйлера α_1 , θ , α_2 (рис. 1), путем перемножения матриц, соответствующих поворотам вокруг оси z на угол α_1 , вокруг линии узлов ON на угол θ и вокруг оси z' на угол α_2 .

18. Найти матрицу $\hat{D}(\alpha_1\theta\alpha_2)$, с помощью которой преобразуются циклические компоненты вектора (см. задачу 10*) при повороте координатной системы, определяемом углами Эйлера α_1 , θ , α_2 (рис. 1).

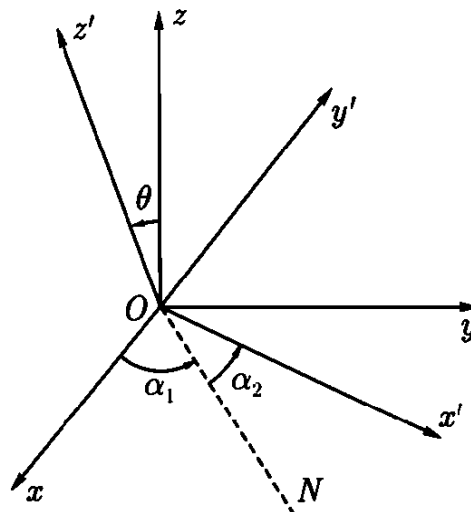


Рис. 1

19*. Показать, что матрица бесконечно малого поворота системы координат $\hat{\alpha}$ может быть записана в виде $\hat{\alpha} = \hat{1} + \hat{\varepsilon}$, где $\hat{\varepsilon}$ — антисимметричная матрица ($\varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}$). Выяснить геометрический смысл ε_{ik} .

20. Доказать, что если $\hat{\alpha}$ — ортогональная матрица преобразования, то при ее транспонировании получается матрица обратного преобразования.

21. Показать, что матрица преобразования базиса координатной системы при отражении или повороте и матрица преобразования компонент вектора совпадают.

22*. Доказать, что при поворотах или отражениях четного числа координатных осей определитель преобразования равен $+1$, а при отражениях нечетного числа координатных осей этот определитель равен -1 .¹

23. Показать, что если в некоторой системе координат соответствующие компоненты двух векторов пропорциональны, то они пропорциональны в любой другой системе координат. (Такие векторы называются параллельными.)

¹Преобразования, определитель которых равен $+1$, называются собственными; преобразования с определителем -1 — несобственными.

24*. Во всех декартовых системах координат задана совокупность величин e_{ikl} , обладающих следующими свойствами: при перестановке любых двух индексов e_{ikl} меняет знак; $e_{123} = 1$.

Показать, что эта совокупность e_{ikl} образует псевдотензор III ранга (совершенно антисимметричный единичный псевдотензор III ранга).

25. Доказать, что компоненты антисимметричного тензора II ранга при вращениях преобразуются как компоненты вектора.

26. Записать выражения для компонент векторного произведения двух векторов и вихря вектора с помощью тензора e_{ikl} . Указать, как преобразуются эти величины при вращениях и отражениях.

27. Доказать равенства:

а) $e_{ikl}e_{lmn} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}$;

б) $e_{ikl}e_{klm} = 2\delta_{im}$.

28. Записать в инвариантной векторной форме:

а) $e_{inl}e_{irs}e_{lmp}e_{stp}a_n a_r b_m c_t$;

б) $e_{inl}e_{krs}e_{lmp}e_{stp}a_r a'_n b_k b'_i c_t c'_m$.

29. Показать, что $T_{ik}a_i b_k - T_{ik}a_k b_i = 2\omega \cdot (a \times b)$, где T_{ik} — произвольный тензор II ранга, a и b — векторы, ω — вектор, эквивалентный антисимметричной части T_{ik} .

30. Представить произведение $[a \cdot (b \times c)][a' \cdot (b' \times c')]$ в виде суммы членов, содержащих только скалярные произведения векторов.

УКАЗАНИЕ. Применить теорему об умножении определителей или воспользоваться псевдотензором III ранга e_{ikl} (см. задачу 24*).

31*. Показать, что единственным вектором, компоненты которого одинаковы во всех системах координат, является нулевой вектор; что всякий тензор II ранга, компоненты которого одинаковы во всех системах координат, пропорционален δ_{ik} ; тензор III ранга — e_{ikl} ; тензор IV ранга — $(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{im}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{km})$.

32*. Пусть n — единичный вектор, все направления которого в пространстве равновероятны. Найти средние значения его компонент и их произведений: n_i , $n_i n_k$, $n_i n_k n_l$, $n_i n_k n_l n_m$, пользуясь трансформационным свойством искомых величин, а не прямым вычислением соответствующих интегралов.

33. Найти усредненные по всем направлениям значения следующих выражений: $(a \cdot n)^2$, $(a \cdot n)(b \cdot n)$, $(a \cdot n)n$, $(a \times n)^2$, $(a \times n) \cdot (b \times n)$, $(a \cdot n)(b \cdot n)(c \cdot n)(d \cdot n)$, если n — единичный вектор, все направления которого равновероятны, a , b , c и d — постоянные векторы.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться результатами предыдущей задачи.

34. Составить все возможные независимые инварианты из полярных векторов \mathbf{n} , \mathbf{n}' и псевдовектора \mathbf{l} .

35. Какие независимые псевдоскаляры можно составить из двух полярных векторов \mathbf{n} , \mathbf{n}' и одного псевдовектора \mathbf{l} ? Из трех полярных векторов \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 , \mathbf{n}_3 ?

§ 2. Векторный анализ

В произвольной ортогональной системе координат q_1, q_2, q_3 квадрат элемента длины выражается формулой

$$dl^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2, \quad (\text{I.14})$$

а элемент объема — формулой

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3, \quad (\text{I.15})$$

где

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \quad (\text{I.16})$$

— функции координат (коэффициенты Ламэ). Различные дифференциальные операции записываются так:

$$\left. \begin{aligned} (\text{grad } \varphi)_i &= \frac{1}{h_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}; \\ \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right]; \\ \text{rot } \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}; \\ \Delta \varphi &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.17})$$

В формуле для $\text{rot } \mathbf{A}$ дифференциальные операторы $\frac{\partial}{\partial q_i}$, действуют на элементы нижней строки определителя.

В сферической системе координат:

$$\left. \begin{aligned}
 x &= r \sin \vartheta \cos \alpha, & y &= r \sin \vartheta \sin \alpha, & z &= r \cos \vartheta; \\
 h_r &= 1, & h_\vartheta &= r, & h_\alpha &= r \sin \vartheta; \\
 \text{grad } \varphi &= \mathbf{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\vartheta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \frac{\mathbf{e}_\alpha}{r \sin \alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}; \\
 \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha}; \\
 (\text{rot } \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\alpha \sin \vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha} \right]; \\
 (\text{rot } \mathbf{A})_\vartheta &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\alpha)}{\partial r}; \\
 (\text{rot } \mathbf{A})_\alpha &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta}; \\
 \Delta \varphi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.18})$$

В цилиндрической системе координат:

$$\left. \begin{aligned}
 x &= r \cos \alpha, & y &= r \sin \alpha, & z &= z; \\
 h_r &= 1, & h_\alpha &= r, & h_z &= 1; \\
 \text{grad } \varphi &= \mathbf{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\alpha}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \\
 \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \\
 (\text{rot } \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}; & (\text{rot } \mathbf{A})_\alpha &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}; \\
 (\text{rot } \mathbf{A})_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\alpha) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \alpha}; \\
 \Delta \varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.19})$$

При любых \mathbf{A} и φ имеют место тождества:

$$\text{rot grad } \varphi \equiv 0, \quad \text{div rot } \mathbf{A} \equiv 0, \quad \text{div grad } \varphi \equiv \Delta \varphi. \quad (\text{I.20})$$

Следующие основные интегральные теоремы позволяют преобразовывать объемные, поверхностные и контурные интегралы друг в друга.

Теорема Остроградского – Гаусса.

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{I.21})$$

где V – некоторый объем, S – замкнутая поверхность, ограничивающая этот объем.

Теорема Стокса.

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}, \quad (\text{I.22})$$

где l – замкнутый контур, S – произвольная поверхность, опирающаяся на этот контур.

В формулах (I.21) и (I.22) вектор \mathbf{A} должен быть дифференцируемой функцией координат.

36. Записать циклические компоненты¹ градиента в сферических координатах.

37. Воспользовавшись декартовыми, сферическими и цилиндрическими координатами, вычислить $\operatorname{div} \mathbf{r}$, $\operatorname{rot} \mathbf{r}$, $\operatorname{grad}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{r})$, $(\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{r}$, где \mathbf{r} – радиус-вектор, \mathbf{l} – постоянный вектор.

38. Выполняя все вычисления в сферических (или цилиндрических) координатах, найти $\operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, где $\boldsymbol{\omega}$ – постоянный вектор, направленный по оси z .

39. Доказать тождества:

а) $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi$;

б) $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \varphi$;

в) $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{A}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \operatorname{grad} \varphi$;

г) $\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}$;

д) $\operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$;

е) $\operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$.

УКАЗАНИЕ. Доказательство этих тождеств следует производить с помощью оператора ∇ , пользуясь правилами дифференцирования и перемножения векторов и не переходя к проекциям на оси координат.

¹См. задачу 10*.

40. Доказать тождества:

а) $\mathbf{C} \cdot \text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \cdot \nabla)\mathbf{A}$;

б) $(\mathbf{C} \cdot \nabla)(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\mathbf{C} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \cdot \nabla)\mathbf{A}$;

в) $(\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \text{ div } \mathbf{A}$;

г) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \text{rot } \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{C} - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{C}$;

д) $(\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B} - \mathbf{A} \text{ div } \mathbf{B}$;

е) $(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \text{ div } \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A}$.

41. Вычислить $\text{grad } \varphi(r)$; $\text{div } \varphi(r)\mathbf{r}$; $\text{rot } \varphi(r)\mathbf{r}$; $(\mathbf{l} \cdot \nabla)\varphi(r)\mathbf{r}$.

42. Найти функцию $\varphi(r)$, удовлетворяющую условию $\text{div } \varphi(r)\mathbf{r} = 0$.

43. Найти дивергенции и вихри следующих векторов: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{b}$, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$, $\varphi(r)(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$, $\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})$, где \mathbf{a} и \mathbf{b} — постоянные векторы.

44. Вычислить $\text{grad } \mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{r}$, $\text{grad } \mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{B}(r)$, $\text{div } \varphi(r)\mathbf{A}(r)$, $\text{rot } \varphi(r)\mathbf{A}(r)$, $(\mathbf{l} \cdot \nabla)\varphi(r)\mathbf{A}(r)$.

45. Вычислить $\text{grad } \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$ и $\text{rot } \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{r}}{r^3}$ (\mathbf{p} — постоянный вектор), воспользовавшись выражениями градиента и вихря в сферических координатах. Найти векторные линии для этих векторов (дать рисунок).

46. Доказать, что

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{A} \quad \text{при} \quad \mathbf{A}^2 = \text{const.}$$

47. Записать проекции вектора $\Delta \mathbf{A}$ на оси сферической системы координат.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться тождеством $\Delta \mathbf{A} = -\text{rot rot } \mathbf{A} + \text{grad div } \mathbf{A}$.

48. Записать проекции вектора $\Delta \mathbf{A}$ на оси цилиндрической системы координат.

49. Интеграл по объему $\int (\text{grad } \varphi \cdot \text{rot } \mathbf{A}) dV$ преобразовать в интеграл по поверхности.

50. Вычислить интегралы $\oint \mathbf{r}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) dS$, $\oint (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} dS$, где \mathbf{a} — постоянный вектор, \mathbf{n} — орт нормали к поверхности.

51. Интегралы по замкнутой поверхности $\oint \mathbf{n}\varphi dS$, $\oint (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) dS$, $\oint (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} dS$ (\mathbf{b} — постоянный вектор, \mathbf{n} — орт нормали) преобразовать в интегралы по объему, заключенному внутри поверхности.

УКАЗАНИЕ. Решение выполнить по образцу предыдущей задачи.

52. Воспользовавшись одним из тождеств, доказанных в предыдущей задаче, вывести закон Архимеда путем суммирования сил давления, приложенных к элементам поверхности погруженного в жидкость тела.

53*. Пусть $f(\mathbf{a}, \mathbf{r})$ удовлетворяет условию

$$f(c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{r}) = c_1 f(\mathbf{a}_1, \mathbf{r}) + c_2 f(\mathbf{a}_2, \mathbf{r}),$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, и является дифференцируемой функцией \mathbf{r} . Доказать, что если V — произвольный объем, S — ограничивающая его поверхность и \mathbf{n} — орт внешней нормали к этой поверхности, то имеет место обобщенная теорема Остроградского–Гаусса:

$$\oint f(\mathbf{n}, \mathbf{r}) dS = \int f(\nabla, \mathbf{r}) dV.$$

Оператор ∇ в подынтегральной функции $f(\nabla, \mathbf{r})$ действует на \mathbf{r} и стоит левее всех переменных.

УКАЗАНИЕ. Разложить \mathbf{n} по ортам декартовой системы координат и воспользоваться теоремой Остроградского–Гаусса:

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dV = \oint \varphi n_x dS.$$

54. Решить задачи 50 и 51 с помощью обобщенной теоремы Остроградского–Гаусса, доказанной в предыдущей задаче.

55. Интеграл по замкнутому контуру $\oint \varphi d\mathbf{l}$ преобразовать в интеграл по поверхности, опирающейся на этот контур.

56. Интеграл $\oint u df$, взятый по некоторому замкнутому контуру, преобразовать в интеграл по поверхности, опирающейся на этот контур (u, f — скалярные функции координат).

57. Доказать тождество:

$$\int (\mathbf{A} \cdot \text{rot rot } \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \text{rot rot } \mathbf{A}) dA = \oint [(\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B})] \cdot d\mathbf{S}.$$

58. Внутри объема V вектор \mathbf{A} удовлетворяет условию $\text{div } \mathbf{A} = 0$, а на границе объема (поверхность S) — условию $A_n = 0$. Доказать, что $\int_V \mathbf{A} dV = 0$.

59*. Доказать, что $\operatorname{div}_{\mathbf{R}} \int \frac{\mathbf{A}(\mathbf{r}) dV}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} = 0$, где $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — вектор, определенный в предыдущей задаче.

60. Для трехмерного тензора II ранга доказать теорему Остроградского–Гаусса:

$$\int \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} dV = \oint T_{ik} dS_i.$$

УКАЗАНИЕ. Исходить из теоремы Остроградского–Гаусса для вектора $A_i = T_{ik} a_k$, где \mathbf{a} — произвольный постоянный вектор.

61. Найти общий вид решения уравнения Лапласа для скалярной функции, зависящей только: а) от \mathbf{r} ; б) от ϑ ; в) от α (сферические координаты).

62. Найти общий вид решения уравнения Лапласа для скалярной функции, зависящей только: а) от r ; б) от α ; в) от z (цилиндрические координаты).

63. Показать, что если скалярная функция ψ является решением уравнения $\Delta\psi + k^2\psi = 0$ и \mathbf{a} — некоторый постоянный вектор, то векторные функции $\mathbf{L} = \operatorname{grad}\psi$, $\mathbf{M} = \operatorname{rot}(\mathbf{a}\psi)$, $\mathbf{N} = \operatorname{rot}\mathbf{M}$ удовлетворяют уравнению $\Delta\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = 0$.

64*. Уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a > b > c$) изображает эллипсоид с полуосями a, b, c . Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2 + \xi} + \frac{y^2}{b^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} = 1, \quad \xi \geq -c^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \eta} + \frac{y^2}{b^2 + \eta} + \frac{z^2}{c^2 + \eta} = 1, \quad -c^2 \geq \eta \geq -b^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2 + \zeta} + \frac{y^2}{b^2 + \zeta} + \frac{z^2}{c^2 + \zeta} = 1, \quad -b^2 \geq \zeta \geq -a^2$$

изображают соответственно эллипсоид, однополостной и двухполостной гиперboloиды, софокусные с первым эллипсоидом. Через каждую точку пространства проходит по одной поверхности, характеризуемой значениями ξ, η, ζ . Числа ξ, η, ζ называются эллипсоидальными координатами точки x, y, z . Найти формулы преобразования от ξ, η, ζ к x, y, z . Убедиться в ортогональности эллипсоидальной системы координат. Найти коэффициенты Ламэ и оператор Лапласа в эллипсоидальных координатах.

65*. При $a = b > c$ эллипсоидальная система координат (см. предыдущую задачу) вырождается в так называемую сплюснутую сфероидальную систему координат. Координата ζ при этом переходит в постоянную, равную $-a^2$, и должна быть заменена другой координатой. В качестве последней выбирают азимутальный угол α в плоскости xy .

Координаты ξ, η определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{a^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} &= 1, \\ \frac{r^2}{a^2 + \eta} + \frac{z^2}{c^2 + \eta} &= 1, \\ r^2 &= x^2 + y^2, \end{aligned}$$

где $\xi \geq -c^2, -c^2 \geq \eta \geq -a^2$.

Поверхности $\xi = \text{const}$ представляют собой сплюснутые эллипсоиды вращения вокруг оси z , поверхности $\eta = \text{const}$ — софокусные с ними однополостные гиперboloиды вращения (рис. 2).

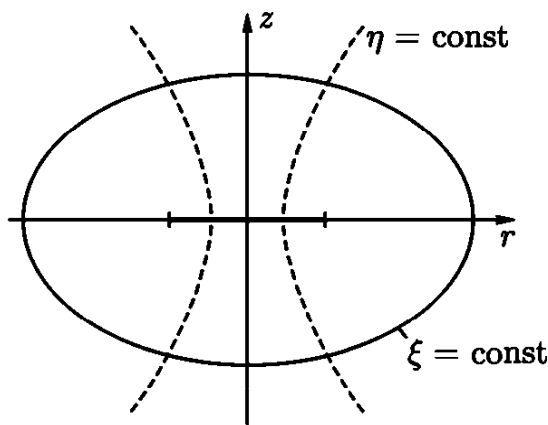


Рис. 2

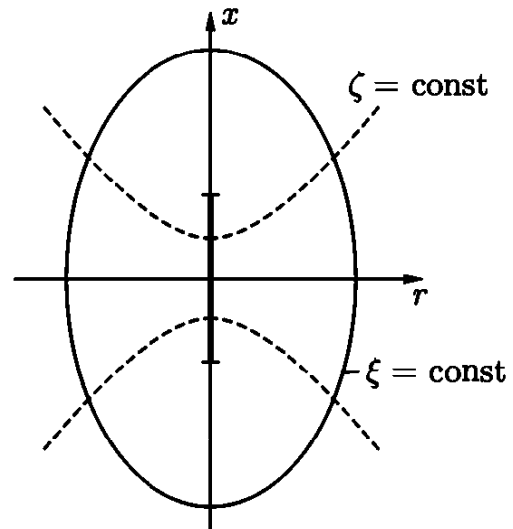


Рис. 3

Найти выражения r, z в сплюснутых сфероидальных координатах, коэффициенты Ламэ и оператор Лапласа в этих координатах.

66*. Вытянутая сфероидальная система координат получается из эллипсоидальной (см. задачу 64*) при $a > b = c$. Координата η при этом вырождается в постоянную и должна быть заменена азимутальным углом α , отсчитываемым в плоскости yz от оси y .

Координаты ξ, ζ определяются из уравнений

$$\frac{x^2}{a^2 + \xi} + \frac{r^2}{c^2 + \xi} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2 + \zeta} + \frac{r^2}{c^2 + \zeta} = 1, \quad r^2 = y^2 + z^2,$$

где $\xi \geq -b^2, -b^2 \geq \zeta \geq -a^2$.

Поверхности постоянных ξ и ζ представляют собой вытянутые эллипсоиды и двухполостные гиперboloиды вращения (рис. 3). Выразить величины x, r через ξ, ζ ; найти коэффициенты Ламэ и оператор Лапласа в переменных ξ, ζ, α .

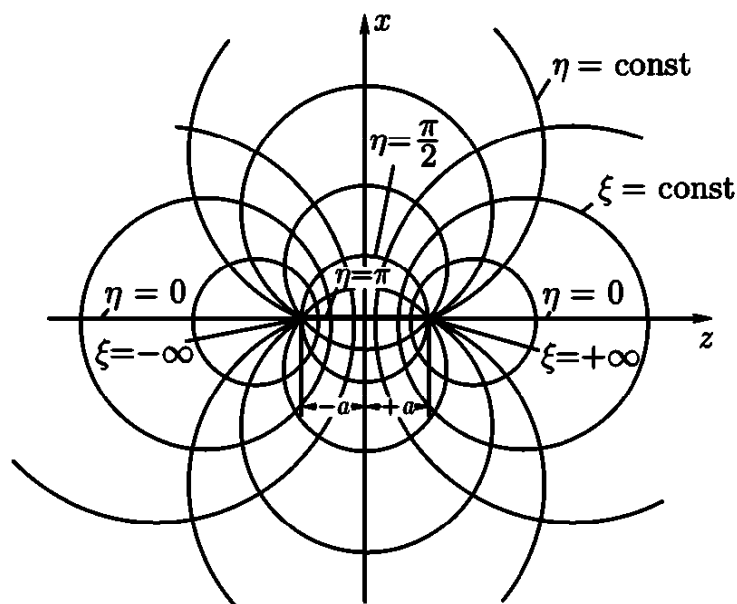


Рис. 4

67. Бисферические координаты ξ, η, α а связаны с декартовыми соотношениями:

$$x = \frac{a \sin \eta \cos \alpha}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta},$$

$$y = \frac{a \sin \eta \sin \alpha}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta},$$

$$z = \frac{a \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta},$$

где a — постоянный параметр, $-\infty < \xi < \infty, 0 < \eta < \pi, 0 < \alpha < 2\pi$.

Показать, что координатные поверхности $\xi = \text{const}$ представляют собой сферы $x^2 + y^2 + (z - a \text{cth } \xi)^2 = \left(\frac{a}{\text{sh } \xi}\right)^2$, поверхности $\eta = \text{const}$ — веретенообразные поверхности вращения вокруг оси z , уравнение которых

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a \text{ctg } \eta)^2 + z^2 = \left(\frac{a}{\sin \eta}\right)^2$$

поверхности $\alpha = \text{const}$ — полуплоскости, расходящиеся от оси z (рис. 4). Убедиться в том, что эти координатные поверхности ортогональны между собой. Найти коэффициенты Ламэ и оператор Лапласа.

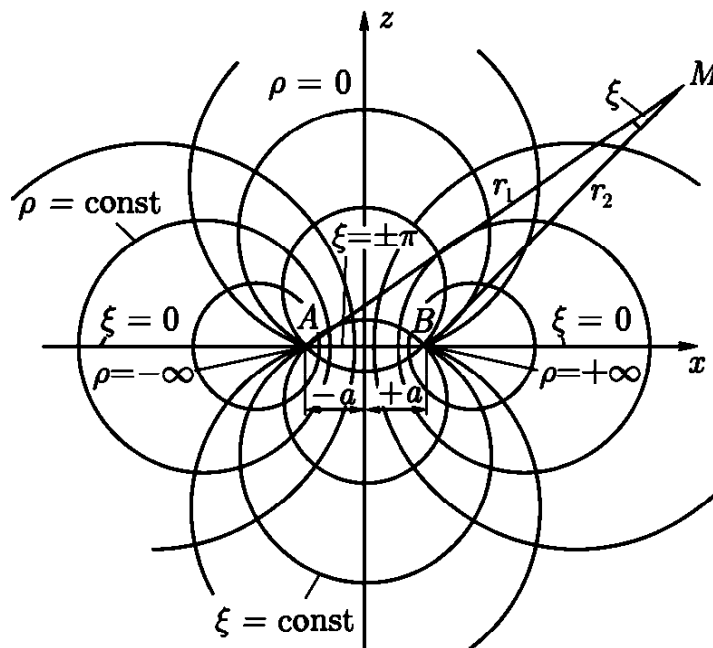


Рис. 5

68. Торидальные координаты ρ, ξ, α образуют ортогональную систему и связаны с декартовыми координатами соотношениями

$$x = \frac{a \text{sh } \rho \cos \alpha}{\text{ch } \rho - \cos \xi},$$

$$y = \frac{a \text{sh } \rho \sin \alpha}{\text{ch } \rho - \cos \xi},$$

$$z = \frac{a \sin \xi}{\text{ch } \rho - \cos \xi},$$

где a — постоянный параметр, $-\infty < \rho < \infty$, $-\pi < \xi \leq \pi$, α — азимутальный угол, изменяющийся в пределах от 0 до π .

Показать, что $\rho = \ln \frac{r_1}{r_2}$ (см. рис. 5, на котором изображены плоскости $\alpha = \text{const}$, $\alpha + \pi = \text{const}$), а величины ξ представляют собой угол между r_1 и r_2 ($\xi > 0$ при $z > 0$ и $\xi < 0$ при $z < 0$). Какой вид имеют координатные поверхности ρ и ξ ? Найти коэффициенты Ламэ.

ЛИТЕРАТУРА

Смирнов В. И. [94, 95], Кочин Н. Е. [62], Тамм И. Е. [101], Стрэттон Дж. А. [100], Гельфанд И. М. [30], Гельфанд И. М., Минлос. Р. А., Шапиро З. Я. [31], Морс Ф. М., Фешбах Г. [81], Лебедев В. П., Скальская И. П., Уфлянд Я. С. [69].

ГЛАВА II

ПОСТОЯННОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ

В этой главе содержатся задачи на определение потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ и напряженности поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ по заданному распределению зарядов, характеризуемому объемной $\rho(\mathbf{r})$, поверхностной $\sigma(\mathbf{r})$ или линейной $\kappa(\mathbf{r})$ плотностью. Распределение точечных зарядов может быть описано объемной плотностью $\rho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$, где q_i — величина i -го заряда, \mathbf{r}_i — радиус-вектор i -го заряда, $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ — δ -функция (см. приложение 1). Напряженность электрического поля удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (\text{II.1})$$

Бывает полезна интегральная форма первого из этих уравнений (электростатическая теорема Гаусса):

$$\oint_S E_n dS = 4\pi q, \quad (\text{II.2})$$

где S — некоторая замкнутая поверхность, q — полный заряд внутри этой поверхности. Потенциал и напряженность электрического поля связаны соотношениями

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad \varphi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad \varphi(\mathbf{r}_0) = 0. \quad (\text{II.3})$$

Потенциал φ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \quad (\text{II.4})$$

Потенциал непрерывен и конечен во всех точках пространства, где нет точечных зарядов, в частности, на заряженной поверхности, разделяющей

области 1 и 2, $\varphi_1 = \varphi_2$ (рис. 6). Нормальные производные φ терпят разрыв на заряженной поверхности:

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma \quad \text{или} \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma. \quad (\text{II.5})$$

Нормаль n направлена из области 1 в область 2.

На поверхности двойного электрического слоя с мощностью τ (см., например, [101])

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi\tau \quad (\text{II.6})$$

(нормаль n имеет направление от отрицательной стороны слоя к положительной).

Если распределениям зарядов ρ_1 и ρ_2 соответствуют потенциалы φ_1 и φ_2 , то потенциалом распределения $\rho = \rho_1 + \rho_2$ является $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ (принцип суперпозиции). То же справедливо для электрического поля E . В частности, принцип суперпозиции позволяет из потенциалов элементарных зарядов q/r получать путем суммирования потенциалы сложных систем зарядов:

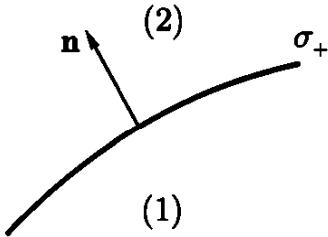


Рис. 6

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (\text{II.7})$$

В случае поверхностного или линейного распределения зарядов объемный интеграл в (II.7) заменяется соответствующим поверхностным или линейным интегралом, а в случае системы точечных зарядов — суммой по зарядам. Это замечание относится также ко всем нижеследующим формулам, в которых содержатся объемные интегралы по распределению зарядов.

В большинстве случаев прямое вычисление интеграла (II.7) затруднительно. В связи с этим часто применяется представление потенциала в виде ряда, который получается в результате разложения подынтегрального выражения по степеням x/r или x'/r и почленного интегрирования. Такое разложение можно получить как в декартовых, так и в сферических координатах.

Декартовы координаты (рис. 7). При $r > a$ (a — наибольшее расстояние зарядов системы от полюса O):

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & \frac{q}{r} - p_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{1}{r} + \frac{Q_{\alpha\beta}}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \cdot \frac{1}{r} - \\ & - \frac{Q_{\alpha\beta\gamma}}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \cdot \frac{1}{r} \dots \quad (\text{II.8}) \end{aligned}$$

Мультипольные моменты $q, p_\alpha, Q_{\alpha\beta} \dots$ выражаются объемными интегралами:

$$\left. \begin{aligned} q &= \int \rho(\mathbf{r}') dV' && \text{— полный заряд системы,} \\ p_\alpha &= \int \rho(\mathbf{r}') x'_\alpha dV' && \text{— компоненты дипольного момента,} \\ Q_{\alpha\beta} &= \int \rho(\mathbf{r}') x'_\alpha x'_\beta dV' && \text{— компоненты квадрупольного момента.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.8}')$$

Величины $q, p_\alpha, Q_{\alpha\beta} \dots$ при повороте системы координат преобразуются соответственно как скаляр, вектор, тензор II ранга и т. д. Второй и третий члены потенциала (II.8) могут быть записаны в форме

$$\varphi^{(p)} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad (\text{II.9})$$

где $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ — вектор дипольного момента системы;

$$\begin{aligned} \varphi^{(Q)} &= \frac{1}{2r^5} [(3x^2 - r^2)Q_{xx} + \\ &+ (3y^2 - r^2)Q_{yy} + (3z^2 - r^2)Q_{zz} + \\ &+ 6xyQ_{xy} + 6xzQ_{xz} + 6yzQ_{yz}]. \quad (\text{II.9}') \end{aligned}$$

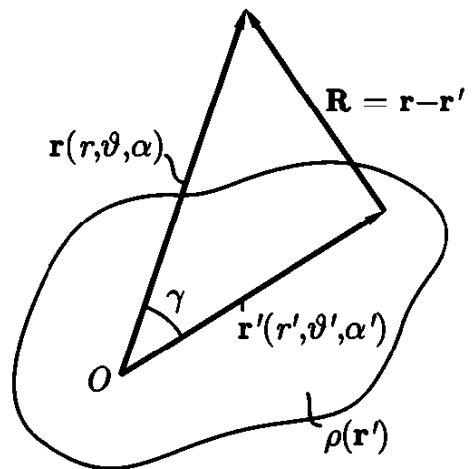


Рис. 7

Сферические координаты. Используем разложение $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$, приведенное в приложении 2 (II.2.15). Подставляя это разложение в (II.7), получим при $r > r'$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \cdot \frac{Q_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \alpha)}{r^{l+1}} \quad (r > r'), \quad (\text{II.10})$$

где Q_{lm} — мультипольный момент порядка l, m ;

$$Q_{lm} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha') dV'. \quad (\text{II.11})$$

Если $r' > r$, то в (II.11, 15) r и r' меняются местами и

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} r^l Q'_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \alpha) \quad (r < r'), \quad (\text{II.12})$$

где

$$Q'_{lm} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r'^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha') dV'. \quad (\text{II.13})$$

Если точка наблюдения \mathbf{r} находится внутри распределения зарядов (см. рис. 7), то нужно разбить область интегрирования в (II.7) на две части сферой радиуса r с центром в полюсе O . При интегрировании по области внутри сферы нужно пользоваться разложением (II.15), при интегрировании по внешней области — формулой (II.15) с заменой $r \rightleftharpoons r'$.

Реальные системы зарядов всегда ограничены, и их потенциал убывает на больших расстояниях не медленнее, чем $1/r$. Но при рассмотрении поля вблизи средней части длинного цилиндра или ограниченного плоского тела целесообразно идеализировать задачу, считая тело бесконечным. При этом потенциал не убывает на бесконечности, но он правильно описывает поле на расстояниях, малых по сравнению с размером тела.

Наглядное представление о структуре поля дают силовые линии и эквипотенциальные поверхности. Силовые линии определяются из системы дифференциальных уравнений, которая в произвольных ортогональных координатах q_1, q_2, q_3 имеет вид

$$\frac{h_1 dq_1}{E_1} = \frac{h_2 dq_2}{E_2} = \frac{h_3 dq_3}{E_3}, \quad (\text{II.14})$$

где h_i — коэффициенты Ламэ; эквипотенциальные поверхности описываются уравнением $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const}$.

Точками равновесия поля называются такие точки, находящиеся на конечном расстоянии от системы зарядов, в которых $E = 0$.

Энергия электростатического поля может быть вычислена по одной из формул:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV, \quad W = \frac{1}{2} \int \rho\varphi dV \quad (\text{II.15})$$

(эти формулы эквивалентны, если заряды сосредоточены в конечной области пространства, а интегрирование распространяется на все пространство).

Энергия взаимодействия двух систем зарядов 1 и 2 определяется выражениями:

$$U = \int \rho_1(\mathbf{r})\varphi_2(\mathbf{r}) dV = \int \frac{\rho_1(\mathbf{r}_1)\rho_2(\mathbf{r}_2) dV_1 dV_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (\text{II.16})$$

Обобщенные ponderomotorные силы могут быть получены дифференцированием U или W по соответствующим обобщенным координатам a_i :

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial a_i} \quad \text{или} \quad F_i = -\frac{\partial W}{\partial a_i}. \quad (\text{II.17})$$

Обобщенная сила положительна, если она стремится увеличить соответствующую координату.

69. Бесконечная плоская плита толщиной a равномерно заряжена по объему с плотностью ρ . Найти потенциал φ и напряженность \mathbf{E} электрического поля.

70. Заряд распределен в пространстве по периодическому закону $\rho = \rho_0 \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z$, образуя бесконечную пространственную периодическую решетку. Найти потенциал φ электрического поля.

71. Плоскость $z = 0$ заряжена с плотностью, меняющейся по периодическому закону $\sigma = \sigma_0 \sin \alpha x \sin \beta y$, где σ_0 , α , β — постоянные. Найти потенциал φ этой системы зарядов.

72. Бесконечно длинный круговой цилиндр радиуса R равномерно заряжен по объему или по поверхности так, что на единицу его длины приходится заряд κ . Найти потенциал φ и напряженность электрического поля \mathbf{E} .

73. Найти потенциал φ и напряженность \mathbf{E} электрического поля равномерно заряженной прямолинейной бесконечной нити.

74. Найти потенциал φ и напряженность \mathbf{E} электрического поля равномерно заряженного прямолинейного отрезка длиной $2a$, занимающего часть оси z от $-a$ до $+a$; заряд отрезка q .

75. Найти форму эквипотенциальных поверхностей равномерно заряженного отрезка, рассмотренного в предыдущей задаче.

76. Найти потенциал φ и напряженность \mathbf{E} электрического поля шара, равномерно заряженного по объему. Радиус шара R , заряд q .

77. Найти потенциал φ и напряженность \mathbf{E} электрического поля сферы радиуса R , равномерно заряженной по поверхности. Заряд сферы q .

78. Внутри шара радиуса R , равномерно заряженного по объему с плотностью ρ , имеется незаряженная шарообразная полость, радиус которой R_1 , а центр отстоит от центра шара на расстоянии a ($a + R_1 < R$). Найти электрическое поле \mathbf{E} в полости.

79. Пространство между двумя концентрическими сферами, радиусы которых R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), заряжено с объемной плотностью $\rho = \frac{\alpha}{r^2}$. Найти полный заряд q , потенциал φ и напряженность \mathbf{E} электрического поля. Рассмотреть предельный случай $R_2 \rightarrow R_1$, считая при этом $q = \text{const}$.

80. Найти энергию электростатического поля W для распределений заряда, указанных в задачах 76, 77, 79. Провести вычисления двумя способами (см. (II.15)).

81. Заряд распределен сферически симметричным образом: $\rho = \rho(r)$. Разбив распределение заряда на сферические слои, выразить через $\rho(r)$ потенциал φ и напряженность \mathbf{E} поля (записать φ и \mathbf{E} в виде однократного интеграла по r).

82. Используя результаты задачи 81, решить задачи 76 и 79.

83. Заряд электрона распределен в атоме водорода, находящемся в нормальном состоянии, с плотностью $\rho(\mathbf{r}) = -\frac{e_0}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}}$, $a = 0,529 \cdot 10^{-8}$ см — боровский радиус атома, $e_0 = 4,80 \cdot 10^{-10}$ CGSE — элементарный заряд. Найти потенциал φ_e и напряженность E_{er} электрического поля электронного заряда, а также полный потенциал φ и напряженность поля \mathbf{E} в атоме, считая, что протонный заряд сосредоточен в начале координат. Построить приблизительный ход величин φ и E .

УКАЗАНИЕ. Полезно воспользоваться методом решения задачи 81.

84. Рассматривая атомное ядро как равномерно заряженный шар, найти максимальное значение напряженности его электрического поля E_{\max} .

Радиус ядра $R = 1,5 \cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}}$ см, заряд Ze_0 (A — атомный вес, Z — порядковый номер, e_0 — элементарный заряд).

85. Используя результат задачи 81, решить задачу 77.

86. Плоскости двух тонких коаксиальных равномерно заряженных колец одинакового радиуса R находятся на расстоянии a друг от друга. Работа, которую надо совершить, чтобы перенести точечный заряд q из бесконечности в центр каждого из колец, равна соответственно A_1 и A_2 . Найти заряды на кольцах q_1 и q_2 .

87. Найти потенциал φ и напряженность \mathbf{E} электрического поля на оси равномерно заряженного круглого тонкого диска радиуса R ; заряд диска q . Убедиться в том, что на поверхности диска нормальная составляющая \mathbf{E} испытывает скачок $4\pi\sigma$. Рассмотреть поле на больших расстояниях от диска.

88. Тонкое круглое кольцо радиуса R состоит из двух равномерно и противоположно заряженных полуколец с зарядами q и $-q$. Найти потенциал φ и напряженность \mathbf{E} электрического поля на оси кольца и вблизи нее. Каков характер поля на больших расстояниях от кольца?

89. Выразить потенциал φ равномерно заряженного круглого тонкого кольца с зарядом q и радиусом R через полный эллиптический интеграл первого рода

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}}.$$

УКАЗАНИЕ. При выполнении интегрирования по азимуту сделать замену $\alpha' = \pi - 2\beta$.

90. Получить из общей формулы, описывающей потенциал тонкого круглого кольца (см. задачу 89), потенциал φ электрического поля: а) на оси кольца; б) на больших расстояниях от кольца; в) вблизи нити кольца.

УКАЗАНИЕ. Для случая в) воспользоваться формулами 8.113 в справочнике [90].

91. Сфера радиуса R заряжена по поверхности по закону $\sigma = \sigma_0 \cos \vartheta$. Найти потенциал φ электрического поля, используя разложение по мультиполям в сферических координатах.

92. Источники электрического поля расположены аксиально симметричным образом. Вблизи оси симметрии системы источники поля отсутствуют. Выразить потенциал φ и напряженность E электрического поля вблизи оси симметрии через значения потенциала φ и его производных на этой оси.

93. Найти потенциал φ электрического поля равномерно заряженного круглого тонкого кольца, используя разложение по мультиполям в сферических координатах. Заряд кольца q , радиуса R .

94. Найти потенциал φ электрического поля на больших расстояниях от следующих систем зарядов: а) заряды $q, -2q, q$ расположены по оси z на расстоянии a друг от друга (линейный квадруполь); б) заряды $\pm q$ расположены в вершинах квадрата со стороной a так, что соседние заряды имеют разные знаки, причем в начале координат находится заряд $+q$, а стороны квадрата параллельны осям x и y (плоский квадруполь).

95. Найти потенциал φ электрического поля на больших расстояниях от следующих систем зарядов: а) линейный октуполь (рис. 8а), б) пространственный октуполь (рис. 8б).

96. Точечный заряд q находится в точке со сферическими координатами $(r_0, \vartheta_0, \alpha_0)$. Разложить по мультиполям потенциал φ этого заряда.

97. Эллипсоид с полуосями a, b, c равномерно заряжен по объему; полный заряд эллипсоида q . Найти потенциал φ на больших расстояниях от эллипсоида с точностью до квадрупольного члена. Рассмотреть частные случаи эллипсоида вращения с полуосями¹ $a = b$ и c и шара ($a = b = c$).

УКАЗАНИЕ. При интегрировании по объему эллипсоида воспользоваться обобщенными сферическими координатами $x = ar \sin \vartheta \cos \alpha$, $y = br \sin \vartheta \sin \alpha$, $z = cr \cos \vartheta$.

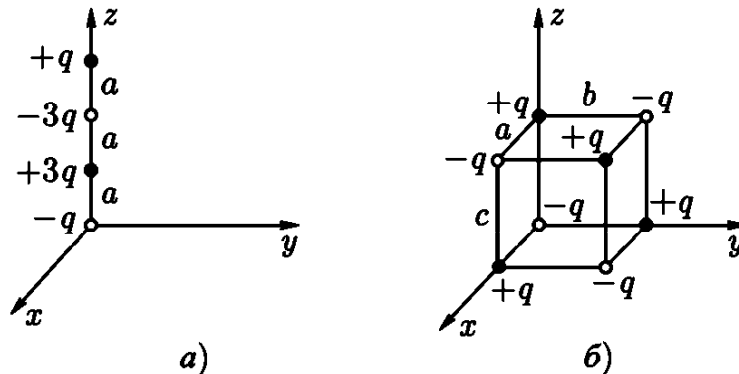


Рис. 8

98. Два коаксиальных равномерно заряженных тонких круглых кольца с радиусами a и b ($a > b$) и зарядами q и $-q$ соответственно, расположены в одной плоскости. Найти потенциал φ на большом расстоянии от этой системы зарядов. Сравнить его с потенциалом линейного квадрупольного (см. задачу 94).

99*. Показать, что распределение заряда $\rho = -(\mathbf{p}' \cdot \nabla)\delta(\mathbf{r})$ описывает элементарный диполь с моментом \mathbf{p}' , помещенный в начало координат. Пояснить результат, воспользовавшись наглядным представлением δ -функции (приложение 1).

УКАЗАНИЕ. Исходить из разложения по мультиполям в декартовых координатах.

100. Доказать, что распределение зарядов

$$\rho = q \prod_{i=1}^n (\mathbf{a}_i \cdot \nabla) \delta(\mathbf{r})$$

¹ Атомные ядра, обладающие квадрупольным моментом, можно в некотором приближении рассматривать как эллипсоиды вращения

создает потенциал

$$\varphi(\mathbf{r}) = q \prod_{i=1}^n (\mathbf{a}_i \cdot \nabla) \frac{1}{r}.$$

101. Используя результаты задачи 94 и учитывая, что квадрупольный момент является тензором Π ранга, найти поле φ на большом расстоянии от линейного квадруполя, направление оси которого определяется полярными углами γ, β . Каким еще способом можно решить задачу?

102. Пространственный октуполь (рис. 8б) повернут вокруг оси z на угол β . Найти поле φ на больших от него расстояниях путем преобразования компонент октупольного момента. Сравнить с другими методами решения.

103. Найти потенциал φ электрического поля на больших расстояниях от плоского квадруполя, расположенного в плоскости, проходящей через ось z (рис. 9). Компоненты квадрупольного момента получить непосредственно, а также путем поворота плоского квадруполя, рассмотренного в задаче 94б).

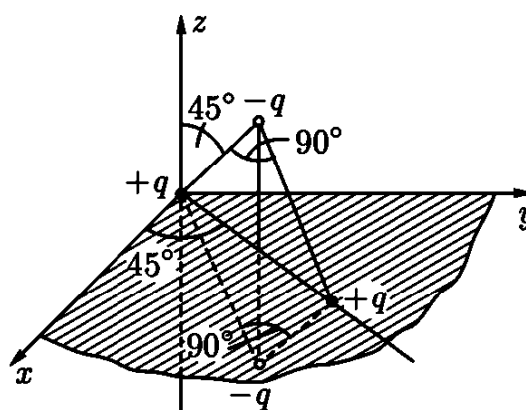


Рис. 9

104. Шар радиуса R равномерно поляризован, дипольный момент единицы объема \mathbf{P} . Найти электрическое поле φ .

105. Двумерное распределение заряда характеризуется плотностью $\rho(\mathbf{r})$, не зависящей от координаты z . Если $\rho(r) \neq 0$ в ограниченной области S плоскости xy , то можно разложить потенциал φ вне распределения зарядов по мультиполям (двумерные мультиполи). Найти это разложение.

УКАЗАНИЕ. Использовать результат задачи 73 и принцип суперпозиции, а также разложение $\ln(1 + u^2 - 2u \cos \varphi) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{k} u^k, |u| < 1$ (см. [90], 1.514).

106. Разложить по двумерным мультиполям потенциал φ электрического поля линейного заряда κ . Заряженная линия параллельна оси z и проходит через точку (r_0, α_0) плоскости xy .

107. Найти потенциал φ электрического поля на большом расстоянии от двух близких параллельных линейных зарядов κ и $-\kappa$, расположенных на расстоянии a друг от друга (двумерный диполь).

108. На диске радиуса R имеется двойной электрический слой мощностью $\tau = \text{const}$. Найти потенциал φ и напряженность \mathbf{E} электрического поля на оси симметрии, перпендикулярной плоскости диска.

109. Найти напряженность \mathbf{E} электрического поля двойного электрического слоя мощностью $\tau = \text{const}$, занимающего полуплоскость $y = 0$, $x > 0$. Сравнить с магнитным полем бесконечного прямолинейного тока, текущего вдоль оси z . Решить задачу двумя способами: а) прямым суммированием напряженностей, создаваемых малыми элементами двойного слоя; б) определив сначала электростатический потенциал φ .

110. Найти уравнения силовых линий системы двух точечных зарядов: заряда $+q$, находящегося в точке $z = a$, и заряда $\pm q$, находящегося в точке $z = -a$; начертить силовые линии. Имеются ли в поле точки равновесия?

УКАЗАНИЕ. Вследствие симметрии силовые линии располагаются в плоскостях $\alpha = \text{const}$, а E_z и E_r не зависят от α (цилиндрические координаты). Переменные в дифференциальном уравнении силовых линий (II.14) разделяются после замены:

$$u = \frac{z + a}{r}, \quad v = \frac{z - a}{r}.$$

111. Используя результаты предыдущей задачи, найти уравнение силовых линий точечного диполя в начале координат.

112. Найти уравнение силовых линий линейного квадруполь (см. задачу 94а) и нарисовать примерную картину силовых линий.

113. Доказать, что поток напряженности электрического поля точечного заряда q через поверхность S равен $q\Omega$. Здесь Ω — телесный угол, под которым виден контур поверхности S из точки, где находится заряд q ($\Omega > 0$, если из этой точки видна отрицательная сторона поверхности).

114. Заряд q_1 находится на оси симметрии круглого диска радиуса a на расстоянии a от плоскости диска. Какой величины q_2 заряд нужно поместить в симметричную относительно диска точку, чтобы поток электрического поля через диск в сторону заряда q_1 был равен Φ ?

115*. Найти уравнение силовых линий системы n коллинеарных зарядов q_1, q_2, \dots, q_n расположенных в точках z_1, z_2, \dots, z_n оси z , не интегрируя дифференциальных уравнений силовых линий. Применить теорему, доказанную в задаче 113 к силовой трубке, образованной вращением силовой линии вокруг оси симметрии.

116. Используя результат предыдущей задачи, найти уравнение силовых линий системы двух точечных зарядов (ср. с задачей 110) и линейного квадруполь (ср. с задачей 112).

117. Равномерно заряженные нити, несущие заряды κ_1 и $-\kappa_2$ на единицу длины, параллельны между собой и отстоят друг от друга на расстояние h . Найти, при каком соотношении между κ_1 и κ_2 в числе поверхностей равного потенциала этой системы будут круговые цилиндры конечного радиуса. Определить радиусы и положение осей цилиндров.

118. Точечные заряды q_1 и $-q_2$ находятся на расстоянии h друг от друга. Показать, что в числе поверхностей равного потенциала этой системы имеется сфера конечного радиуса. Определить координаты ее центра и радиус. Найти значение потенциала φ на поверхности этой сферы, если $\varphi(\infty) = 0$.

119. Каким распределением зарядов создается потенциал, имеющий в сферических координатах вид: $\varphi(\mathbf{r}) = qe^{-\alpha r}/r$, где α, q — постоянные.

120. Каким должно быть распределение зарядов, чтобы созданный им потенциал имел в сферических координатах вид $\varphi(r) = \frac{e_0}{a} e^{-2r/a} \left(\frac{a}{r} + 1 \right)$, где e_0, a — постоянные.

121. Найти энергию взаимодействия U электронного облака с ядром в атоме водорода. Заряд электрона распределен в атоме с объемной плотностью $\rho(r) = -\frac{e_0}{\pi a^3} e^{-2r/a}$, где e_0 — элементарный заряд (ср. с задачей 83), a — постоянная (боровский радиус атома).

122. В некотором приближении можно считать, что электронные облака обоих электронов в атоме гелия имеют одинаковый вид и характеризуются объемной плотностью $\rho = -\frac{8e_0}{\pi a^3} e^{-4r/a}$, где a — боровский радиус атома, e_0 — элементарный заряд. Найти энергию взаимодействия U электронов в атоме гелия в этом приближении (нулевое приближение теории возмущений).

123. Центры двух шаров с зарядами q_1 и q_2 находятся на расстоянии a друг от друга ($a > R_1 + R_2$, где R_1, R_2 — радиусы шаров). Заряды распределены сферически симметричным образом. Найти энергию взаимодействия U шаров и действующую между ними силу F .

124. Мыльный пузырь, висящий на открытой трубке, стягивается под действием поверхностного натяжения (коэффициент поверхностного натяжения α). Считая, что диэлектрическая прочность воздуха (напряженность поля, при которой происходит пробой) равна E_0 , выяснить, можно ли сильно заряжая пузырь предотвратить его сжатие. Каков минимальный равновесный радиус R пузыря?

125*. Два параллельных коаксиальных тонких кольца с радиусами a и b несут на себе равномерно распределенные заряды q_1 и q_2 . Расстояние между плоскостями колец c . Найти энергию взаимодействия U колец и действующую между ними силу F .

126. Найти силу \mathbf{F} и вращательный момент \mathbf{N} , приложенные к электрическому диполю с моментом \mathbf{p} в поле точечного заряда q .

127. Диполь с моментом \mathbf{p}_1 находится в начале координат, а другой диполь с моментом \mathbf{p}_2 — в точке с радиусом-вектором \mathbf{r} . Найти энергию взаимодействия U этих диполей и действующую между ними силу \mathbf{F} . При какой ориентации диполей эта сила максимальна?

128. Система зарядов характеризуется объемной плотностью $\rho(\mathbf{r})$ и занимает ограниченную область в окрестности некоторой точки O . Система помещена во внешнее электрическое поле, которое в окрестности этой точки может быть представлено в виде

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} a_{lm} r^l Y_{lm}(\vartheta, \alpha).$$

Найти энергию взаимодействия системы U с внешним полем φ_1 , выразив ее через a_{lm} и мультипольные моменты Q_{lm} системы (ср. с задачей 166*).

ЛИТЕРАТУРА

Тамм И. Е. [101], Абрагам–Беккер [1], Джексон Дж. [52], Френкель Я. И. [111], Стрэттон Дж. А. [100], Смайт В. [93], Гуревич Л. Э. [49], Пановский В., Филипс М. [86].

ГЛАВА III

ЭЛЕКТРОСТАТИКА ПРОВОДНИКОВ И ДИЭЛЕКТРИКОВ

§ 1. Основные понятия и методы электростатики

Электростатическое поле в диэлектрике характеризуется вектором напряженности электрического поля \mathbf{E} и вектором электрической индукции \mathbf{D} , которые удовлетворяют уравнениям:

$$\text{или} \quad \left. \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \oint_l E_i dl = 0, \\ \text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \oint_S D_n dS = 4\pi q, \end{array} \right\} \quad (\text{III.1})$$

где ρ — плотность свободных зарядов в диэлектрике, q — полный свободный заряд, заключенный внутри поверхности S . Плотность связанных зарядов в диэлектрике можно выразить через вектор поляризации \mathbf{P} (электрический дипольный момент единицы объема диэлектрика, создаваемый связанными зарядами):

$$\rho_{\text{св}} = -\text{div } \mathbf{P}. \quad (\text{III.2})$$

Вектор поляризации \mathbf{P} выражается через \mathbf{E} и \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}. \quad (\text{III.3})$$

Для изотропных диэлектриков в достаточно слабых полях

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \quad (\text{III.4})$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость среды. В анизотропных диэлектриках ϵ — тензор II ранга, т. е.

$$D_i = \epsilon_{ik} E_k, \quad (\text{III.5})$$

(суммирование по k). Для описания поля удобно пользоваться скалярной величиной — потенциалом φ :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \varphi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad (\text{III.6})$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения, $\varphi(\mathbf{r}_0) = 0$.

Потенциал удовлетворяет уравнению

$$\text{div}(\varepsilon \text{grad } \varphi) = -4\pi\rho, \quad (\text{III.7})$$

которое в тех областях, где диэлектрик однороден, сводится к уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \quad (\text{III.8})$$

На поверхностях раздела сред с разными диэлектрическими проницаемостями должны выполняться граничные условия¹

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \quad (\text{III.9})$$

или

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma. \quad (\text{III.10})$$

Орт нормали \mathbf{n} проведен из первой среды во вторую; τ — орт, касательный к поверхности, σ — поверхностная плотность свободных зарядов. Поверхностная плотность связанных зарядов $\sigma_{\text{св}}$ на границах раздела определяется формулой

$$\sigma_{\text{св}} = P_{1n} - P_{2n}. \quad (\text{III.11})$$

Основная задача электростатики — нахождение потенциала φ электрического поля. Она может быть решена разными методами. Основным методом является решение дифференциальных уравнений (III.7) или (III.8) с граничными условиями (III.9) или (III.10). Иногда удается подобрать такую систему фиктивных точечных зарядов, поле которой в рассматриваемой области удовлетворяет как дифференциальному уравнению, так и граничным условиям (метод изображений). В ряде случаев удается найти систему изображений простым подбором (см., например, далее, задачи 142, 146, 153*, 155).

¹Граничные условия в форме (III.9) имеют место как в изотропных, так и в анизотропных средах.

Внутри проводников, находящихся в постоянном электрическом поле, $E = 0$. Поэтому граничные условия на поверхности проводника имеют вид:

$$E_{\tau} = 0, \quad \varphi = \text{const.} \quad (\text{III.12})$$

Если некоторая область пространства занята диэлектриком с проницаемостью ϵ , и известно электростатическое поле во всем пространстве, то при $\epsilon \rightarrow \infty$ это поле принимает такой же вид, какой оно имело бы, если бы данная область была занята проводником.

Задача об определении электрического поля, создаваемого заданной ограниченной системой заряженных проводников, находящихся в диэлектрике, имеет единственное решение, если известен либо полный заряд каждого проводника, либо его потенциал. В первом из этих случаев, наряду с условиями (III.12) нужно использовать граничное условие

$$q = \oint_S \sigma dS = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \quad (\text{III.13})$$

где q — заряд проводника, а интеграл берется по поверхности проводника.

Емкостью C конденсатора называется отношение заряда на одной из его обкладок (первой) к разности потенциалов между обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (\text{III.14})$$

Емкостью уединенного проводника называется отношение заряда проводника к его потенциалу (при этом нужно считать, что потенциал $\varphi = 0$ на бесконечности).

Энергия электростатического поля, локализованная в объеме V , выражается интегралом по этому объему:

$$W = \int \omega dV, \quad (\text{III.15})$$

где $\omega = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}/8\pi$ — плотность энергии поля.

Энергия W электростатического поля зависит от обобщенных координат α , характеризующих взаимное расположение заряженных тел. Соответствующие обобщенные ponderomotorные силы могут быть получены как производные по координатам α от энергии W :

$$F_{\alpha} = -\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)_q = \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)_V. \quad (\text{III.15}')$$

При постоянных зарядах q проводников следует пользоваться первым из этих выражений, при постоянных потенциалах V — вторым.

Если в изотропной диэлектрической среде с проницаемостью ε_1 имелось сначала электрическое поле \mathbf{E}_1 , в которое затем было внесено диэлектрическое тело (объем тела V , диэлектрическая проницаемость ε_2), то энергия электростатического поля меняется на величину

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 dV, \quad (\text{III.16})$$

где \mathbf{E}_2 — электрическое поле после внесения диэлектрического тела (источники поля \mathbf{E}_1 при этом поддерживаются неизменными). Величину U можно рассматривать как энергию взаимодействия диэлектрического тела с внешним полем \mathbf{E}_1 (см. [76], стр. 108).

Если диэлектрик изотропен и его диэлектрическая проницаемость зависит только от плотности массы τ , то электрическое поле действует на диэлектрик с силой, объемная плотность которой выражается формулой

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} - \frac{1}{8\pi} E^2 \text{grad} \varepsilon + \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left(E^2 \frac{d\varepsilon}{d\tau} \tau \right). \quad (\text{III.17})$$

Объемные силы, действующие на свободные и связанные заряды в некотором объеме V , могут быть заменены эквивалентной системой поверхностных натяжений, приложенных к поверхности S этого объема:

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f} dV = \oint_S \mathbf{T}_n dS, \quad (\text{III.18})$$

где \mathbf{T}_n — поверхностная сила, приложенная к единичной площадке с внешней нормалью \mathbf{n} .

Поверхностные натяжения описываются тензором натяжений T_{ik} . Величина \mathbf{T}_n в (III.18) представляет собой проекцию T_{ik} на направление внешней нормали \mathbf{n} к элементу dS :

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_n)_i &= T_{ik} n_k, \\ T_{ik} &= \frac{\varepsilon}{4\pi} E_i E_k - \frac{1}{8\pi} E^2 \left(\varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau \right) \delta_{ik}. \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Член в (III.17) и (III.19), содержащий $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tau$ (стрикционный член), вообще говоря, не мал. Однако при вычислении равнодействующей сил, приложенных к диэлектрическому телу, этот член не дает вклада и может быть

отброшен (см., например, [77], § 34 и задачи 140, 141). В этом случае можно вместо тензора натяжений (III.19) использовать более простой (максвелловский) тензор

$$\mathbf{T}'_{\mathbf{n}} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left(E_n \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{n} E^2 \right). \quad (\text{III.20})$$

К единице поверхности проводника в электростатическом поле приложена сила

$$\mathbf{f}_{\text{пов}} = \mathbf{T}'_{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\sigma \mathbf{E}}{2}. \quad (\text{III.21})$$

В диэлектрической жидкости, находящейся в равновесии в электрическом поле, электрические натяжения уравниваются гидростатическим давлением. Обозначив через $p(\tau)$ давление в жидкости — оно определяется значением ее плотности τ — получим условие равновесия:

$$p\mathbf{n} + \mathbf{T}_{\mathbf{n}} = \text{const}. \quad (\text{III.22})$$

В частности, вблизи границы жидкости с атмосферой ($\varepsilon = 1$) давление в жидкости $p(\tau)$ больше, чем атмосферное давление, на величину

$$p(\tau) - p_{\text{атм}} = \frac{\tau E^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} - \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} (\varepsilon E_n^2 + E_t^2), \quad (\text{III.23})$$

где \mathbf{E} — напряженность электрического поля в жидкости (E_n — нормальная, E_t — касательная составляющие \mathbf{E}). Уравнением (III.23) определяется зависимость плотности жидкости вблизи ее поверхности от напряженности электрического поля. Давление внутри жидкости (газа) выражается формулой

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\tau(p) \frac{\partial \varepsilon(p)}{\partial p}} = \frac{E^2}{8\pi} \quad (\text{III.24})$$

(p_0 — давление при $E = 0$).

Если жидкость несжимаема, то

$$p - p_0 = \frac{\tau E^2}{8\pi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}. \quad (\text{III.25})$$

129. Точечный заряд q расположен на плоской границе раздела двух однородных бесконечных диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2 . Найти потенциал φ напряженность \mathbf{E} и индукцию \mathbf{D} электрического поля.

130. От некоторой прямой, на которой находится точечный заряд q , расходятся веерообразно три полуплоскости, образующие три двугранных угла $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$). Пространство внутри каждого из углов заполнено однородным диэлектриком с проницаемостью соответственно $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. Определить потенциал φ , напряженность E и индукцию D электрического поля.

131. Центр проводящего шара радиуса a , заряд которого q , находится на плоской границе раздела двух бесконечных однородных диэлектриков с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Найти потенциал φ электрического поля, а также распределение заряда σ на шаре.

132. Пространство между обкладками сферического конденсатора частично заполнено диэлектриком, расположенным внутри телесного угла Ω с вершиной в центре обкладок. Радиусы обкладок a и b , проницаемость диэлектрика σ . Найти емкость C конденсатора.

133. Внутри сферического конденсатора с радиусами обкладок a и b диэлектрическая проницаемость меняется по закону

$$\epsilon(r) = \begin{cases} \epsilon_1 = \text{const} & \text{при } a \leq r < c, \\ \epsilon_2 = \text{const} & \text{при } c \leq r \leq b, \end{cases}$$

где $a < c < b$.

Найти емкость C конденсатора, распределение связанных зарядов $\sigma_{\text{св}}$ и полный связанный заряд в диэлектрике.

134. Сферический конденсатор с радиусами обкладок a и b заполнен диэлектриком, проницаемость которого зависит от расстояния до центра r по закону $\epsilon(r) = \epsilon_0 a^2 / r^2$. Показать, что емкость такого конденсатора равна емкости плоского конденсатора, заполненного однородным диэлектриком с проницаемостью ϵ_0 , у которого площадь обкладки $4\pi a^2$, расстояние между обкладками $b - a$ (краевым эффектом пренебречь).

135. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком, проницаемость которого изменяется по закону $\epsilon = \epsilon_0(x + a)/a$, где a — расстояние между обкладками, ось x направлена перпендикулярно обкладкам, площадь которых S . Пренебрегая краевым эффектом, найти емкость C такого конденсатора и распределение в нем связанных зарядов, если к обкладкам приложена разность потенциалов V .

136. а) С какой силой f_0 на единицу площади притягиваются друг к другу в вакууме обкладки плоского конденсатора, если расстояние между ними a , разность потенциалов V ; б) какое новое значение f примет эта сила, если заряженный конденсатор отделить от батареи, а потом либо наполнить

его жидким диэлектриком с проницаемостью ϵ , либо вставить в него плитку из твердого диэлектрика с тем же ϵ , толщина которой чуть-чуть меньше a , так что она не касается обкладок; в) какова будет сила f притяжения обкладок, если сначала либо залить конденсатор жидким диэлектриком, либо вставить в него плитку из диэлектрика, а потом зарядить?

137. Обкладки плоского конденсатора находятся на расстоянии h_1 друг от друга и имеют форму прямоугольников со сторонами a и b . Между пластинами параллельно им помещена плитка из диэлектрика ϵ , имеющая форму параллелепипеда с толщиной h_2 и основанием $a \times b$. Плитка не полностью вставлена в конденсатор — внутри него находится часть x стороны a . Найти силу F , с которой плитка втягивается в конденсатор, в двух случаях: а) на обкладках поддерживается постоянная разность потенциалов V ; б) постоянен заряд q обкладок. Краевые эффекты не учитывать.

138*. Плоский конденсатор погружен в несжимаемую жидкость с диэлектрической проницаемостью ϵ и плотностью τ так, что его обкладки расположены вертикально. Расстояние между ними d , разность потенциалов V . Определить высоту h поднятия жидкости в конденсаторе.

УКАЗАНИЕ. Применить формулы (III.23) и (III.25).

139. Как направлено максвеллово натяжение T'_n , действующее на площадку dS , нормаль n к которой составляет угол ϑ с направлением поля E ? Какова величина T'_n ? Как направлено стрикционное натяжение T''_n ?

140. Два одинаковых точечных заряда q находятся в однородном жидком диэлектрике ϵ на расстоянии a друг от друга. Вычислить помощью максвеллова или полного тензора натяжений силу F , действующую на каждый из зарядов. Выяснить, из каких составляющих складывается сила электрического взаимодействия зарядов $\frac{q^2}{a^2\epsilon}$. Для сравнения вычислить силы, приложенные: а) к плоскости симметрии, перпендикулярной линии, соединяющей заряды; б) к поверхности малой сферы, в центре которой находится один из зарядов.

141. Незаряженная проводящая сфера радиуса R с массой m плавает в жидкости с диэлектрической проницаемостью ϵ и плотностью τ , погружившись в нее на четверть своего объема. До какого потенциала φ_0 нужно зарядить сферу, чтобы она погрузилась наполовину? Решить задачу: а) с использованием тензора натяжений Максвелла; б) с использованием полного тензора натяжений, включающего стрикционный член.

142. Точечный заряд q находится в точке A на расстоянии a от плоской границы раздела двух бесконечно протяженных однородных диэлектриков

с проницаемостями ε_1 и ε_2 (рис. 10). Найти потенциал φ электрического поля методом изображений.

УКАЗАНИЕ. Решение искать в виде

$$\varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r_1} - \frac{q'}{\varepsilon_1 r_2} \quad \text{при } z \geq 0,$$

$$\varphi_2 = \frac{q''}{\varepsilon_2 r_1} \quad \text{при } z < 0,$$

где $-q'$ и q'' — искомые эффективные заряды, расположенные соответственно в точках B и A , r_1 и r_2 указаны на рисунке.

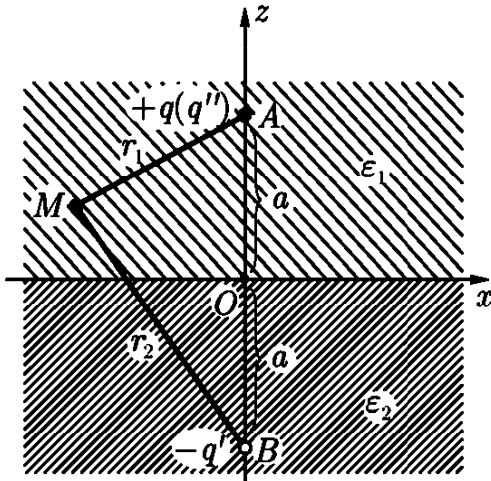


Рис. 10

143. Найти плотность $\sigma_{\text{св}}$ связанных поверхностных зарядов, наведенных на плоской границе раздела двух однородных диэлектриков ε_1 и ε_2 точечным зарядом q (см. задачу 142). Какой результат получится при $\varepsilon_2 \rightarrow \infty$, каков его физический смысл?

144. Найти силу F , приложенную к точечному заряду в задаче 142 (сила электрического изображения). Решить задачу несколькими способами, в частности с помощью тензора натяжений Максвелла. Если заряд способен двигаться через диэлектрики, описать качественно характер этого движения.

145*. Два однородных диэлектрика с проницаемостями ε_1 и ε_2 заполняют все пространство, соприкасаясь вдоль бесконечной плоскости. Два заряда q_1 и q_2 находятся на прямой, перпендикулярной к этой плоскости, на равных расстояниях a по разные стороны от нее. Найти силы F_1 и F_2 , действующие на каждый из зарядов. Чем объясняется неравенство этих сил?

146. Точечный заряд q находится в однородном диэлектрике на расстоянии a от плоской границы бесконечно протяженного проводника. Найти электрическое поле φ в диэлектрике, распределение σ индуцированных зарядов на металле и силу F , действующую на заряд q .

147. Двугранный угол между двумя заземленными проводящими плоскостями равен α_0 . Внутри угла находится точечный заряд q . Найти методом электрических изображений электрическое поле. Рассмотреть случаи $\alpha_0 = 90^\circ$, $\alpha_0 = 60^\circ$ и $\alpha_0 = 45^\circ$.

148. Электрический диполь с моментом \mathbf{p} находится в однородном диэлектрике вблизи плоской границы бесконечно протяженного проводника. Найти потенциальную энергию взаимодействия U диполя с индуцированными зарядами, силу \mathbf{F} и вращательный момент \mathbf{N} , приложенные к диполу.

149*. Однородная сфера радиуса a с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 , погружена в однородный неограниченный диэлектрик ϵ_2 . На большом расстоянии от сферы в диэлектрике имеется однородное электрическое поле, напряженность которого \mathbf{E}_0 . Найти поле φ во всем пространстве. Построить картину силовых линий для двух случаев: $\epsilon_1 > \epsilon_2$ и $\epsilon_1 < \epsilon_2$; найти распределение связанных зарядов.

150. Неограниченный диэлектрик был сначала однороден и равномерно поляризован (вектор поляризации $\mathbf{P} = \text{const}$). Затем в нем вырезали сферическую полость. Определить электрическое поле \mathbf{E} в полости в двух случаях: а) если при образовании полости поляризация в окружающем диэлектрике не изменилась¹; б) если вследствие изменения поля поляризация изменяется ($\mathbf{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \mathbf{E}$).

151. Незаряженный металлический шар радиуса R вносится в электрическое поле, которое в отсутствие шара было однородным и равным \mathbf{E}_0 . Диэлектрическая проницаемость окружающей среды $\epsilon_0 = \text{const}$. Определить результирующее поле φ и плотность поверхностных зарядов σ на шаре.

152*. Два одинаковых точечных заряда $q_1 = q_2 = q$ находятся на расстоянии a друг от друга в твердом диэлектрике с проницаемостью ϵ_1 . Заряды расположены в центрах малых сферических полостей радиуса R . Найти силы, действующие на заряды. Сравнить с электрическими натяжениями, приложенными к плоскости симметрии, перпендикулярной линии, соединяющей заряды.

153*. Проводящий шар радиуса R находится в поле точечного заряда q , отстоящего от центра шара на расстояние $a > R$. Система погружена в однородный диэлектрик с проницаемостью ϵ . Найти потенциал поля φ и распределение σ индуцированных зарядов на шаре, если задан а) потенциал шара V (на бесконечности $\varphi = 0$); б) заряд шара Q . Представить потенциал в виде суммы потенциалов нескольких точечных зарядов-изображений.

¹Это имеет место, если диэлектрик («электрет») состоит из полярных молекул, ориентация которых фиксирована.

УКАЗАНИЕ. Использовать решение уравнения Лапласа в виде ряда по шаровым гармоникам (приложение 2) и разложение поля точечного заряда, полученное в задаче 96.

154. В проводнике с потенциалом V имеется сферическая полость радиуса R , заполненная диэлектриком с проницаемостью ϵ . На расстоянии a от центра полости ($a < R$) находится точечный заряд q . Определить поле в полости. Найти эквивалентную систему зарядов-изображений.

155. Заземленная проводящая плоскость имеет выступ в форме полусферы радиуса a . Центр сферы лежит на плоскости. На оси симметрии системы, на расстоянии $b > a$ от плоскости находится точечный заряд q . Используя метод изображений, найти поле φ , а также заряд q' , индуцированный на выступе.

156. Проводящий шар радиуса R_1 находится в однородном диэлектрике с проницаемостью ϵ_1 . Внутри шара имеется сферическая полость радиуса R_2 , заполненная однородным диэлектриком с проницаемостью ϵ_2 . В полости на расстоянии a от ее центра ($a < R_2$) расположен точечный заряд q . Найти поле φ во всем пространстве.

157*. Диэлектрический шар радиуса R с проницаемостью ϵ_1 находится в однородном диэлектрике с проницаемостью ϵ_2 . На расстоянии $a > R$ от центра шара расположен точечный заряд q . Найти поле φ во всем пространстве и получить соответствующим предельным переходом поле проводящего шара; найти также силу, действующую на заряд q вследствие созданной им поляризации шара. Как изменится эта сила, если поместить симметрично относительно центра диэлектрического шара другой такой же точечный заряд?

158. Точечный заряд q находится внутри диэлектрического шара радиуса R с проницаемостью ϵ_1 на расстоянии a от центра шара. Диэлектрическая проницаемость среды вне шара равна ϵ_2 . Найти поле φ во всем пространстве. Рассмотреть, в частности, случай $a = 0$ (заряд в центре шара).

159*. Изолированная металлическая сфера радиуса a находится внутри полый металлической сферы радиуса b . Расстояние между центрами сфер равно c , причем $c \ll a$, $c \ll b$. Полный заряд внутренней сферы равен q . Определить распределение заряда σ на внутренней сфере и действующую на нее силу F с точностью до членов, линейных по c .

160. Сферический конденсатор образован двумя неконцентрическими сферами (см. предыдущую задачу). Вычислить поправку к емкости ΔC , вызванную отклонением от концентричности, в первом исчезающем приближении.

161. Найти энергию U и силу F взаимодействия точечного заряда q с заземленным проводящим шаром радиуса R . Заряд находится на расстоянии a от центра шара. Система помещена в однородной диэлектрической среде с проницаемостью ϵ .

162. Точечный заряд q находится в диэлектрике на расстоянии a от центра проводящей изолированной сферы радиуса R . Заряд сферы Q . Найти энергию U и силу F взаимодействия заряда со сферой.

163. Каким условиям должен удовлетворять пробный заряд q (в смысле его величины и положения в пространстве), чтобы можно было с его помощью исследовать поле системы зарядов, находящихся на проводящих и диэлектрических телах, в частности, поле заряженного шара в однородном диэлектрике?

164*. Электрический диполь p находится в однородном диэлектрике на расстоянии r от центра заземленного проводящего шара радиуса R . Найти систему изображений, эквивалентную индуцированным зарядам, энергию взаимодействия U диполя с шаром, силу F и вращательный момент N , приложенные к диполю. Рассмотреть предельный случай $r \rightarrow R$ ($r > R$).

165. В проводнике вырезана сферическая полость радиуса R . В центре полости находится электрический диполь с моментом p . Найти распределение σ зарядов, индуцированных на поверхности полости. Какое поле E' создается в полости этими зарядами?

166*. В однородном диэлектрике с проницаемостью ϵ имеется электрическое поле, потенциал которого в окрестности некоторой точки O может быть представлен в виде

$$\varphi_1 = \sum_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} a_{lm} r^l Y_{lm}(\vartheta, \alpha).$$

Пусть затем в окрестности точки O нарушена однородность и нейтральность диэлектрика (например, туда помещен проводник, вообще говоря, заряженный, или диэлектрик с проницаемостью $\epsilon_1 \neq \epsilon$). Вследствие этого, потенциал электрического поля вне области неоднородности примет теперь вид $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где

$$\varphi_2 = \sum_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \epsilon^{-1} r^{-(l+1)} Q_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \alpha).$$

— потенциал поля, вызванного свободными и связанными зарядами в области неоднородности (множитель ϵ введен для удобства). Найти потен-

циальную энергию U взаимодействия области неоднородности с внешним полем φ_1 .

УКАЗАНИЕ. Рассмотреть электрические натяжения, действующие на замкнутую поверхность, охватывающую область неоднородности. Использовать результат задачи 128.

167. Найти энергию взаимодействия со слабо меняющимся внешним полем U_0 малой области неоднородности в диэлектрике (см. предыдущую задачу). Вследствие быстрой сходимости достаточно ограничиться членами с $l = 0$ и 1 . Результат представить в векторной форме. Найти в этом приближении силу \mathbf{F} и вращательный момент \mathbf{N} , приложенные к области неоднородности.

168. Показать, что незаряженное диэлектрическое тело с проницаемостью ε_0 , находящееся в диэлектрике с проницаемостью ε , втягивается в область с большей напряженностью электрического поля, если $\varepsilon_0 > \varepsilon$, и выталкивается из этой области, если $\varepsilon_0 < \varepsilon$.

УКАЗАНИЕ. Использовать формулу (III.16).

169. В общем случае компоненты дипольного момента \mathbf{p} , приобретенного диэлектрическим телом во внешнем однородном поле \mathbf{E} , можно представить в виде $p_i = \beta_{ik} E_k$, где β_{ik} — симметричный тензор поляризуемости тела. Какую ориентацию стремится занять это тело во внешнем однородном поле? Тело незаряжено, $\beta_{ik} x_i x_k > 0$, x_i , ($i = 1, 2, 3$) — произвольный вектор.

170. Стержень из диэлектрика с проницаемостью ε_1 погружен в однородную жидкую диэлектрическую среду с проницаемостью ε_2 . Какую он займет ориентацию, если систему поместить в однородное внешнее поле? Какую ориентацию займет тонкий диск, находящийся в жидком диэлектрике?

171. Найти силу F , действующую на диэлектрический шар со стороны точечного заряда q (см. условие задачи 157*).

Рассмотреть предельный случай проводящего шара. Решить задачу двумя способами: методом задачи 166* и с помощью формулы (III.16).

172. Электростатическое поле образовано двумя проводящими цилиндрами с параллельными осями, радиусами R_1 , R_2 и зарядами на единицу длины $\pm \kappa$. Расстояние между осями цилиндров $a > R_1 + R_2$. Найти взаимную емкость $C_{вз}$ цилиндров на единицу длины. ($C_{вз} = \kappa / (\varphi_1 - \varphi_2)$, где φ_1 и φ_2 — потенциалы цилиндров).

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться результатом задачи 117.

173. Оси двух одинаковых проводящих цилиндров с радиусами R находятся на расстоянии a друг от друга. Цилиндры несут заряды $\pm \kappa$ на единицу длины. Найти распределение зарядов σ на поверхностях цилиндров.

174. Конденсатор образован двумя цилиндрическими проводящими поверхностями с радиусами R_1 и $R_2 > R_1$. Расстояние между осями цилиндров $a < R_2 - R_1$. Найти емкость C конденсатора.

175. Определить поле φ точечного заряда в однородной анизотропной среде, характеризуемой тензором диэлектрической проницаемости ε_{ik} .

176. В пустоте находится плоскопараллельная пластинка из анизотропного однородного диэлектрика с тензором проницаемости ε_{ik} . Вне пластинки однородное электрическое поле E_0 . Используя граничные условия для вектора поля, определить поле E внутри пластинки.

177. Найти емкость C плоского конденсатора с площадью обкладок S и расстоянием между ними a , если пространство между обкладками заполнено анизотропным диэлектриком с проницаемостью ε_{ik} . Краевым эффектом пренебречь.

178. Найти изменение направления линий вектора E при переходе пустоты в анизотропный диэлектрик. Воспользоваться результатом задачи 176.

§ 2. Потенциальные и емкостные коэффициенты

Потенциалы V_i , системы n проводников являются линейными однородными функциями зарядов q_k на проводниках:

$$V_i = \sum_{k=1}^n s_{ik} q_k \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (\text{III.26})$$

Величины s_{ik} называются потенциальными коэффициентами. Они зависят от взаимного расположения, формы и геометрических размеров проводников, а также от диэлектрической проницаемости окружающей среды. Матрица \hat{s} симметрична:

$$s_{ik} = s_{ki}. \quad (\text{III.27})$$

Величина s_{ik} представляет собой потенциал, приобретаемый i -м проводником, если сообщить k -му проводнику заряд $q_k = 1$, а остальные проводники оставить незаряженными. Все $s_{ik} > 0$.

Очевидно, что и заряды проводников являются линейными однородными функциями их потенциалов:

$$q_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} V_k \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (\text{III.28})$$

Величины c_{ik} называются емкостными коэффициентами. При этом $c_{ii} > 0$ (собственные емкости); $c_{ik} = c_{ki} > 0$ при $i \neq k$ (коэффициенты взаимной емкости, или просто взаимные емкости).

Величина c_{ik} представляет собой заряд, приобретаемый i -м проводником, когда все проводники кроме k -го заземлены, а k -й проводник имеет потенциал $V_k = 1$. Матрицы s_{ik} и c_{ik} являются взаимно обратными.

В случае одиночного проводника имеется единственный емкостный коэффициент c_{11} , называемый при этом просто емкостью. Емкость конденсатора (III.14) может быть выражена через емкостные коэффициенты его обкладок (см. задачу 180).

Энергия системы проводников имеет вид

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k} c_{ik} V_i V_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k} s_{ik} q_i q_k. \quad (\text{III.29})$$

Обобщенная сила F_a соответствующая обобщенной координате a , определяется формулами:

$$F_a = -\frac{1}{2} \sum_{ik} \frac{\partial s_{ik}}{\partial a} q_i q_k = +\frac{1}{2} \sum_{ik} \frac{\partial c_{ik}}{\partial a} V_i V_k. \quad (\text{III.30})$$

При решении электростатических задач бывает полезна теорема взаимности Грина: если потенциалы n проводников равны $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$, когда их заряды $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ и равны $V'_1, V'_2, V'_3, \dots, V'_n$, когда их заряды $q'_1, q'_2, q'_3, \dots, q'_n$, то имеет место соотношение:

$$\sum_{i=1}^n q_i V'_i = \sum_{i=1}^n q'_i V_i. \quad (\text{III.31})$$

179. Доказать теорему взаимности Грина (III.31). Доказать с помощью теоремы Грина, что $s_{ik} = s_{ki}$.

180. Система состоит из двух проводников, удаленных от всех других проводников. Проводник 1 заключен внутри полого проводника 2. Выразить емкости C и C' конденсатора и уединенного проводника, образующих эту систему, через ее емкостные коэффициенты. Доказать, что взаимные емкости проводника 1 и любого проводника, находящегося вне проводника 2, равны нулю.

181. Выразить потенциальные коэффициенты s_{ik} через емкостные c_{ik} в случае системы двух проводников.

182. Емкости двух уединенных проводников равны c_1 и c_2 . Эти проводники находятся в однородном диэлектрике с проницаемостью ϵ в вакууме на расстоянии r , большом по сравнению с их собственными размерами. Показать, что емкостные коэффициенты системы равны

$$c_{11} = C_1 \left(1 + \frac{C_1 C_2}{r^2} \right), \quad c_{12} = -\frac{C_1 C_2}{r}, \quad c_{22} = C_2 \left(1 + \frac{C_1 C_2}{r^2} \right),$$

УКАЗАНИЕ. Определить сначала потенциальные коэффициенты с точностью до величины $1/r$.

183. Емкостные коэффициенты системы двух проводников равны c_{11} , c_{22} , $c_{12} = c_{21}$. Найти емкость C конденсатора, обкладками которого служат эти два проводника.

184. Четыре одинаковые проводящие сферы расположены по углам квадрата. Сфера 1 несет заряд q . Затем она соединяется тонкой проволочкой поочередно на время, достаточное для установления равновесия, со сферами 2, 3, 4 (нумерация проводников циклическая). Найти распределение заряда между проводниками по окончании всех операций. Потенциальные коэффициенты системы заданы.

185. Три одинаковые проводящие сферы с радиусами a находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной $b \geq a$. Вначале все сферы имели одинаковые заряды q . Затем они по очереди заземлялись на время, достаточное для установления равновесия. Какой заряд остается на каждой сфере по окончании всех операций?

186. Собственные емкости двух проводников, находящихся в однородном диэлектрике, C_1 и C_2 , их потенциалы V_1 и V_2 , расстояние между проводниками r много больше их размеров. Найти действующую между ними силу F .

187. Замкнутая проводящая поверхность с потенциалом V_1 содержит внутри себя проводник с потенциалом V_0 . При этом потенциал в некоторой точке P между проводящими поверхностями равен V_P . Пусть теперь проводники заземлены, а в точку P помещен заряд q . Какие заряды будут при этом индуцированы на проводниках?

188. Показать, что в отсутствие точечного заряда геометрическое место точек, из которых единичный заряд индуцирует на некотором заземленном проводнике заряд одной и той же величины, совпадает с эквипотенциальной поверхностью поля этого проводника.

189. Два проводника с собственными емкостями c_{11} и c_{22} и взаимной емкостью c_{12} , составляющие часть некоторой системы изолированных проводников, соединены тонкой проволокой. Какова собственная емкость объединенного проводника, коэффициенты взаимной емкости его и остальных проводников системы?

190. Два одинаковых сферических конденсатора с радиусами внутренних и внешних обкладок, соответственно a и b , изолированы и находятся на большом расстоянии r друг от друга. Внутренним сферам сообщены заряды q и q_1 , после чего внешние сферы соединяются проволокой. Найти (приближенно) изменение ΔW энергии системы.

191. Заземленная внешняя обкладка сферического конденсатора имеет малую толщину. В ней проделано небольшое отверстие, через которое проходит изолированный провод, соединяющий внутреннюю обкладку конденсатора с третьим проводником, находящимся на большом расстоянии r от конденсатора. Собственная емкость этого проводника C и вместе с внутренней обкладкой конденсатора он несет заряд q . Радиус внешней обкладки конденсатора b , радиус внутренней обкладки a . Найти силу F , действующую на третий проводник.

192*. Проводник заряжается путем последовательных подсоединений к разрядному шарика электрофора. Шарик электрофора после каждого подсоединения вновь заряжается, приобретая при этом заряд Q . При первом подсоединении на проводник с шарика переходит заряд q . Какой заряд получит проводник после очень большого числа подсоединений?

§ 3. Специальные методы электростатики

В этом параграфе содержатся задачи, относящиеся к различным разделам электростатики, более трудные в математическом отношении. Многочисленные методы решения задач электростатики изложены в ряде книг ([46], [66], [69], [93], [100]) в настоящем сборнике иллюстрируются лишь некоторые из этих методов: метод криволинейных координат (для случаев эллиптических поверхностей и поверхностей двух сфер), методы изображений, интегральных преобразований и инверсии. Схема их применения разъясняется непосредственно в решениях задач (более подробно, например, в задачах 193*, 195*, 205*, 209*, 211*, 215*). Изложим здесь кратко только метод инверсии.

Преобразованием инверсии называется такое преобразование пространства, при котором каждая точка его переходит в точку, сопряженную относительно некоторой, надлежащим образом выбранной сферы инверсии радиуса R . Если сферическими координатами (с началом в центре сферы

инверсии) первоначальной точки являются r, ϑ, α , то сферическими координатами инвертированной точки будут $r' = R^2/r, \vartheta, \alpha$. В векторной форме

$$\mathbf{r}' = \frac{R^2 \mathbf{r}}{r^2} \quad \text{или} \quad \mathbf{r} = \frac{R^2 \mathbf{r}'}{r'^2}. \quad (\text{III.32})$$

Преобразование инверсии обладает свойством конформности. При инверсии сфера преобразуется в сферу. Если, в частности, центр инверсии лежит на преобразуемой сфере, то последняя преобразуется в плоскость (и наоборот).

Уравнение Лапласа инвариантно относительно преобразования инверсии: если функция $\varphi(\mathbf{r})$ является решением уравнения Лапласа в исходном пространстве, то

$$\varphi'(\mathbf{r}') = \frac{r}{R} \varphi(\mathbf{r}) = \frac{R}{r'} \varphi\left(\frac{R^2}{r'^2} \mathbf{r}'\right) \quad (\text{III.33})$$

представляет собой решение уравнения Лапласа в инвертированном пространстве.

Основная задача, решаемая методом инверсии, формулируется так. Нужно найти поле системы заземленных проводников и точечных зарядов q_i , находящихся в точках \mathbf{r}_i . Потенциал на бесконечности $V = \text{const}$. Для решения задачи произведем инверсию с таким расчетом, чтобы поверхности проводников приобрели более простую форму.

При этом точечные заряды q_i заменяются зарядами

$$q'_i = \frac{R}{r_i} q_i, \quad (\text{III.34})$$

находящимися в точках

$$\mathbf{r}'_i = R^2 \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^2}.$$

Кроме того, в точке $r' = 0$ появляется точечный заряд

$$q_0 = -RV. \quad (\text{III.35})$$

В инвертированной системе решаем электростатическую задачу — находим потенциал $\varphi'(\mathbf{r}')$. Потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ можно затем получить с помощью обратного преобразования. Разумеется, можно и наоборот — по известному φ находить φ' .

193*. Проводящий эллипсоид с зарядом q и полуосями a, b, c помещен в однородный диэлектрик с проницаемостью ϵ . Найти потенциал φ , а также емкость эллипсоида C и поверхностную плотность заряда σ на его поверхности.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться эллипсоидальными координатами (см. задачу 64*). Искать потенциал в виде $\varphi(\xi)$.

194. Исходя из результатов предыдущей задачи найти потенциалы и емкости вытянутого и сплюснутого эллипсоидов вращения. Рассмотреть частные случаи тонкого длинного стержня и тонкого диска. Емкость C и потенциал φ вытянутого эллипсоида вращения найти также, используя результат задачи 75.

195*. Проводящий эллипсоид с зарядом q находится в пустоте в однородном внешнем поле, напряженность E_0 которого параллельна одной из осей эллипсоида. Найти потенциал φ полного электрического поля.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться эллипсоидальными координатами задачи 64*. Граничные условия на поверхности эллипсоида ($\xi = 0$) могут выполняться только, если зависимость потенциала φ' , вызванного наведенными зарядами, от η, ζ , будет такая же, как у внешнего поля:

$$\varphi' = \varphi_0(\xi, \eta, \zeta) \cdot F(\xi).$$

196. Напряженность поля в плоском конденсаторе равна E_0 . На заземленной обкладке имеется проводящий выступ в форме половины вытянутого эллипсоида вращения, ось симметрии которого перпендикулярна к плоскостям обкладок. Расстояние между обкладками велико по сравнению с размерами выступа. Найти электрическое поле φ в конденсаторе. Определить, во сколько раз максимальное значение напряженности поля E_{\max} и превосходит E_0 .¹

197. Проводящий незаряженный эллипсоид находится во внешнем однородном поле E_0 , ориентированном произвольно по отношению к его осям. Найти полное электрическое поле φ . Рассмотреть поле на больших расстояниях от эллипсоида, выразив его через коэффициенты деполяризации:

$$n^{(x)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+a^2)R_s}, \quad n^{(y)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+b^2)R_s},$$

$$n^{(z)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+c^2)R_s} \quad (R_s = \sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)}).$$

¹Результат задачи поясняет принцип работы громоотвода.

198. Найти выражения коэффициентов деполяризации, введенных в предыдущей задаче, в случае вытянутого эллипсоида вращения ($a > b = c$). Рассмотреть частные случаи очень вытянутого эллипсоида (стержня) и эллипсоида, близкого к шару.

199. Найти коэффициенты деполяризации для сплюснутого проводящего эллипсоида ($a = b > c$). Рассмотреть, в частности, случай диска.

200*. Диэлектрический эллипсоид с полуосями a, b, c находится в однородном внешнем поле с напряженностью E_0 . Диэлектрическая проницаемость эллипсоида ϵ_1 , а окружающего его однородного диэлектрика ϵ_2 . Найти потенциал φ результирующего электрического поля (воспользоваться указанием к задаче 195*). Найти напряженность E электрического поля внутри эллипсоида, а также потенциал φ_2 вне эллипсоида на больших от него расстояниях, выразив его через составляющие поляризуемости эллипсоида по главным осям.

201. Эллипсоид вращения с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 находится во внешнем однородном поле E_0 в однородной диэлектрической среде ϵ_2 . Найти энергию U эллипсоида в этом поле и приложенный к нему вращательный момент N . Рассмотреть также случай проводящего эллипсоида вращения.

202*. Показать, что при сообщении проводящей жидкой сферической капле достаточно большого заряда капля теряет устойчивость. Найти это критическое значение заряда $q_{кр}$. Радиус капли R , коэффициент поверхностного натяжения α .

УКАЗАНИЕ. Сравнить энергию сферической капли с энергией деформированной капли, имеющей форму вытянутого эллипсоида вращения. Площадь поверхности такого эллипсоида

$$S = 2\pi b^2 + \frac{2\pi b a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{b}{a} \quad (a > b = c).$$

203*. Однородное электрическое поле $E_0 \parallel z$ в полупространстве $z < 0$ ограничено заземленной проводящей плоскостью $z = 0$ с круговым отверстием радиуса a . Найти поле φ во всем пространстве. Рассмотреть, в частности, поле на больших расстояниях за отверстием (в полупространстве $z > 0$).

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться сплюснутыми сфероидальными координатами (см. задачу 65*) с $c = 0$. Искать решение во всем пространстве в виде $\varphi = -E_0 z F(\xi)$.

204. Найти распределение зарядов σ на проводящей плоскости в предыдущей задаче.

205*. Внутри клиновидной области пространства, ограниченной двумя пересекающимися под углом β заземленными проводящими полуплоскостями OA и OB , в точке $N(r_0)$ находится точечный заряд q (рис. 11).

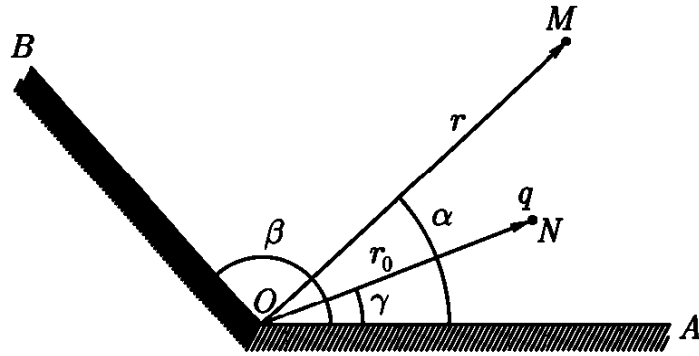


Рис. 11

Цилиндрические координаты заряда $(r_0, \gamma, 0)$; ось z направлена вдоль ребра клина, азимутальный угол α отсчитывается от грани OA . Доказать, что потенциал $\varphi(r, \alpha, z)$ может быть записан в виде

$$\varphi(r, \alpha, z) = \int_0^{\infty} \varphi_k(r, \alpha) \cos kz \, dk,$$

где

$$\varphi_k(r, \alpha) = \frac{8q}{\beta} \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} K_{\frac{n\pi}{\beta}}(kr_0) I_{\frac{n\pi}{\beta}}(kr) \sin \frac{n\pi\gamma}{\beta} \sin \frac{n\pi\alpha}{\beta} & \text{при } r < r_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} I_{\frac{n\pi}{\beta}}(kr_0) K_{\frac{n\pi}{\beta}}(kr) \sin \frac{n\pi\gamma}{\beta} \sin \frac{n\pi\alpha}{\beta} & \text{при } r > r_0, \end{cases}$$

$I_{\frac{n\pi}{\beta}}$ и $K_{\frac{n\pi}{\beta}}$ — цилиндрические функции.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться формулой (П 1.11) и приложением 3.

206. Доказать, что потенциал поля точечного заряда в клиновидной области, найденный в предыдущей задаче, можно представить в виде

$$\varphi(r, \alpha, z) = \frac{q}{\beta\sqrt{2rr_0}} \int_{\eta}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi\zeta}{\beta}}{\operatorname{ch} \frac{\pi\zeta}{\beta} - \cos \frac{\pi(\alpha - \gamma)}{\beta}} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi\zeta}{\beta}}{\operatorname{ch} \frac{\pi\zeta}{\beta} - \cos \frac{\pi(\alpha + \gamma)}{\beta}} \right] \cdot \frac{d\zeta}{\sqrt{\operatorname{ch} \zeta - \operatorname{ch} \eta}},$$

где

$$\operatorname{ch} \eta = \frac{r_0^2 + r^2 + z^2}{2rr_0}, \quad \eta > 0.$$

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться формулами:

$$\int_0^{\infty} K_{\nu}(kr) I_{\nu}(kr_0) \cos kz \, dk = \frac{1}{2\sqrt{2rr_0}} \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-\xi\nu} d\xi}{\sqrt{\operatorname{ch} \xi - \operatorname{ch} \eta}}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^n \cos nx = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - p^2}{1 - 2p \cos x + p^2} - 1 \right).$$

207. Найти поле φ заряда q , находящегося вблизи проводящей полуплоскости $\alpha = 0$ в точке r_0 с цилиндрическими координатами $(r_0, \gamma, z = 0)$.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться результатом задачи 206. Для вычисления интеграла сделать подстановку $\operatorname{ch} \frac{\zeta}{2} = \operatorname{ch} \frac{\eta}{2} \operatorname{ch} u$, где $0 < u < \infty$.

208. Найти распределение σ поверхностного заряда вблизи ребра клина с двугранным углом β (угол отсчитывается вне проводника). Клин находится в поле произвольным образом распределенного заряда.

УКАЗАНИЕ. Сначала рассмотреть, случай, когда вблизи клина находится один точечный заряд, воспользовавшись результатом задачи 205*, разложениями (П 3.6) и формулой

$$\int_0^{\infty} K_{\nu}(k\rho) k^{\nu} \cos kz \, dk = 2^{\nu-1} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{\rho^{\nu}}{(\rho^2 + z^2)^{\nu+1/2}}.$$

Решение Блоха (5.6) представляет собой произведение обычной плоской волны $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ на периодическую функцию $u_k(\mathbf{r})$ с периодом решетки. В целом эту функцию можно считать модулирующим множителем плоской волны.

Учитывая, что $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$, перепишем уравнение Шредингера (5.5) в виде

$$\nabla^2 \varphi_k(\mathbf{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U(\mathbf{r})) \varphi_k(\mathbf{r}) = 0,$$

или

$$\nabla^2 \varphi_k(\mathbf{r}) + f(\mathbf{r}) \varphi_k(\mathbf{r}) = 0. \quad (5.7)$$

Таким образом, исходное уравнение Шредингера представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка с периодическим коэффициентом при искомой функции. Общее решение уравнения типа (5.7) было получено еще в 1883 г. математиком Флоке. Он получил решение в виде (5.6), т. е. в форме функций, которые сейчас называются одномерными функциями Блоха.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим доказательство теоремы в одномерном случае. Предположим, что имеется бесконечная кристаллическая цепочка, содержащая N ионов. Реально ее можно представить в виде кольца, причем первый ион и N -й ион совпадают. Тогда должны выполняться циклические граничные условия:

$$\varphi_k(r + Na) = \varphi_k(r). \quad (5.8)$$

Пусть T_n — трансляционный оператор, действующий только на координату r . Определим его так:

$$T_n(r) = (r + na), \quad (5.9)$$

где $n = 0, \dots, N$. Тогда действие этого оператора на волновую функцию, являющуюся решением уравнения (5.5), можно записать в виде

$$T_n \varphi_k(r) = \varphi_k(r + na). \quad (5.10)$$

Будем искать только такие собственные значения оператора T_n , для которых справедливо равенство

$$T_n \varphi_k(r) = c_n \varphi_k(r) \quad (5.11)$$

C_n — собственное значение оператора T_n . Запишем (5.11), полагая $n = 1$ и $n = N$:

$$T_1\varphi_k(r) = c_1\varphi_k(r) = \varphi_k(r + a), \quad (5.12)$$

$$T_N\varphi_k(r) = (c_1)^N\varphi_k(r) = \varphi_k(r + Na). \quad (5.13)$$

Используя циклические условия (5.8), находим из (5.13)

$$(c_1)^N = 1,$$

или

$$c_1 = (1)^{\frac{1}{N}} = \exp\left(\frac{2\pi iz}{N}\right), \quad z = 1, 2, \dots, N.$$

Согласно определению (3.8) волнового числа k имеем

$$\frac{2\pi z}{Na} = k, \quad (5.14)$$

отсюда

$$c_1 = e^{ika}. \quad (5.15)$$

Таким образом, для произвольной трансляции na , используя (5.10), (5.11) и (5.15), находим

$$\varphi_k(r + na) = e^{ikna}\varphi_k(r). \quad (5.16)$$

Здесь $\exp(ikna)$ является собственным значением оператора T_n , а $\varphi_k(r)$ — его собственная волновая функция. Условию (5.16) удовлетворяет функция Блоха (5.6). Покажем это:

$$\begin{aligned} \varphi_k(r + na) &= e^{ik(r+na)}u_k(r + na) = \\ &= e^{ikr}e^{ikna}u_k(r + na) = e^{ikna}e^{ikr}u_k(r + na). \end{aligned}$$

Так как согласно условиям теоремы функция $u_k(r)$ периодическая с периодом решетки, то

$$u_k(r) = u_k(r + na). \quad (5.17)$$

Таким образом, имеем

$$\varphi_k(r + na) = e^{ikna}e^{ikr}u_k(r) = e^{ikna}\varphi_k(r).$$

Это и доказывает теорему Блоха.

Отметим, что функция $\varphi_k(r)$, описывающая электрон в состоянии k , является собственной функцией оператора Блоха H_s и оператора трансляций T . Из теоремы Блоха следует ряд важных следствий. Так, каждая волновая функция электрона в периодическом потенциальном поле характеризуется волновым вектором k . Блоховская волновая функция

$$\varphi_k(r) = e^{i k \cdot r} u_k(r)$$

имеет сходство с волновой функцией свободного электрона, т. е. с плоской волной:

$$\varphi_k(r) = A e^{i k \cdot r}.$$

Отличие, как хорошо видно, заключается только в модулирующем множителе. В связи с этим многие свойства электрона в периодическом поле аналогичны свойствам свободного электрона. Волновой вектор k вводится с точностью до вектора обратной решетки и потому состояния электрона с волновыми векторами k и $k + G$ эквивалентны.

5.1.2. Точечная и трансляционная симметрия идеальной кристаллической структуры

Кристаллическая решетка представляет собой систему определенным образом расположенных в трехмерном пространстве точек, занимаемых ионами металла. Характерным элементом кристаллической решетки является элементарная ячейка, которая геометрически задается совокупностью трех некопланарных векторов (в простейшем случае) \mathbf{a}_i ($i = 1, 2, 3$). Если выбрать точку отсчета, то из нее можно построить любой узел решетки, используя элементы трансляций:

$$\mathbf{l} = l_i \mathbf{a}_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad l_i - \text{целые числа.}$$

Таким образом, весь кристалл строится путем бесконечного повторения элементарных ячеек. Элементы трансляционной симметрии будут в основе многих последующих рассуждений.

5.1.3. Элементарная ячейка кристаллической структуры. Ячейка Вигнера – Зейтца

Для каждой кристаллической структуры существует некоторый произвол в определении формы элементарной ячейки. В связи с этим очень удобно использовать центрированные элементарные ячейки — ячейки Вигнера –

Зейтца, которые, как будет видно далее, играют важную роль в электронной теории металлов. Такую ячейку можно построить согласно следующему правилу: из выбранного центрального узла проводим векторы к ближайшим узлам решетки и строим плоскости через середины этих векторов и перпендикулярно к ним. Возникающая область с центральным узлом есть элементарная ячейка Вигнера–Зейтца. Если элементарная ячейка содержит один атом, то структуру называют решеткой Бравэ, в противном случае имеем решетку с базисом. Базисом определяется совокупность векторов, характеризующих положение атомов ячейки относительно одного из них. Ячейка Вигнера–Зейтца обладает тем свойством, что все точки решетки, принадлежащие ячейке, находятся ближе к центру ячейки, чем к какому-нибудь другому узлу решетки. Удобство этой ячейки еще и в том, что она лучше всего аппроксимирует сферу, которую всегда приписывают атому в формальных моделях упаковки его в кристалле.

5.1.4. Обратная решетка

Элементарная ячейка считается заданной, если задана минимальная совокупность векторов, определяющих узлы ячейки относительно данного узла. В таком случае элементарную ячейку можно задать матрицей

$$a_{ij} = (A)_{ij}, \quad (5.18)$$

где элементы матрицы являются прямоугольными проекциями составляющих ячейку векторов. Такой ячейке можно сопоставить другую ячейку, задаваемую обратной матрицей

$$(B)_{ij} = (A)_{ij}^{-1}. \quad (5.19)$$

Поскольку $(A)_{ij}(B)_{ij} = 1$, то необходимо, чтобы

$$a_{ij}b_{ij} = \delta_{ij}, \quad (5.20)$$

или

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij}. \quad (5.21)$$

Таким образом, векторы \mathbf{b}_j обратны векторам базиса \mathbf{a}_j и представляют собой базис обратной решетки. Так, если вектора \mathbf{X} и \mathbf{Y} определены как $\mathbf{X} = x_i \mathbf{a}_i$, $\mathbf{Y} = y_i \mathbf{b}_i$, то $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = x_i y_i$.

Определим вектор обратной решетки из набора:

$$\mathbf{G} = n_1 2\pi \mathbf{b}_1 + n_2 2\pi \mathbf{b}_2 + n_3 2\pi \mathbf{b}_3, \quad (5.22)$$

где n_j — целые числа, в том числе отрицательные и нуль. Концы векторов \mathbf{G} образуют обратную решетку. Множитель 2π сразу введен в определение вектора обратной решетки для того, чтобы при разложении функции по векторам обратной решетки запись совпадала с принятым определением волновой функции свободного электрона

$$\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}.$$

Если вектор \mathbf{R} есть вектор трансляции прямой решетки

$$\mathbf{R} = z_1 \mathbf{a}_1 + z_2 \mathbf{a}_2 + z_3 \mathbf{a}_3,$$

то скалярное произведение $\mathbf{G} \cdot \mathbf{R}$ равно

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{R} = 2\pi n_i z_i = 2\pi m_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.23)$$

Введенная таким образом обратная решетка является инвариантным геометрическим объектом, свойства которого играют важную роль в теории металлов. Рассмотрим плоскую волну с вектором обратной решетки \mathbf{G} :

$$\exp(i \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) = f(\mathbf{G}, \mathbf{r}). \quad (5.24)$$

Поддействуем на эту функцию трансляционным оператором $T_{\mathbf{R}}$:

$$T_{\mathbf{R}} f(\mathbf{G}, \mathbf{r}) = f(\mathbf{G}, \mathbf{r} + \mathbf{R}) = \exp(i \mathbf{G} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{R})) = \exp(i \mathbf{G} \cdot \mathbf{R}) \exp(i \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}).$$

Используя здесь выражение (5.23), находим

$$T_{\mathbf{R}} f(\mathbf{G}, \mathbf{r}) = e^{i 2\pi m_j} e^{i \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}, \quad (j = 1, 2, 3). \quad (5.25)$$

Таким образом, функции вида (5.24) обладают полной трансляционной периодичностью решеточного потенциала. Такой же периодичностью обладают и функции $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, согласно (5.17). Поэтому их можно разложить в ряд Фурье по функциям (5.24):

$$u_{\mathbf{k}} = \sum_n c_{\mathbf{k}n} \exp(i \mathbf{G}_n \cdot \mathbf{r}). \quad (5.26)$$

Тогда блоховская функция (5.6) может быть записана в форме

$$\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_n c_{kn} \exp(i(\mathbf{k} + \mathbf{G}_n) \cdot \mathbf{r}). \quad (5.27)$$

Это представление волновой функции электрона в периодическом поле является особенно важным при расчете электронных состояний. Отметим кратко некоторые свойства обратной решетки:

1. Каждый вектор обратной решетки \mathbf{G} ортогонален некоторой плоскости, образованной атомами прямой решетки.

2. Длина вектора $|\mathbf{G}|$ обратно пропорциональна расстоянию между соответствующими атомными плоскостями.

3. Объем $v_{об}$ обратной ячейки обратно пропорционален объему v_n ячейки прямой решетки:

$$v_{об} = \frac{8\pi^3}{v_n}. \quad (5.28)$$

5.1.5. Зоны Бриллюэна

В обратном пространстве удобно выбрать элементарную ячейку аналогично ячейке Вигнера–Зейтца в прямой решетке. Эта ячейка называется первой зоной Бриллюэна и содержит те точки обратного пространства, которые находятся ближе к центру ячейки, чем к любой другой точке. Обратными векторами \mathbf{G} здесь будут являться вектора, соединяющие два любых узла обратной решетки. Отсюда хорошо видно, что если состояние электрона определяется волновым вектором \mathbf{k} , то другое состояние электрона $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{G}$ будет ему эквивалентно. Действительно, так как

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} = e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{R}} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} e^{i\mathbf{G} \cdot \mathbf{R}} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}},$$

что справедливо для любого вектора \mathbf{R} прямой решетки. Следовательно, волновые функции, описывающие состояния \mathbf{k} и \mathbf{k}' должны быть тождественны. Итак, для всех точек, лежащих вне зоны Бриллюэна всегда найдутся эквивалентные им точки внутри зоны Бриллюэна, а каждой точке на поверхности зоны Бриллюэна найдется эквивалентная точка, лежащая также на поверхности зоны. Иначе говоря, любую точку \mathbf{k} в обратном пространстве можно привести к соответствующей точке в первой зоне Бриллюэна. Это значит, что любую волновую функцию можно описать в схеме приведенных зон, так же как и в схеме расширенных зон. Важным выводом

этих рассуждений является утверждение, что все состояния электронов в периодическом поле решетки характеризуются значениями волнового вектора k , лежащими внутри или на поверхности первой зоны Бриллюэна. Отсюда следует, что энергия электронных состояний будет многозначной функцией волнового вектора k . Непосредственно мы убедимся в этом, рассматривая энергетический спектр электрона, движущегося в периодическом поле решетки.

5.1.6. Число электронных состояний в зоне Бриллюэна

Подсчет разрешенных электронных состояний, т. е. значений волнового вектора k , в кристалле можно осуществить, присоединяя циклические граничные условия Борна – Кармана. Мы уже дважды использовали эти условия при подсчете электронных состояний в модели свободных электронов и при доказательстве теоремы Блоха. Сейчас мы обсудим этот вопрос несколько подробнее. Дело в том, что рассмотрение бесконечных кристаллических структур требует бесконечного ряда волновых функций. Однако, можно избежать этой трудности, используя трансляционную симметрию кристаллической решетки. Суть процедуры заключается в следующем: Формально кристалл можно разбить на ряд микрокристаллов, содержащих конечное число элементарных ячеек, например N ячеек, в каждом из трех пространственных направлений. Потребуем, чтобы при этом удовлетворялись граничные условия:

$$\varphi_k(r + Na) = \varphi_k(r). \quad (5.29)$$

Принятое деление, естественно, носит произвольный характер. Однако, отметим, что оно и необходимо нам как математический прием с тем, чтобы получить обозримый объект, впоследствии же можно перейти к пределу, устремляя число N к бесконечности. Сами граничные условия Борна – Кармана (5.29) наглядно можно осуществить в одномерном случае, беря замкнутую кристаллическую цепочку. Трехмерный вариант этих условий реально представить уже невозможно, но это не должно вызывать каких-либо сомнений, поскольку эти граничные условия не вносят никаких изменений в рассматриваемую физическую картину.

Используя эти граничные условия (5.29) в одномерном случае при доказательстве теоремы Блоха, мы получили для разрешенных значений волнового числа выражение (5.14):

$$k = \frac{2\pi z}{Na}, \quad (5.30)$$

где $z = 1, 2, \dots, N$. Однако, выбирая обратную ячейку в виде зоны Бриллюэна, т. е. в одномерном случае в виде центрированного отрезка, необходимо взять для изменения величины z интервал

$$-\frac{1}{2}N < z < \frac{1}{2}N. \quad (5.31)$$

Это значит, что мы из многих возможных эквивалентных вариантов выбора обратной ячейки выбрали центрированную ячейку, т. е. первую зону Бриллюэна. Таким образом, все возможные значения волнового числа k в приведенной схеме зон Бриллюэна заключены в интервале

$$-\frac{\pi}{a} < k < \frac{\pi}{a}. \quad (5.32)$$

Придавая величине z значения на отрезке (5.31), можно получить набор всех возможных величин k , лежащих в интервале (5.32). Значения k распределены в этом интервале с постоянной плотностью и, поскольку величина N очень велика, то можно сказать, что непрерывно. Эти результаты можно непосредственно перенести на трехмерный случай, считая, что выбранный макрокристалл имеет размеры $N_1 a_1$, $N_2 a_2$, $N_3 a_3$ и для каждого из пространственных направлений выполняются, подобно (5.8), циклические условия. Выполнение их требует справедливости для трех составляющих k_1 , k_2 , k_3 по осям обратного пространства вектора k необходимых условий:

$$k_1 = \frac{2\pi z_1}{N_1} b_1, \quad k_2 = \frac{2\pi z_2}{N_2} b_2, \quad k_3 = \frac{2\pi z_3}{N_3} b_3,$$

здесь $b_i = \frac{1}{a_i}$ есть, согласно представлению (5.22), базис обратного пространства. Таким образом, получаем, что значения вектора k определяются выражением

$$k = \frac{2\pi z_1}{N_1} b_1 + \frac{2\pi z_2}{N_2} b_2 + \frac{2\pi z_3}{N_3} b_3. \quad (5.33)$$

Набор всех возможных значений волнового вектора k можно найти, беря величины z_i из области

$$-\frac{N_1}{2} < z_1 < \frac{N_1}{2}, \quad -\frac{N_2}{2} < z_2 < \frac{N_2}{2}, \quad -\frac{N_3}{2} < z_3 < \frac{N_3}{2}. \quad (5.34)$$

Эта область представляет собой параллелепипед с центром в начале координат. Поскольку эта область эквивалентна объему первой зоны Бриллюэна, которую мы выбрали за основную ячейку обратной решетки, то и в

зоне Бриллюэна находится $N_1 \times N_2 \times N_3$ разрешенных значений волнового вектора k . Итак, зона Бриллюэна содержит столько допустимых значений вектора k , сколько элементарных ячеек содержит макрокристалл. Увеличение размеров макрокристалла просто увеличивает плотность состояний в k -пространстве.

Пусть объем макрокристалла, содержащего $N^3 = N_1 \cdot N_2 \cdot N_3$ ячеек, равен v , тогда на одну ячейку приходится объем $v_n = (v/N^3)$ прямого пространства. Этот объем связан с объемом ячейки обратного пространства соотношением (5.28):

$$v_{об} = \frac{8\pi^3}{v} N^3.$$

Отсюда можно легко найти объем обратного пространства, непосредственно связанный с данным волновым вектором k

$$\frac{v_{об}}{N^3} = \frac{8\pi^3}{v}. \quad (5.35)$$

Обратная этому значению величина очевидно представляет число разрешенных значений вектора k в единице объема k -пространства:

$$\frac{N^3}{v_{об}} = \frac{v}{8\pi^3} \quad (5.36)$$

и служит весовым множителем при переходе от суммирования к интегрированию в обратном пространстве (3.10).

Лекция 6

6.1. Энергетический спектр электрона в поле с периодическим потенциалом

Как и раньше, нас будет интересовать в рассматриваемой модели, главным образом, основная характеристика электронного газа — закон дисперсии, т. е. связь энергии с квазиимпульсом. Сейчас у нас имеются все необходимые сведения, позволяющие найти явный вид этого закона. До сих пор нам приходилось иметь дело с квадратичным по квазиимпульсу дисперсионным соотношением, вытекающим из приближения свободных электронов. Оно утверждало, что энергия является непрерывной функцией волнового вектора при всех его значениях.

Итак, рассмотрим энергетический спектр электронного газа, слабо возмущенного периодическим полем решетки. Такое приближение для одноэлектронной модели известно как приближение почти свободных электронов. Обратимся непосредственно к одномерной модели и разберем математическую сторону вопроса, а затем остановимся на физических предпосылках приближения.

Прежде всего используем свойство периодичности потенциала решетки $U(\mathbf{r})$ и разложим его в ряд Фурье по векторам обратной решетки, так же, как мы ранее разлагали в ряд функцию $u_k(\mathbf{r})$:

$$U(\mathbf{r}) = \sum_n U_n \exp(i \mathbf{G}_n \cdot \mathbf{r}), \quad (6.1)$$

здесь U_n — Фурье-образ потенциала $U(\mathbf{r})$. Выражение (6.1) показывает, что потенциал $U(\mathbf{r})$ представляет собой функцию, определенную на дискретном пространстве узлов решетки. Предположим, что $U(\mathbf{r})$ есть слабое возмущение и воспользуемся обычной теорией возмущений, беря за основное состояние свободный электронный газ, т. е. плоские волны и энергию

$E_k^0 = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}$. Для энергии возмущенного состояния получаем:

$$E_k = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + \int e^{-i \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} U(\mathbf{r}) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 r + \sum_{\mathbf{k}'} \frac{\left| \int e^{-i \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} U(\mathbf{r}) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 r \right|^2}{E_k^0 - E_{\mathbf{k}'}^0} + \dots, \quad (6.2)$$

здесь $E_k^0 = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}$ — энергия невозмущенного состояния.

Рассмотрим матричный элемент

$$M_{k k'} = \int e^{-i \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} U(\mathbf{r}) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 r = \int \sum_n U_n e^{i (\mathbf{k} - \mathbf{k}' + \mathbf{G}_n) \cdot \mathbf{r}} d^3 r,$$

здесь использовано соотношение (6.1). Согласно правилу отбора $M_{k k'} = \sum_n U_n$, если $\mathbf{k} - \mathbf{k}' + \mathbf{G}_n = 0$, и $M_{k k'} = 0$, если $\mathbf{k} - \mathbf{k}' + \mathbf{G}_n \neq 0$. Следовательно, периодичность потенциала $U(\mathbf{r})$ накладывает на матричные элементы перехода жесткое требование, являющееся центральным моментом приближения:

$$\mathbf{k}' - \mathbf{k} = \mathbf{G}_n. \quad (6.3)$$

Таким образом, можно переписать разложение (6.2) с учетом периодичности потенциала $U(\mathbf{r})$:

$$E_k = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + \sum_n U_n + \sum_n \frac{|U_n|^2}{E_k^0 - E_{\mathbf{k} + \mathbf{G}_n}^0} + \dots \quad (6.4)$$

Очевидно, чтобы разложение (6.4) имело смысл, необходимо потребовать, чтобы основное состояние было невырожденным, т. е. $E_k^0 \neq E_{\mathbf{k} + \mathbf{G}_n}^0$, иначе $E_k \rightarrow \infty$. Это значит, что объем обратного пространства, занятый невозбужденными состояниями, не должен достигать зоны Бриллюэна. Однако, это не так. Поэтому, вероятно, нужно попробовать определить энергию возмущенного состояния из уравнения Шредингера, используя функцию Блоха в форме (5.27), когда периодическая часть функции разложена в ряд Фурье по векторам \mathbf{G}_n :

$$\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_n c_{kn} \exp(i (\mathbf{k} + \mathbf{G}_n) \cdot \mathbf{r}). \quad (6.5)$$

Запишем уравнение Шредингера (5.5), подставляя выражение функции (5.27):

$$\left(\frac{p_k^2}{2m} + U(r) \right) \sum_n c_{kn} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{G}_n) \cdot \mathbf{r}} = E_k \sum_n c_{kn} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{G}_n) \cdot \mathbf{r}}. \quad (6.6)$$

Для полного решения задачи необходимо определить значение коэффициентов c_{kn} . Для этого выберем из разложения (5.27) функцию

$$c_{kn'} \exp(-i(\mathbf{k} + \mathbf{G}_{n'}) \cdot \mathbf{r}),$$

соответствующую определенному значению вектора обратной решетки и умножим ее на уравнение (6.6), интегрируя по всему объему кристалла:

$$\begin{aligned} \sum_n c_{kn} c_{kn'} \int e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{G}_{n'}) \cdot \mathbf{r}} \frac{p_k^2}{2m} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{G}_n) \cdot \mathbf{r}} d^3r + \\ + \sum_n c_{kn} c_{kn'} \int U(r) e^{-i(\mathbf{G}_{n'} - \mathbf{G}_n) \cdot \mathbf{r}} d^3r = \\ = E_k \sum_n c_{kn} c_{kn'} \int e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{G}_{n'}) \cdot \mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{G}_n) \cdot \mathbf{r}} d^3r. \end{aligned}$$

Поскольку функции Блоха образуют ортонормированную систему, то можно предыдущее выражение переписать так:

$$\begin{aligned} \sum_n c_{kn} c_{kn'} \delta_{nn'} E_{\mathbf{k} + \mathbf{G}_{n'}}^0 + \sum_n c_{kn} c_{kn'} \int U(r) e^{-i(\mathbf{G}_{n'} - \mathbf{G}_n) \cdot \mathbf{r}} d^3r = \\ = E_k \sum_n c_{kn} c_{kn'} \delta_{nn'}, \end{aligned}$$

или

$$c_{kn'} c_{kn'} E_{\mathbf{k} + \mathbf{G}_{n'}}^0 - c_{kn'} c_{kn'} E_k + c_{kn'} \sum_n c_{kn} U_{n' - n} = 0.$$

Знак суммы в первых двух членах этого выражения пропадает. U_n — фурье-образ потенциала $U(r)$.

Итак, имеем:

$$c_{kn'} (E_{\mathbf{k} + \mathbf{G}_{n'}}^0 - E_k) = - \sum_n c_{kn} U_{n' - n}. \quad (6.7)$$

Придавая векторам \mathbf{G}_n и $\mathbf{G}_{n'}$ конкретные значения, получаем систему уравнений относительно коэффициентов c_{kn} разложения функции Блоха. Когда коэффициенты найдены, то все электронные состояния определены. Нас будут интересовать только те значения вектора обратной решетки, которые лежат в первой зоне Бриллюэна, т. е. всего два значения для случая одномерной решетки:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{n'} &= -\mathbf{g}, \\ \mathbf{G}_{n'} &= 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Это соответствует центру и границе зоны Бриллюэна. Итак, подставляя (6.8) в систему уравнений (6.7), находим

$$\begin{aligned} c_{k,0} (E_k^0 - E_k) + c_{k,-g} U_g &= 0, \\ c_{k,-g} (E_{k-g}^0 - E_k) + c_{k,0} U_{-g} &= 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Эта запись означает, что среди совокупности коэффициентов $c_{k,n}$ мы выделили только два коэффициента, соответствующие волновым функциям, описывающим электронные состояния вблизи центра зоны Бриллюэна и ее границы. Смесь этих волновых функций и будет соответствовать состояниям электрона в периодическом поле. Рассмотрим явно систему (6.9). Условием разрешимости ее является равенство нулю детерминанта

$$\det = \begin{vmatrix} E_k^0 - E_k & U_g \\ U_{-g} & E_{k-g}^0 - E_k \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$E_k^2 - E_k (E_k^0 + E_{k-g}^0) + E_k^0 E_{k-g}^0 - U_g U_{-g} = 0.$$

Таким образом, для энергии возмущенного периодическим полем электронного состояния имеем:

$$E_k = \frac{1}{2} \left[\{E_k^0 + E_{k-g}^0\} \pm \left\{ (E_k^0 + E_{k-g}^0)^2 - 4E_k^0 E_{k-g}^0 + 4U_g U_{-g} \right\}^{\frac{1}{2}} \right],$$

преобразуем это выражение:

$$E_k = \frac{1}{2} (E_k^0 + E_{k-g}^0) \pm \left[(E_k^0 - E_{k-g}^0)^2 + 4U_g U_{-g} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.10)$$

Здесь очень хорошо видно, что в результате возмущения, обусловленного периодическим потенциалом, исчезают, как самостоятельные, электронные состояния с энергией E_k^0 , E_{k-g}^0

$$E_k^0 = \frac{\hbar k^2}{2m}, \quad E_{k-g}^0 = \frac{\hbar}{2m}(\mathbf{k} - \mathbf{g})^2, \quad (6.11)$$

а вместо них возникает смешанное состояние с энергией E_k (6.10), которому соответствуют смешанные волновые функции. Еще раз подчеркнем, что возникшее состояние с энергией E_k явилось результатом смешивания из-за возмущения двух ранее вырожденных по энергии невозмущенных состояний. Рассмотрим подробнее выражение для энергетического спектра (6.10) электрона. Определим обратную решетку для одномерной ионной цепочки и зависимость энергии от волнового вектора невозмущенного состояния E_k^0 (6.11) в схеме приведенных зон (рис. 2). Далее, рассмотрим два случая: Пусть волновой вектор k принимает значения близкие к центру зоны Бриллюэна $k \approx 0$, тогда оказывается, что разность невозмущенных энергий $E_k^0 - E_{k-g}^0$ велика в сравнении с возмущающим потенциалом U_g (по условию задачи он мал) и, согласно выражению (6.10), имеем:

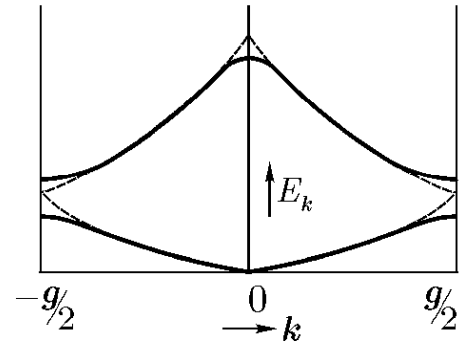


Рис. 2

$$E_k \simeq \frac{1}{2} [E_k^0 + E_{k-g}^0 \pm (E_k^0 - E_{k-g}^0)].$$

Здесь необходимо выбрать знак (+), иначе мы не будем в центре зоны Бриллюэна:

$$E_k \simeq E_k^0 = \frac{\hbar k^2}{2m}. \quad (6.12)$$

Это значит, что в центре зоны Бриллюэна электроны в периодическом поле тождественны свободным электронам и им отвечает квадратичное дисперсионное соотношение. Далее, рассмотрим состояние с волновым вектором k , лежащим на границе зоны Бриллюэна, т. е. $k = g/2$. Подставляем значение k в (6.10):

$$E_k = \frac{1}{2} \left\{ E_{g/2}^0 + E_{-g/2}^0 \pm 2(U_g U_{-g})^{\frac{1}{2}} \right\},$$

или

$$E_{g/2} = E_{g/2}^0 \pm (U_g U_{-g})^{\frac{1}{2}}. \quad (6.13)$$

Итак, на границе зоны Бриллюэна энергия электрона в периодическом поле решетки имеет два значения:

$$E_{g/2} = E_{g/2}^0 - (U_g U_{-g})^{\frac{1}{2}}, \quad (6.14)$$

$$E_{g/2} = E_{g/2}^0 + (U_g U_{-g})^{\frac{1}{2}}, \quad (6.15)$$

т. е. меньше и больше соответствующего значения энергии свободного электрона $E_{g/2}^0$. Эти значения энергии разделены энергетической «щелью», шириной $2(U_g U_{-g})^{1/2}$. Можно сказать, что при значениях волнового вектора, близких к границе зоны Бриллюэна, происходит отклонение закона дисперсии от квадратичного, причем это происходит за счет смешивания электронных состояний, различающихся на вектор обратной решетки. Это смешивание приводит к понижению энергии одного состояния и повышению энергии другого состояния и на границе зоны возникает разрыв энергетической кривой. Значения энергии, попадающие в этот разрыв, не могут быть собственными энергиями электронных состояний в кристалле и составляют запрещенную энергетическую зону. Это и есть основной результат, характерный для электронов в периодическом поле. Он утверждает, что в металле энергетический спектр (закон дисперсии) носит зонную структуру, т. е. обратное пространство состоит из отдельных полос разрешенных и неразрешенных энергий, чередующихся между собой. Для всех значений волнового вектора k , лежащих внутри зоны Бриллюэна, энергия является непрерывной функцией вектора k . Эта непрерывная совокупность значений энергии и представляет энергетическую полосу. В схеме приведенных зон (рис. 2) энергия становится многозначной функцией волнового вектора. Отметим еще раз, что разрывность энергетического спектра электрона в периодическом поле является фундаментальным свойством, обуславливающим многие свойства металлов. Наличие запрещенной энергетической зоны означает, что в кристалле не может возникнуть электронных волн с энергией, лежащей в этой зоне. Если пучек электронов с энергией, соответствующей запрещенному значению, падает на кристалл, то он весь должен быть отражен, поскольку электроны с такой энергией не могут двигаться в кристалле. Таким образом, любая попытка возбудить электронные волны

с энергией, лежащей внутри запрещенной зоны, не приводит к возникновению стационарного состояния, а введенное возмущение быстро затухает. Природа возникающей особенности в энергетическом спектре электронов заключается в осуществлении условия (6.3):

$$k' - k = G_n, \quad (6.16)$$

которое соответствует плоскости в обратном пространстве, где образуется энергетический разрыв. Это условие по-существу является одной из форм записи известного закона отражения Брегга – Вульфа

$$n\lambda = 2d \sin \theta. \quad (6.17)$$

Следовательно, можно сказать, что зонная структура энергетического спектра является следствием брегговского отражения электронов от решетки. В трехмерном случае качественная картина одномерной задачи сохраняется полностью, однако, ширина запрещенной зоны не всегда соответствует таковой в одномерной модели. В зависимости от характера периодического потенциала может возникать наложение соседних разрешенных зон. Рассмотрим для примера двумерную квадратную решетку в обратном пространстве (рис. 3). Пока волновой вектор k электрона близок к центру зоны Бриллюэна мы имеем концентрическую окружность для изоэнергетической линии; затем по мере увеличения энергии изолиния энергии коснется границы зоны Бриллюэна и потеряет окружную форму. Дальнейшее увеличение энергии соответствует появлению линий равной энергии в других зонах Бриллюэна, причем на границе зоны происходит разрыв непрерывности изолиний энергии, т. е. эти изолинии как бы отражаются от границы зоны.

Сформулируем теперь кратко основные результаты рассмотренной задачи о состояниях электронного газа в периодическом поле:

1. Энергетический спектр электрона в периодическом поле дискретен, и, следовательно, для электронных состояний в металле характерна зонная энергетическая структура.

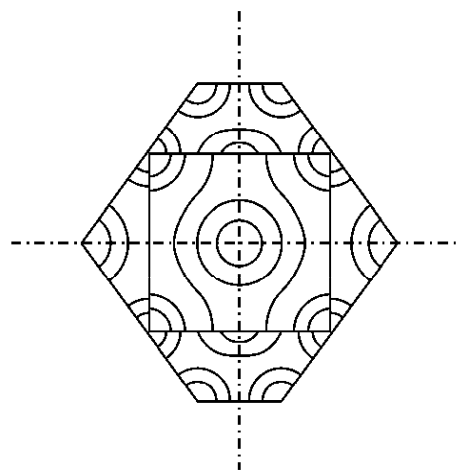


Рис. 3

2. Внутри каждой энергетической зоны зависимость энергии от волнового вектора является непрерывной функцией, причем отклонение от квадратичного закона существенно только для состояний вблизи границы зоны Бриллюэна.

3. Ширина запрещенной энергетической зоны связана с Фурье-образом периодического потенциала и в одномерном случае равна $2(U_g U_{-g})^{1/2}$.

4. Природа возникающей особенности в энергетическом спектре заключается в осуществлении брэгговского отражения электронов от решетки.

5. Собственные волновые функции оператора Блоха представляют собой смещение плоских волн, отличающихся на вектора обратной решетки с различным весовым множителем.

6. Качественные результаты одномерной модели справедливы и в многомерном случае.

6.1.1. Оператор Блоха в представлении операторов вторичного квантования

Представляет интерес некоторые предыдущие рассуждения о состояниях электрона в периодическом поле перевести на язык операторов вторичного квантования. Этот переход очень привлекателен в связи со своей компактностью записи.

Прежде всего получим многочастичный оператор Блоха, суммируя одноэлектронные операторы (5.4):

$$H = \sum_s \left\{ \frac{p_s^2}{2m} + U(r_s) \right\}. \quad (6.18)$$

Каждому одноэлектронному оператору Блоха соответствует собственная волновая функция Блоха

$$\varphi_{\mathbf{k}}(r) = \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) u_{\mathbf{k}}(r). \quad (6.19)$$

Построив соответствующие полевые операторы $\psi^+(r)$ и $\psi(r)$, согласно (3.27) и (3.28), можно записать в представлении чисел заполнения опе-

ратор (6.18):

$$\begin{aligned}
 H &= \int \psi^+(\mathbf{r}) \left\{ \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{r}) \right\} \psi(\mathbf{r}) d^3r = \\
 &= \sum_k \sum_{k'} \sum_{\sigma} C_{k'\sigma}^+ C_{k\sigma} \int \varphi_{k'\sigma}^* \left\{ \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{r}) \right\} \varphi_{k\sigma} d^3r = \\
 &= \sum_k \sum_{k'} \sum_{\sigma} \delta_{kk'} E_k C_{k'\sigma}^+ C_{k\sigma} = \sum_{k\sigma} E_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma}, \quad (6.20)
 \end{aligned}$$

т. е.

$$H = \sum_{k, \sigma} E_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma}. \quad (6.21)$$

Здесь мы использовали то обстоятельство, что функции Блоха (6.19) образуют ортонормированную систему и каждая из них описывает состояние с энергией E_k .

Таким образом, многочастичный оператор Блоха в представлении операторов вторичного квантования по функциям Блоха имеет вид (6.21). Однако, иногда удобно представить оператор Блоха (6.18), используя формализм вторичного квантования по плоским волнам. Прделаем соответствующие выкладки без пояснений:

$$\begin{aligned}
 H &= \int \psi^+(\mathbf{r}) \frac{p^2}{2m} \psi(\mathbf{r}) d^3r + \int \psi^+(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d^3r = \\
 &= \sum_{k, k'} \sum_{\sigma} C_{k'\sigma}^+ C_{k\sigma} \int e^{-ik'\cdot r} \frac{p^2}{2m} e^{ik\cdot r} d^3r + \\
 &\quad + \sum_{k, k'} \sum_{\sigma} C_{k'\sigma}^+ C_{k\sigma} \int e^{-ik'\cdot r} U(\mathbf{r}) e^{ik\cdot r} d^3r = \\
 &= \sum_{k, k'} \sum_{\sigma} \varepsilon_k \delta_{kk'} C_{k'\sigma}^+ C_{k\sigma} + \sum_{k, k'} \sum_{\sigma, G} C_{k'\sigma}^+ C_{k\sigma} \int e^{-ik'\cdot r} U_G e^{i(k+G)\cdot r} d^3r = \\
 &= \sum_{k, \sigma} \varepsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} + \sum_{k, G} \sum_{\sigma} U_G C_{k+G, \sigma}^+ C_{k, \sigma}.
 \end{aligned}$$

здесь:

$U_G \equiv U_n$ — фурье-образ периодического потенциала $U(r)$.

G — вектор обратной решетки.

Итак, оператор Блоха (6.18) в представлении операторов вторичного кван-

тования по плоским волнам можно записать так:

$$H = \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} + \sum_{kG} \sum_{\sigma} U_G C_{k+G,\sigma}^+ C_{k\sigma}. \quad (6.22)$$

Если сюда включить еще оператор (4.39), описывающий взаимодействие в системе электронного газа, представленный также в необходимой форме, то гамильтониан взаимодействующего электронного газа в периодическом поле решетки имеет вид:

$$H = \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} + \sum_{kG} \sum_{\sigma} U_G C_{k+G,\sigma}^+ C_{k\sigma} + \sum_{kk'\sigma\sigma'} \sum_{G \neq 0} \frac{2\pi e^2}{G^2} \left(C_{k-G,\sigma}^+ C_{k'+G,\sigma}^+ C_{k'\sigma} C_{k\sigma} - n \right). \quad (6.23)$$

Это полный гамильтониан системы, вторично проквантованный по плоским волнам. Он очень удобен в работе и мы им будем неоднократно пользоваться.

А сейчас рассмотрим, как можно решить задачу о состояниях электронного газа в периодическом поле решетки в формализме операторов вторичного квантования. Мы будем пользоваться гамильтонианом (6.22), считая, что в системе имеется один электрон и большой набор возможных электронных состояний k . Такой прием вызван тем, что нам необходимо найти зависимость одночастичной энергии от волнового вектора. Основное состояние системы задается гамильтонианом $\sum_{k\sigma} \varepsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma}$, возмущением служит периодический потенциал. Обозначим одночастичную волновую функцию состояния i в компактном виде числа частиц в этом состоянии:

$$|\dots n_i \dots\rangle.$$

Поскольку имеется возмущение, то истинная волновая функция Ψ не будет совпадать с одночастичной функцией, а должна быть выражена в форме линейной комбинации этих функций

$$\Psi = \sum_i \alpha_i |\dots n_i \dots\rangle. \quad (6.24)$$

Запишем далее уравнение Шредингера с гамильтонианом (6.22), причем,

чтобы показать, что рассматривается одночастичная задача, придадим индексу k значок «штрих» и опустим спиновый индекс σ

$$\left(\sum_{k'} \varepsilon_{k'} C_{k'}^+ C_{k'} + \sum_{k' G'} U_{G'} C_{k'+G'}^+ C_{k'} \right) \times \\ \times \sum_i \alpha_i |\dots n_i \dots\rangle = E \sum_i \alpha_i |\dots n_i \dots\rangle.$$

Умножим левую и правую часть этого уравнения на сопряженную функцию $\langle \dots n_j \dots |$:

$$\sum_i \alpha_i \sum_{k'} \varepsilon_{k'} \langle \dots n_j \dots | C_{k'}^+ C_{k'} | \dots n_i \dots \rangle + \\ + \sum_i \alpha_i \sum_{k' G'} U_{G'} \langle \dots n_j \dots | C_{k'+G'}^+ C_{k'} | \dots n_i \dots \rangle = \\ = E \sum_i \alpha_i \langle \dots n_j \dots | \dots n_i \dots \rangle.$$

Используя свойство ортогональности одночастичных волновых функций и раскрывая соответствующие матричные элементы, находим

$$\sum_i \alpha_i \varepsilon_j \delta_{ji} + \sum_i \alpha_i \sum_{G'} U_{G'} \delta_{j+G', i} = E \sum_i \alpha_i \delta_{ji},$$

или, преобразуя, можно записать так:

$$\sum_i \alpha_i (\varepsilon_j \delta_{ji} - E \delta_{ji}) + \sum_i \alpha_i \sum_{G'} U_{G'} \delta_{j+G', i} = 0,$$

однако $\alpha_i \delta_{ji} = \alpha_j$, $\alpha_i \delta_{j+G', i} = \alpha_{j+G'}$, тогда

$$\alpha_j (\varepsilon_j - E) + \sum_{G'} U_{G'} \alpha_{j+G'} = 0.$$

Здесь, как и ранее, индексы нумеруют электронные состояния. Пусть состояние j определено как $(\mathbf{k} + \mathbf{G})$, где \mathbf{G} — вектор обратной решетки:

$$\alpha_{\mathbf{k}+\mathbf{G}} (\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{G}} - E) + \sum_{\mathbf{G}'} U_{\mathbf{G}'} \alpha_{\mathbf{k}+\mathbf{G}+\mathbf{G}'} = 0.$$

Сумму обратных векторов можно обозначить одним вектором

$$G + G' = G'', \quad G' = G'' - G.$$

Таким образом, последнее выражение можно переписать так:

$$\alpha_{k+G}(\varepsilon_{k+G} - E) + \sum_{G''} U_{G''-G} \alpha_{k+G''} = 0. \quad (6.25)$$

Это есть уже полученная нами ранее система уравнений (6.7) (в других обозначениях) для определения коэффициентов α_i в выражении волновой функции возмущенной системы (6.24). Следовательно, тот же результат может быть получен, используя метод операторов вторичного квантования.

Лекция 7

7.1. Приближение Кронига–Пенни

До сих пор мы не делали никаких предположений, касающихся значения периодического потенциала системы ионов $U(r)$. В действительности этот потенциал не представляет собой монотонную функцию, а имеет резкие перевалы вблизи каждого узла решетки. Это значит, что у него имеются фурье-компоненты с очень малой длиной волны, это приводит к плохой сходимости рядов, составленных из фурье-образов U_G . В связи с этим приближение почти свободных электронов в чистом виде не может быть реализовано и становится пригодным благодаря введению приема, связанного с псевдопотенциалом. Тем не менее, все качественные выводы модели почти свободных электронов носят абсолютно всеобщий характер и составляют основу всех последующих приближений. Оставляя рассмотрение указанного приема до следующего параграфа, сделаем сейчас некоторые предположения относительно потенциала $U(r)$. Грубым приближением к реальному распределению его в одномерной решетке является предположение о наличии обрезавшего потенциала U_0 , позволяющее записать потенциальную энергию электрона в поле решетки в виде:

$$U(r) = U_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(r - na), \quad (7.1)$$

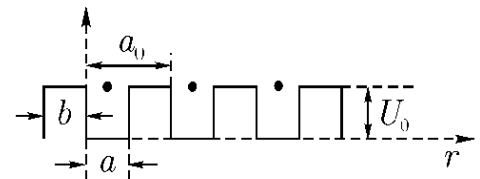


Рис. 4

здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Таким образом, потенциальную энергию электрона можно графически изобразить в форме ступенчатой кривой из одинаковых элементов-ступенек (рис. 4), a — ширина потенциальной ямы, a_0 — параметр решетки.

Запишем одномерное уравнение Шредингера для электрона, движущегося в периодическом поле, аналогичное (5.5)

$$\varphi'' + \frac{2m}{\hbar^2} [\varepsilon - U(r)] \varphi = 0. \quad (7.2)$$

Мы уже знаем (стр. 63), что это линейное дифференциальное уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами. Решениями его, согласно теореме Блоха, являются функции (5.6):

$$\varphi = e^{i k \cdot r} u(r). \quad (7.3)$$

Эти решения полностью будут определены, если известна зависимость величины k от коэффициентов уравнения (7.2). Подставим потенциал Кронига–Пенни (7.1) в уравнение (7.2):

$$\varphi'' + \frac{2m}{\hbar^2} \left[\varepsilon - U_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(r - na) \right] \varphi = 0. \quad (7.4)$$

Рассмотрим это уравнение в главном интервале ступенчатости, т. е. там где мы выбрали начало координат. Периодичность решетки обеспечивает нам справедливость произвольного выбора начала координат:

$$\varphi_1'' + \frac{2m}{\hbar^2} (\varepsilon - U_0) \varphi_1 = 0, \quad -b \leq r \leq 0 \quad (7.5)$$

и

$$\varphi_2'' + \frac{2m}{\hbar^2} \varepsilon \varphi_2 = 0, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (7.6)$$

Подставляем в эти уравнения функцию Блоха (7.3):

$$u_1''(r) + 2i k u_1'(r) - \left[k^2 + \frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - \varepsilon) \right] u_1(r) = 0$$

и

$$u_2''(r) + 2i k u_2'(r) - \left[k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} \varepsilon \right] u_2(r) = 0.$$

Здесь удобно ввести обозначение:

$$\frac{2m}{\hbar^2} (U_0 - \varepsilon) = \alpha^2, \quad (7.7)$$

$$\frac{2m}{\hbar^2} \varepsilon = \beta^2. \quad (7.8)$$

Тогда последние уравнения можно переписать так:

$$u_1''(r) + 2i k u_1'(r) - (k^2 + \alpha^2) u_1(r) = 0 \quad (7.9)$$

и

$$u_2''(r) + 2i k u_2'(r) - (k^2 - \beta^2) u_2(r) = 0. \quad (7.10)$$

Решения этих уравнений хорошо известны и равны следующим выражениям:

$$u_1(r) = A e^{(-i k + \alpha)r} + B e^{-(i k + \alpha)r} \quad (7.11)$$

и

$$u_2(r) = C e^{i(-k + \beta)r} + D e^{-i(k + \beta)r}. \quad (7.12)$$

Решения для других участков потенциальной кривой (7.1) имеют тот же вид, что и (7.11), (7.12), лишь постоянные отличаются на фазовый множитель. Постоянные A, B, C, D следует выбрать, требуя, чтобы функция $u(r)$ и ее производная $u'(r)$ были непрерывны в точках, соответствующих скачку потенциала $U(r)$, т. е. при $r = 0, r = -b (r = a)$:

$$\begin{aligned} u_1(0) &= u_2(0), \\ u_1'(0) &= u_2'(0), \\ u_1'(-b) &= u_2'(a), \\ u_1(-b) &= u_2(a). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Периодичность решетки позволяет утверждать, что условия непрерывности (7.13) должны выполняться и во всех других точках разрыва потенциала $U(r)$. Присоединяя условия (7.13) к решениям (7.11) и (7.12), находим:

$$\begin{aligned} A + B - C - D &= 0, \\ (i k - \alpha)A + (i k + \alpha)B - i(k - \beta)C - i(k + \beta)D &= 0, \\ A e^{(i k - \alpha)b} + B e^{(i k + \alpha)b} - C e^{i(-k + \beta)a} - D e^{-i(k + \beta)a} &= 0, \\ (i k - \alpha)A e^{(i k - \alpha)b} + (i k + \alpha)B e^{(i k + \alpha)b} - \\ - i(k - \beta)C e^{i(-k + \beta)a} - i(k + \beta)D e^{-i(k + \beta)a} &= 0. \end{aligned}$$

Запишем определитель этой системы уравнений относительно произволь-

НЫХ ПОСТОЯННЫХ:

$$\begin{vmatrix} \frac{(ik - \alpha)}{e^{-(ik - \alpha)b}} & \frac{(ik + \alpha)}{e^{-(ik + \alpha)b}} & \frac{-i(k - \beta)}{e^{i(k - \beta)a}} & \frac{-i(k + \beta)}{e^{i(k + \beta)a}} \\ e^{(ik - \alpha)b} & e^{(ik + \alpha)b} & -e^{i(-k + \beta)a} & -e^{-i(k + \beta)a} \\ (ik - \alpha) & (ik + \alpha) & -i(k - \beta) & -i(k + \beta) \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разрешим его, последовательно подсчитывая определители третьего порядка, относительно волнового вектора k . Имеем, после перехода к тригонометрическим и параболическим функциям:

$$\cos(k(a + b)) = \operatorname{ch}(\alpha b) \cos(\beta a) + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \operatorname{sh}(\alpha b) \sin(\beta a). \quad (7.14)$$

Это выражение дает важную связь волнового вектора k с параметрами α и β . Так как, согласно (7.7) и (7.8), имеем

$$\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} U_0 - \beta^2, \quad (7.15)$$

то, задавая волновому вектору различные значения, можно найти зависимости $\alpha(k)$ и $\beta(k)$, или $\varepsilon(k)$.

Используя зависимость (7.14), затем можно было бы определить и сами функции $u(r)$. Однако прямое решение уравнения (7.14) не возможно вследствие его трансцендентности. Согласно Кронигу–Пенни, это уравнение может быть значительно упрощено в предельном случае малых толщин потенциальных барьеров. Пусть b стремится к нулю, с другой стороны можно потребовать, чтобы обрезающий потенциал U_0 стремился к бесконечности. С учетом этих условий и условия (7.15) уравнение (7.14) упрощается:

$$\cos(ak) = \cos(\beta a) + \frac{2m}{\hbar^2} U_0 b \frac{\sin(\beta a)}{2\beta}. \quad (7.16)$$

Мы использовали здесь:

$$\operatorname{sh}(\alpha b) \approx \alpha b, \quad \operatorname{ch}(\alpha b) \approx 1 \quad \text{при } b \rightarrow 0.$$

Введем обозначение

$$\frac{am}{\hbar^2} U_0 b = P, \quad (7.17)$$

чтобы величина P оставалась постоянной, можно потребовать постоянства $U_0 b$ при переменных U_0 и b .

С учетом введенных обозначений выражение (7.16) принимает вид:

$$\cos(ak) = \cos(\beta a) + P \frac{\sin(\beta a)}{\beta a}. \quad (7.18)$$

Это хорошо известное уравнение Кронига – Пенни, определяющее явную связь между собственным значением энергии ε и волновым вектором k . Величина P теперь является приведенным обрезывающим потенциалом.

Очевидно, что если правая часть уравнения (7.18) будет меньше единицы, то волновой вектор является вещественным числом и решения (7.11) и (7.12) имеют смысл, если правая часть больше единицы, то k есть мнимая величина и (7.11) и (7.12) обращаются в бесконечность. Трансцендентное уравнение (7.18) уже можно решить графически для любого значения вектора k . Для этого построим зависимость правой части уравнения от βa ; Если $\beta a = 0$, то, учитывая, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1,$$

находим

$$\cos(\beta a) + P \frac{\sin(\beta a)}{\beta a} = 1 + P.$$

С ростом βa до $+\pi$ эта функция убывает, становясь равной -1 при $\pi = \beta a$, при $\beta a > \pi$ функция продолжает убывать и, достигая минимума, затем вновь растет, принимая при $\beta a = 2\pi$ значение $+1$. Далее при $\beta a > 2\pi$ она становится больше единицы, достигает максимума и затем опять убывает и т. д. Аналогичная картина складывается, когда βa изменяется в сторону отрицательных углов. На рис. 5 приведен качественный ход рассматриваемой зависимости

$$\cos(\beta a) + P \frac{\sin(\beta a)}{\beta a} = f(\beta a).$$

Очевидно, что при $|\beta a| = 2\pi n$, где $n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$, функция $f = +1$, при $|\beta a| = (2n + 1)\pi$ имеем $f = -1$.

Значения βa , удовлетворяющие условию (7.18), т. е. корни этого уравнения, получим, проводя прямые параллельные оси βa , и на расстоянии $\cos ka$ от нее. Меняя ka от 0 до π и проводя соответствующие прямые,

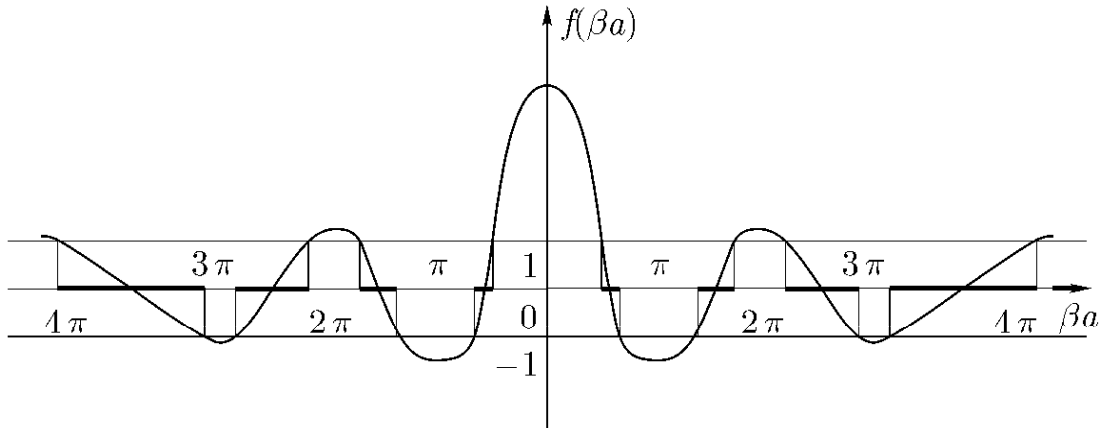


Рис. 5

параллельные оси βa , находим точки пересечения прямых с кривой, описываемой функцией f . Эти точки и есть решения трансцендентного уравнения (7.18). При этом видно, что там, где $|f| > 1$, вещественных корней нет. Это значит, что значения βa , соответствующие $|f| > 1$, а значит и энергии, не являются в этих интервалах собственными энергиями в уравнении Шредингера (7.2). Следовательно, весь интервал изменения βa , а значит и ε , является дискретным, т. е. распадается на зоны разрешенных и запрещенных энергий и значений βa . Разрешенные значения βa на рис. 5 показаны жирной чертой. С возрастанием $|\beta a|$ ширина разрешенных значений $|\beta a|$, а значит и энергий, растет за счет уменьшения запрещенных. Каждому разрешенному значению энергии соответствует два значения βa , отличающиеся знаком. Следовательно, приближение Кронига–Пенни дает нам тот же результат, что и приближение почти свободных электронов, т. е., спектр энергий электрона в периодическом поле решетки состоит из непрерывных полос, разделенных интервалами запрещенных значений энергии. Равноценность выводов обоих приближений позволяет утверждать, что распад энергетического спектра на полосы в приближении Кронига–Пенни не связан с принятыми предельными условиями. Обсуждая уравнение Кронига–Пенни, мы не делали никаких заключений о величине приведенного обрезывающего потенциала. Однако энергетический спектр электрона существенно зависит от этой величины. Предположим, что $P = 0$, тогда, согласно (7.18)

$$\cos(ka) = \cos(\beta a), \quad \varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \quad (7.19)$$

и, следовательно, $\pm ka + 2\pi n = \beta a$. Это значит, что βa может принимать

любые значения, т. е. разрешенными являются все значения энергии то нуля до бесконечности. Такая ситуация, как мы знаем, свойственна свободным электронам, когда энергетический спектр непрерывен и отсутствуют интервалы запрещенных энергий.

Предположим другой крайний случай. т. е. $P = \infty$. Мы знаем, что если величина P растет, то, согласно рис. 5, зоны дозволённых значений βa уменьшаются и когда $P = \infty$ эти зоны вырождаются в дискретные уровни. Действительно, если внимательно изучить рис. 5, то легко увидеть, что в этом предельном случае величина βa вообще не зависит от k , а определяется соотношением

$$\beta a = n\pi, \quad \text{где} \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.20)$$

или, раскрывая значение β , находим

$$\varepsilon_n = \frac{\hbar^2 n^2}{8ma^2}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.21)$$

Как известно, эта формула определяет энергетические уровни электрона в изолированном атоме. Следовательно, этот случай соответствует полностью связанному электрону. Сопоставляя оба предельных случая, можно сказать, что величина обрезающего приведенного потенциала P характеризует энергию связи электрона, т. е. его свободу или локализацию.

Рассмотрим еще случай, когда величина P сравнительно велика и электроны сильно связаны. Зоны дозволённых энергий тесно примыкают к значениям βa , равным $n\pi$. Пусть ширина этих зон есть Δ , тогда разрешенные значения βa можно задать так:

$$\beta a = n\pi + \Delta, \quad \text{где} \quad \Delta \approx 0. \quad (7.22)$$

Подставляем это условие сильно связанных электронов в уравнение Кронига – Пенни:

$$\cos(ak) = (-1)^n + P \frac{(-1)^n}{n\pi} \Delta. \quad (7.23)$$

Действительно, так как

$$\begin{aligned} \cos(\beta a) &= \cos(n\pi + \Delta) = \cos(n\pi) \cos \Delta + \sin(n\pi) \sin \Delta = (-1)^n, \\ \sin(\beta a) &= \sin(n\pi + \Delta) = \sin(n\pi) \cos \Delta + \cos(n\pi) \sin \Delta = (-1)^n \Delta, \\ \beta a &= n\pi + \Delta \simeq n\pi. \end{aligned}$$

Разрешаем уравнение (7.23) относительно ширины разрешенной зоны:

$$\Delta \simeq \frac{n\pi}{P} [(-1)^n \cos(ka) - 1].$$

Отсюда, используя (7.22), находим

$$\beta a = n\pi + \Delta = n\pi \left\{ 1 + \frac{1}{P} [(-1)^n \cos(ka) - 1] \right\} \quad (7.24)$$

Раскрывая величину β , согласно (7.8), находим в явной форме энергетический спектр сильно связанных электронов:

$$\left[\frac{2ma^2}{\hbar^2} \varepsilon_n \right]^{\frac{1}{2}} = n\pi \left\{ 1 - \frac{1}{P} + \frac{1}{P} (-1)^n \cos(ka) \right\},$$

или

$$\varepsilon_n = \frac{\hbar^2 n^2}{8ma^2} \left[1 - \frac{1}{P} + \frac{1}{P} (-1)^n \cos(ka) \right]^2, \quad (7.25)$$

$$n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Из этой формулы очень наглядно видны особенности энергетического спектра сильно связанных электронов.

Потребуем, далее, чтобы рассматриваемая кристаллическая цепочка удовлетворяла циклическим условиям Борна–Кармана, т. е. перейдем от безграничного к ограниченному кристаллу. Мы знаем, что в этом случае волновой вектор меняется не непрерывным, а дискретным образом согласно формуле (5.30)

$$k = \frac{2\pi z}{Na}, \quad (7.26)$$

где z — целое число, изменяющееся, согласно (5.31), в интервале

$$-\frac{N}{2} < z < \frac{N}{2}. \quad (7.27)$$

Каждому значению z из этого интервала будет соответствовать два решения, т. е. когда $\beta > 0$ и когда $\beta < 0$. Однако на каждое значение волнового вектора k приходится строго один энергетический уровень в каждой энергетической зоне. Следовательно, можно повторить и здесь уже известное нам положение (стр. 71), что каждая энергетическая полоса содержит столько

энергетических уровней, сколько элементарных ячеек содержит кристалл. Сделаем здесь еще один важный вывод, заключающийся в том, что каждое электронное состояние в кристалле необходимо нумеровать двумя квантовыми числами: волновым вектором k или, что все равно, квантовым числом z , и номером энергетической зоны n . Например, $\varphi_{kn}(r)$. Причем волновой вектор мы рассматриваем в схеме приведенных зон, т. е. в первой зоне Бриллюэна.

На модели Кронига – Пенни можно очень наглядно проследить, как квантовые числа приближения свободных электронов ($P = 0$) переходят в квантовые числа, описывающие вырожденные энергетические состояния электронов в изолированных атомах.

Рассмотрим под каким углом кривая зависимости энергии от волнового вектора внутри каждой зоны пересекает ее границу. Имеем уравнение Кронига – Пенни:

$$f(\beta a) = \cos(ka).$$

Дифференцируем его по βa , т. е. по энергии:

$$\frac{df}{d\beta a} = -\sin(ka) \frac{dk}{d\beta}.$$

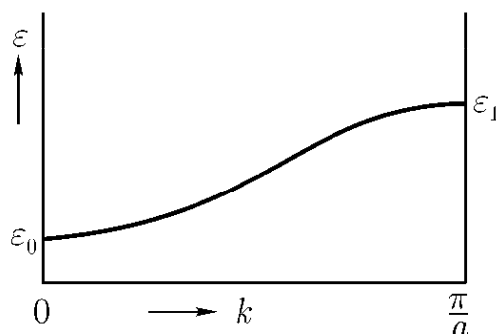


Рис. 6

На каждой границе зоны, как видно из рис. 5, $ka = n\pi$, отсюда $\sin ka = 0$. Поскольку $\frac{df}{d\beta a} \neq 0$, то необходимо, чтобы $\frac{d\beta}{dk} = 0$. Имеем:

$$\frac{d\beta}{dk} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \frac{d\varepsilon}{dk} = 0, \quad \text{так как} \quad \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \neq 0, \quad \text{то} \quad (7.28)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dk} = 0, \quad \text{при} \quad k = n\frac{\pi}{a}.$$

Это значит, что дисперсионная кривая пересекает границу зоны под прямым углом, что также весьма важно и носит совершенно общий характер. На рис. 6 приводится качественно дисперсионная зависимость $\varepsilon(k)$ при $n = 1$, т. е. для первой зоны Бриллюэна. При $k = \frac{\pi}{a}$ имеем $\frac{d\varepsilon}{dk} = 0$. Основной особенностью приближения Кронига – Пенни является то обстоятельство, что оно позволяет на основе одной схемы рассмотреть различные случаи

одноэлектронных приближений, различающиеся энергией связи электрона. Все выводы этого приближения носят всеобщий характер, утверждающий зонную структуру энергетического спектра электрона в периодическом поле решетки. В дальнейшем мы еще вернемся к приближению Кронига – Пенни в связи с изучением локальных электронных состояний в металлах.

Лекция 8

8.1. Методы расчета энергетической зонной структуры

Рассмотренные ранее приближения позволили выяснить основную особенность энергетического спектра электронов в металлах — его зонную структуру. Мы условились в связи с этим каждому электронному состоянию сопоставлять два квантовых числа: волновой вектор k в первой зоне Бриллюэна и номер энергетической зоны n . Нам известно, что в каждой зоне имеется определенное число состояний, равное числу значений волнового вектора в первой зоне Бриллюэна, т. е. числу элементарных ячеек в кристалле. Каждое состояние может быть заполнено, согласно принципу Паули, двумя электронами с противоположными спинами. Нам необходимо знать, в какой последовательности располагаются энергетические зоны, каков закон дисперсии внутри каждой зоны, какова ширина разрешенной и запрещенной зоны энергии, какова плотность состояний в области энергий, подверженных тепловому возбуждению и т. д.

Расчеты зонной энергетической структуры металлов, призванные ответить на эти вопросы, образуют область весьма тонких вычислительных методов, которые в настоящее время хорошо освоены. На саму зонную структуру большое влияние оказывает симметрия зон Бриллюэна и ячейки кристаллической решетки, поэтому для расчетов таких структур характерно использование теории групп. Она позволяет заметно упростить, а иногда и уточнить расчеты, так как в точках высокой симметрии исходные одноэлектронные уравнения Шредингера значительно упрощаются.

Число методов, использующихся при расчетах структуры энергетических зон, достаточно велико. Однако, мы рассмотрим только наиболее важные из них, применяемые при расчетах зон в металлах. Наше рассмотрение будет сводиться к решению одноэлектронного уравнения Шредингера, считая, что эффективный кристаллический потенциал (стр. 61) известен.

Общей особенностью почти всех используемых методов расчета является то обстоятельство, что они строятся на одноэлектронной основе и то, что искомая функция ищется в форме разложения в ряд по какой-нибудь полной системе известных функций, чаще всего по плоским волнам, либо по системе произведений радиальных функций на сферические гармоники. Удобство такого подхода заключается в возможности выбрать систему простых функций так, чтобы удовлетворялись некоторые условия, накладываемые на искомую функцию. Поскольку таким способом мы можем удовлетворить лишь части необходимых требований, то выполнение остальных условий можно потребовать, выбирая должным образом коэффициенты разложения.

Исключением из общей схемы построения методов расчета зонной структуры является своеобразный по построению метод ячеек, который известен еще как метод Вигнера – Зейтца.

8.1.1. Метод Вигнера – Зейтца (метод ячеек)

Если выбрать в качестве элементарной ячейки прямого пространства ячейку Вигнера–Зейтца, то для плотноупакованных металлов граница элементарной ячейки является поверхностью с высокой степенью симметрии и потому очень хорошо аппроксимирующуюся сферой того же объема $V = \frac{4}{3}\pi R_0^3$, где R_0 – радиус сферы. Каждая сфера содержит один узел решетки и является примитивной элементарной ячейкой. В центре такой ячейки расположен ионный остов, размеры которого обычно малы в сравнении с радиусом сферы. Так, для натрия $R_0 = 1.85 \text{ \AA}$, а радиус иона $R_{\text{и}} = 0.95 \text{ \AA}$. Потенциал иона распространяется не на всю ячейку и обычно охватывает лишь часть ее объема. В таких условиях можно считать, что ионный потенциал заключен внутри каждой сферы и обладает сферической симметрией. Важно еще раз подчеркнуть это обстоятельство, отметив, что если электрон попал в область какой-нибудь сферы, то на него будет действовать потенциал, создаваемый ионом и другими валентными электронами, находящимися только в этой сфере.

Обычно рассматриваемый метод используют для определения волновой функции и собственного значения энергии на дне зоны проводимости, т. е. для состояний электронов с $k = 0$. Такое ограничение связано с наиболее просто реализуемыми граничными условиями на поверхности ячейки. Рассмотрим волновую функцию $\varphi_{k=0}(\mathbf{r})$. Она, согласно теореме Блоха,

должна удовлетворять граничным условиям периодичности:

$$\varphi_{kn}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\varphi_{kn}(\mathbf{r}).$$

Для состояний с $\mathbf{k} = 0$ имеем

$$\varphi_{kn}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \varphi_{kn}(\mathbf{r}), \quad (8.1)$$

здесь \mathbf{R} — вектор трансляции, n — номер валентной зоны в общем числе зон. Это значит, что волновая функция должна быть непрерывной функцией без сингулярности и периодически переходить из одной ячейки в другую. Тогда аналогичной непрерывностью обладает и первая производная от этой функции. Непрерывность производной требует обращения ее в нуль на границе ячейки:

$$\left. \frac{\partial \varphi_{kn}(r)}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0. \quad (8.2)$$

Поскольку, как было установлено, потенциал ионного остова внутри сферы сферически симметричен, то выбрав его, согласно Вигнеру–Зейтцу, в форме потенциала $U(r)$ внутри свободного атома, нужно решить радиальное уравнение Шредингера, присоединяя к решению граничное условие (8.2). В результате решения мы получим волновую функцию и энергию электрона, соответствующую дну зоны проводимости $[\varepsilon(0)]$. Итак, наша задача состоит, следуя Вигнеру–Зейтцу, в вычислении зависимости энергии электрона, находящегося внутри сферы, от радиуса сферы R_0 . Как уже было сказано, потенциальная энергия этого электрона определяется только сферическим потенциалом самого иона, а всеми возможными эффектами обмена и корреляции можно пренебречь. Таким образом, необходимо интегрировать радиальное уравнение Шредингера с радиальной функцией R_l .

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) + \left[\varepsilon - U(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R_l = 0 \quad (8.3)$$

и граничным условием (8.2). Здесь $U(r)$ — сферически симметричный потенциал иона. Поскольку волновая функция обладает периодичностью решетки, повторяется при переходе из одной сферы в другую, то нам необходимо иметь решение только для одной сферы. Зависимость полной энергии кристалла от радиуса сферы R_0 тогда можно найти, умножая соответствующую одноэлектронную зависимость на число атомов в кристалле. Отметим

еще, что при решении уравнения Шредингера мы не должны отбрасывать решения, не стремящиеся к нулю при возрастании радиуса r , как это делается для случая изолированного атома, поскольку нас будут интересовать значения радиуса r вблизи поверхности сферы R_0 .

Приведенный расчет относится к состояниям электронов с $\mathbf{k} = 0$, т. е. касается основного состояния в зоне проводимости. Вполне понятно, что значительно сложнее рассчитать энергии состояний с $\mathbf{k} \neq 0$. Простейшим приемом, позволяющим в рамках рассматриваемого метода, получить первое приближение для энергии возбужденного состояния является допущение, что волновую функцию можно выбрать в виде:

$$\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\varphi_0(\mathbf{r}). \quad (8.4)$$

Эта запись напоминает запись функции Блоха, однако, здесь функция $\varphi_0(\mathbf{r})$ считается не зависящей от волнового вектора \mathbf{k} . Тем не менее, она является лучшим, чем плоская волна, приближением к правильной волновой функции. Подставим ее в уравнение Шредингера:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(r) \right\} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\varphi_0(\mathbf{r}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\varphi_0(\mathbf{r}).$$

Преобразуем:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\varphi_0(\mathbf{r}) - 2i\frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{k}\cdot\nabla\varphi_0(\mathbf{r}) - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\varphi_0(\mathbf{r}) + U(r)\varphi_0(\mathbf{r}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}\varphi_0(\mathbf{r}),$$

или

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\nabla^2\varphi_0(\mathbf{r}) + 2i\mathbf{k}\cdot\nabla\varphi_0(\mathbf{r})\right\} + U(r)\varphi_0(\mathbf{r}) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\varphi_0(\mathbf{r}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}\varphi_0(\mathbf{r}). \quad (8.5)$$

Отсюда уже можно получить выражение для расчета энергии возбужденного электронного состояния, считая, что функция $\varphi_0(r)$ нормирована к единице в объеме сферы Вигнера – Зейтца. Используя обычный рецепт определения энергии, находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{k}} = & \int \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\varphi_0^*(\mathbf{r})\varphi_0(\mathbf{r})d^3r - \frac{\hbar^2}{2m}\int \varphi_0^*(\mathbf{r})\nabla^2\varphi_0(\mathbf{r})d^3r - \\ & - \frac{\hbar^2}{2m}2i\int \mathbf{k}\cdot\nabla\varphi_0(\mathbf{r})\varphi_0^*(\mathbf{r})d^3r + \int \varphi_0^*(\mathbf{r})U(\mathbf{r})\varphi_0(\mathbf{r})d^3r, \end{aligned} \quad (8.6)$$

или

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m} \int \varphi_0^*(\mathbf{r}) \nabla^2 \varphi_0(\mathbf{r}) d^3r + \int \varphi_0^*(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \varphi_0(\mathbf{r}) d^3r. \quad (8.7)$$

Интегрирование здесь выполняется по всему объему сферы Вигнера–Зейтца. Интеграл

$$\int \varphi_0^*(\mathbf{r}) \nabla \varphi_0(\mathbf{r}) d^3r = 0$$

в силу симметрии распределения заряда в ячейке. Анализируя выражение для энергии (8.7), видим, что первый член представляет собой энергию Ферми, а второй и третий — энергию Вигнера–Зейтца. Перепишем выражение (8.7) в более удобной форме:

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \varepsilon(0), \quad (8.8)$$

где

$$\varepsilon(0) = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \varphi_0^*(\mathbf{r}) \nabla^2 \varphi_0(\mathbf{r}) d^3r + \int \varphi_0^*(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \varphi_0(\mathbf{r}) d^3r. \quad (8.9)$$

В принципе в выражение для $\varepsilon(0)$ можно было бы еще ввести поправки на корреляцию и обмен электронов, однако, вычисления потребовали бы дальнейших упрощений и потому мы их здесь упускаем.

Выражение для энергии (8.8) показывает, что энергия возбужденных состояний $k \neq 0$ может быть подсчитана как сумма энергий свободного электронного газа и энергии основного состояния в форме энергии Вигнера–Зейтца. В такой записи (8.8) закон дисперсии уже напоминает энергетическую зону.

Итак, определив функцию $\varphi_0(\mathbf{r})$, характеризующую распределение заряда внутри сферы Вигнера–Зейтца, можно затем построить и всю энергетическую зону, пользуясь выражением (8.8).

Можно рассчитать важную для оценки сил связи среднюю энергию, приходящуюся на один электрон, используя (8.8). Для этого необходимо, как это мы делали ранее, усреднить величину k^2 по сфере Ферми (3.19):

$$\overline{k^2} = \frac{3}{5} k_{\text{Ф}}^2 = \frac{3}{5} (3\pi^2 \bar{n})^{\frac{2}{3}}, \quad (8.10)$$

здесь \bar{n} — концентрация электронов проводимости. Учитывая (8.8), можно записать выражение энергии, приходящейся на один электрон проводимости в приближении Вигнера–Зейтца:

$$\bar{E}_{\text{вз}} = \varepsilon(0) + \frac{3\hbar^2}{10m} (3\pi^2\bar{n})^{\frac{2}{3}}. \quad (8.11)$$

В заключение отметим, что последовательное использование общего метода ячеек потребовало бы учета в выражении кристаллического потенциала добавочных членов: 1. Потенциала электростатического взаимодействия ячеек, 2. Потенциалов взаимодействия данного электрона с электронами, находящимися в данной ячейке и распределенных в других ячейках. Этот учет связан с очень громоздкими выкладками и мы его не будем здесь затрагивать, а непосредственно используем вычисленную ранее (4.17) обменную энергию.

8.2. Силы сцепления в металлах

Рассмотренный метод расчета электронных состояний в металле был построен на ряде допущений, касающихся вида волновой функции и вида кристаллического потенциала. Особенностью этих допущений, сделавших задачу разрешимой, является то обстоятельство, что здесь совершенно игнорируется структура металла и результат расчета зависит только от объема сферы Вигнера–Зейтца. Тем не менее, применение этого простого метода к определению дна зоны проводимости одновалентного металла, а, следовательно, и энергии связи дало результаты, хорошо согласующиеся с экспериментом. Под энергией сцепления металлов обычно понимают разность между средней энергией валентных электронов и энергией валентных электронов в изолированных атомах, находящихся в основном состоянии. Последнюю энергию можно получить из спектроскопических данных. Обычно главный интерес в проблеме сцепления металлов представляет собой определение зависимости энергии сцепления от радиуса R_0 . Ценность метода Вигнера–Зейтца и заключается в том, что он позволяет явно найти эту зависимость, хотя и численными методами. Минимум на кривой этой зависимости отвечает энергии связи, а соответствующий этому минимуму параметр решетки является равновесным. Кривизна кривой, как мы увидим, характеризует сжимаемость металлов. Если найти эту зависимость для де-

формированного металла, то можно определить и упругие характеристики среды.

В соответствии с определением энергия сцепления в металлах представляется выражением:

$$E_{\text{сц}} = \bar{E}_{\text{вз}} + \bar{E}_{\text{об}} - E_a - \bar{E}_I, \quad (8.12)$$

здесь:

$\bar{E}_{\text{об}}$ — средняя на электрон обменная энергия,

\bar{E}_I — средняя энергия корреляции на электрон,

$E_{\text{вз}} = \varepsilon(0) + \frac{3\hbar^2}{10m} (3\pi^2\bar{n})^{2/3}$ — энергия Вигнера–Зейтца,

E_a — энергия низшего состояния валентного электрона в изолированном атоме.

Согласно виду волновой функции $\varphi_k(\mathbf{r})$, вычисленной Вигнером–Зейтцем, она в большей части характеристической сферы представляет собой плоскую волну. Это позволяет рассматривать обменные и корреляционные эффекты в предположении приближения свободных электронов. В связи с этим мы воспользуемся ранее полученными численными результатами этих поправок. Более точное определение корреляционных поправок может быть сделано на основе многоэлектронной модели взаимодействующего электронного газа. Отметим еще одну трудность, возникающую при расчете энергии сцепления металлов — это поляризация ионного остова. Она является следствием корреляции между валентными электронами и электронами подвалентных уровней. Кроме того, флуктуирующий дипольный момент ионного остова должен экранироваться компенсирующей деформацией плотности валентных электронов, поэтому радиус поляризованного потенциала сравнительно невелик, меньше радиуса R_0 . Однако, роль поляризационных эффектов в величине энергии сцепления металлов еще плохо изучена и является проблемой, как и в целом весь вопрос.

Приведем некоторые численные результаты расчетов сил сцепления в кристалле натрия. Итак, имеем:

$$\bar{E}_{\text{вз}} = \varepsilon(0) + \frac{\hbar^2}{10m} (3\pi^2\bar{n})^{2/3} = (-0.611 + 0.144) \frac{R_g}{\text{ЭЛ}} = -0.467 \frac{R_g}{\text{ЭЛ}},$$

$$E_a = -0.378 \frac{R_g}{\text{ЭЛ}},$$

$$E_{\text{сц}} = \bar{E}_{\text{вз}} - E_a = -0.089 \frac{R_g}{\text{ЭЛ}} \simeq -27.2 \frac{\text{ккал}}{\text{моль}},$$

ГЛАВА VII

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 1. Квазистационарные явления в линейных проводниках

Если период колебаний электромагнитного поля значительно превышает время распространения поля через систему:

$$T \gg \frac{l}{c}, \quad \omega \ll \frac{c}{l}, \quad (\text{VII.1})$$

где c — скорость света, l — линейный размер системы, то можно пренебречь конечностью скорости распространения электромагнитных возмущений внутри системы. Такое приближение называется квазистационарным¹.

Ток в замкнутой цепи с э. д. с. $\mathcal{E}(t)$, емкостью C , индуктивностью L и сопротивлением R удовлетворяет в квазистационарном приближении дифференциальным уравнениям

$$\mathcal{I} = \frac{dq}{dt}, \quad \frac{1}{c^2} L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = \mathcal{E}(t),$$

где q — заряд на обкладке конденсатора.

При гармонической зависимости э. д. с. от времени ($\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}$) и установившемся режиме ток пропорционален э. д. с.:

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{E}}{Z}, \quad Z = R + i \left(\frac{1}{\omega C} - \frac{\omega L}{c^2} \right). \quad (\text{VII.2})$$

Величина Z называется комплексным сопротивлением (импедансом) цепи.

Собственная частота ω_0 колебаний в контуре, состоящем из емкости C и самоиндукции L , дается формулой Томсона

$$\omega_0 = \frac{c}{\sqrt{LC}}. \quad (\text{VII.3})$$

¹ Иногда квазистационарное приближение дает хорошие результаты и при нарушении условия (VII.1), например, в теории длинных линии. Подробнее об этом см. [101] § 107.

Для разветвленной цепи дифференциальные уравнения, определяющие токи в отдельных участках, могут быть составлены на основе законов Кирхгофа.

Если э. д. с. в линейном контуре наводится в результате электромагнитной индукции, она может быть вычислена с помощью закона Фарадея:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (\text{VII.4})$$

где Φ — поток вектора магнитной индукции через контур. Величина Φ может изменяться как вследствие изменения магнитного поля, так и в результате движения или деформации контура. Если имеется несколько индуктивно связанных контуров, то полный поток магнитной индукции через i -й контур Φ_i выражается формулой

$$\Phi_i = \frac{1}{c} \sum_k L_{ik} \mathcal{I}_k. \quad (\text{VII.5})$$

Здесь \mathcal{I}_k — ток в k -м контуре, L_{ik} — при $i \neq k$ — коэффициент взаимной индукции между i -м и k -м контурами, $L_{ii} \equiv L_i$ — коэффициент самоиндукции i -го контура. (Определение коэффициентов индуктивности приведено в начале гл. V.)

Обобщенную силу, действующую на проводник с током в квазистационарном поле, можно вычислить по формуле

$$F_i = \left(\frac{\partial W}{\partial q_i} \right)_{\mathcal{I}}, \quad (\text{VII.6})$$

в которой W обозначает магнитную энергию системы, q_i — обобщенную координату и производная берется при фиксированных значениях токов в проводниках. Магнитная энергия выражается через токи и коэффициенты индуктивности по тем же формулам, что и в статическом случае (см. формулы (V.17), (V.20)).

При усреднении по времени произведений величин, меняющихся по гармоническому закону

$$a(t) = a_0 e^{-i\omega t},$$

можно пользоваться формулами

$$\overline{a^2(t)} = \frac{1}{2} |a|^2, \quad \overline{a(t)b(t)} = \frac{1}{2} \text{Re}(ab^*). \quad (\text{VII.7})$$

Например, среднее тепловыделение в контуре можно вычислить по формулам

$$Q = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathcal{E} \mathcal{I}^*) = \frac{1}{2} |\mathcal{I}|^2 \text{Re} Z. \quad (\text{VII.8})$$

350. Круглая проволочная петля радиуса a , находящаяся в постоянном магнитном поле H_0 , вращается с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра, перпендикулярного H_0 . Найти силу тока в петле $\mathcal{I}(t)$, тормозящий момент $N(t)$ и среднюю мощность \bar{P} , которая требуется для поддержания вращения.

351. Плоский контур с электрическими параметрами R, L, C и площадью S вращается с угловой скоростью ω в постоянном магнитном поле H_0 вокруг оси, лежащей в плоскости контура и перпендикулярной H_0 . Определить средний тормозящий момент \bar{N} , приложенный к контуру.

352. В одном из двух индуктивно связанных контуров течет ток $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}_0 e^{-i\omega t}$. Индуктивности и сопротивления контуров заданы. Выразить среднюю обобщенную силу взаимодействия контуров через производную от коэффициента взаимной индукции по обобщенной координате q_i .

353. В один из двух одинаковых контуров, имеющих сопротивление R и индуктивности L , включена э. д. с. $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}$. Коэффициент взаимной индукции контуров L_{12} . Определить среднюю силу \bar{F} взаимодействия контуров. Результат выразить через производную от коэффициента взаимной индукции по соответствующей координате.

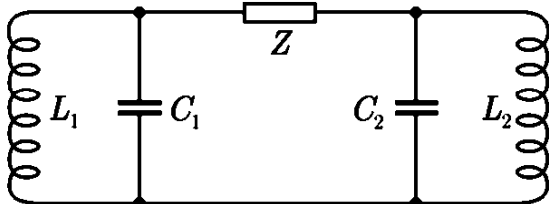


Рис. 17

354. Определить собственные частоты ω_1, ω_2 электрических колебаний в двух контурах (рис. 17), связь между которыми осуществляется через емкость C ($Z = \frac{i}{\omega C}$).

УКАЗАНИЕ. Составить систему алгебраических уравнений для определения токов и приравнять нулю определитель системы.

355. Решить предыдущую задачу для случая, когда связь между контурами осуществляется через индуктивность (см. рис. 17, $Z = -i\omega L/c^2$).

356. Найти собственные частоты колебаний $\omega_{1,2}$ в двух индуктивно связанных контурах с емкостями C_1, C_2 , индуктивностями L_1, L_2 и коэффициентом взаимной индукции L_{12} .

357. Два контура связаны друг с другом через активное сопротивление (см. рис. 17, $Z = R$). Найти собственные частоты колебаний, считая связь слабой (R велико).

358. В контур с индуктивностью L_1 , емкостью C_1 и сопротивлением R_1 включена сторонняя э. д. с. $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}$. С этим контуром индуктивно связан второй контур, параметры которого L_2, C_2, R_2 , коэффициент взаимной индукции L_{12} . Определить токи \mathcal{I}_1 и \mathcal{I}_2 в обоих контурах. Рассмотреть, в частности, случай, когда второй контур содержит только индуктивность ($R_2 = 0, C_2 = \infty$); определить частоту ω , при которой ток \mathcal{I}_1 максимален.

359. Найти комплексное сопротивление Z участка цепи (двухполосника), изображенного на рис. 18.

360. Конденсатор заполнен веществом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}$ (ионизованный газ, см. задачу 312*). Емкость незаполненного конденсатора C_0 . Доказать, что комплексное сопротивление участка цепи, содержащего такой конденсатор, равно сопротивлению двухполосника, изображенного на рис. 18, если параметры его подобраны соответствующим образом. Определить R, L, C .

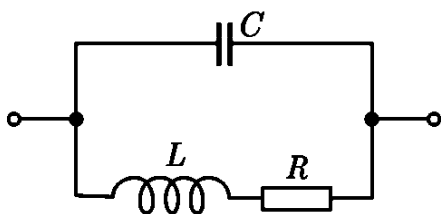


Рис. 18

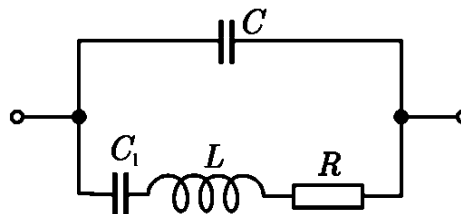


Рис. 19

361. Определить средний запас энергии \overline{W} и тепловые потери Q за единицу времени в конденсаторе, описанном в предыдущей задаче. Выразить эти величины через напряжение на обкладках конденсатора $U = U_0 e^{-i\omega t}$.

362. Конденсатор заполнен веществом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2}$ (диэлектрик с потерями, см. (VI.12)). Емкость конденсатора при отсутствии диэлектрика C_0 . Какими параметрами C, C_1, L, R должен обладать двухполосник, изображенный на рис. 19, чтобы его сопротивление переменному току было таким же, как сопротивление конденсатора?

363. Определить средний запас энергии \overline{W} и средние тепловые потери Q за единицу времени в конденсаторе, рассмотренном в задаче 362. Напряжение на обкладках $U_0 e^{-i\omega t}$.

364. Колебательный контур состоит из емкости C и индуктивности L . В некоторый момент времени к обкладкам конденсатора присоединяется батарея с постоянной э. д. с. \mathcal{E} и внутренним сопротивлением R . Найти зависимость тока, текущего через индуктивность, от времени. Исследовать зависимость этого тока от величин R, L, C .

365. К цепочке, состоящей из последовательно соединенных сопротивления R и емкости C , прикладывается прямоугольный импульс напряжения: $U_1(t) = U_0$ при $0 \leq t \leq T$, и $U_1(t) = 0$ при $t < 0, t > T$. Найти напряжение $U_2(t)$ на сопротивлении R .

366. К цепочке, состоящей из последовательно соединенных сопротивления R и индуктивности L , прикладывается прямоугольный импульс напряжения: $U_1(t) = U_0$ при $0 \leq t \leq T$, и $U_1(t) = 0$ при $t < 0, t > T$. Найти напряжение $U_2(t)$ на индуктивности L .

367. Цепь состоит из плоского конденсатора с емкостью C и сопротивления R (рис. 20). Между пластинами конденсатора (расстояние h) требуется создать поле, которое линейно возрастает от 0 до E_0 за время T , а затем за такое же время линейно уменьшается до нуля. Определить форму импульса, который нужно при этом подать на вход цепи.

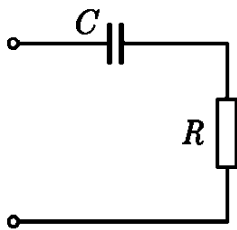


Рис. 20

368. В цепь, состоящую из последовательно соединенных сопротивления R и индуктивности L , включается в момент времени $t = 0$ э. д. с. $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$. Определить силу тока в цепи $\mathcal{I}(t)$. При каком значении фазы φ_0 переходные явления в цепи не возникнут?

369*. Электрическая цепь (искусственная длинная линия) состоит из N одинаковых звеньев ($N \gg 1$) и разомкнута на концах (рис. 21). Найти частоты собственных колебаний этой системы.

370. Считая полное число собственных частот в искусственной длинной линии (см. задачу 369*) большим, найти число Δr колебаний, приходящихся на интервал частот $\Delta\omega$.

371*. Искусственная длинная линия, состоящая из $2N$ чередующихся звеньев с параметрами L_1, C и L_2, C , разомкнута на концах (рис. 22). Исследовать спектр собственных колебаний такой системы.

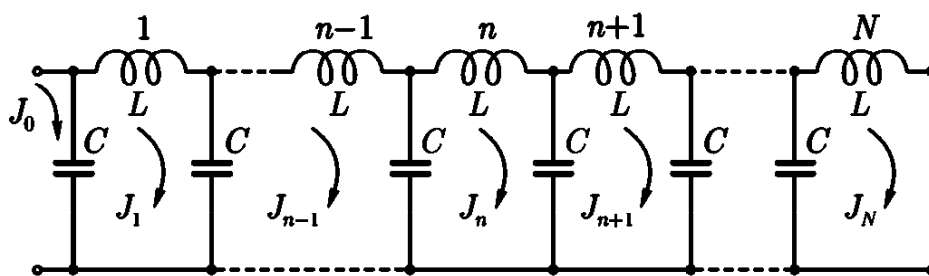


Рис. 21

372*. Искусственная длинная линия (рис. 23) состоит из N одинаковых звеньев, содержащих импедансы

$$Z_1 = -i\left(\frac{\omega}{c^2}L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right), \quad Z_2 = -i\left(\frac{\omega}{c^2}L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right).$$

К линии приложено напряжение U_1 , конец линии разомкнут. Найти напряжение U_2 между точками a , b .

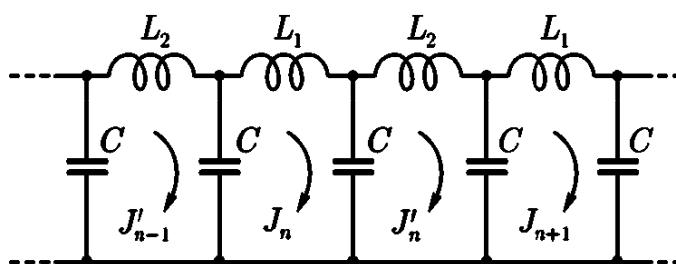


Рис. 22

УКАЗАНИЕ. Искать решение разностного уравнения для тока \mathcal{I}_n в n -м звене цепи в форме $\mathcal{I}_n = \text{const} \cdot q^n$.

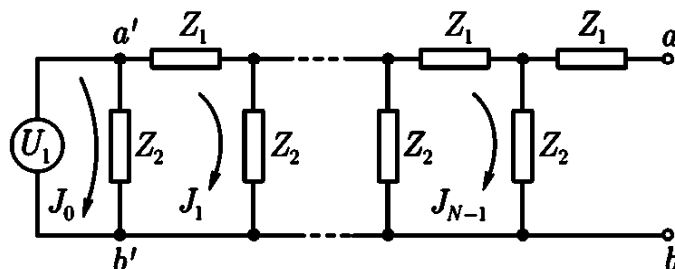


Рис. 23

373. Основываясь на результатах предыдущей задачи и считая $N \gg 1$, исследовать зависимость коэффициента передачи $K = U_2/U_1$ от частоты. Найти интервал частот, для которых K заметно отличен от нуля.

374. Из рассмотрения искусственной длинной линии с сосредоточенными параметрами (задача 369*) получить путем предельного перехода дифференциальное уравнение для тока в длинной линии с равномерно распределенными параметрами.

375. Идеальная длинная линия с распределенными параметрами длиной l разомкнута на концах. Определить спектр собственных колебаний такой системы, сравнить его со спектром цепочки с сосредоточенными параметрами (см. задачу 369*).

376*. Э. д. с., включенная в замкнутый контур, вызывает в нем ток $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I}_0 e^{-i\omega t}$. Найти общее выражение для комплексного сопротивления контура, не пренебрегая запаздыванием внутри системы.

377. Для контура, имеющего форму окружности радиуса a , найти поправку к индуктивности и сопротивление $R_r(\omega)$ в первом исчезающем приближении (см. предыдущую задачу). Показать, что $R_r(\omega)$ представляет коэффициент пропорциональности между средней величиной энергии, излучаемой в единицу времени, и среднеквадратичным значением силы тока в контуре.

§ 2. Вихревые токи и скин-эффект

Если проводник находится во внешнем магнитном поле, удовлетворяющем условию квазистационарности (VII.1), то вблизи проводника поле удовлетворяет в каждый момент времени уравнениям магнитостатики

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 \quad (\text{VII.9})$$

и уравнению

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (\text{VII.10})$$

Внутри проводника при достаточно большой проводимости σ ($\sigma/\omega \gg \varepsilon'$, где ε' — вещественная часть диэлектрической проницаемости) поле описывается уравнениями (VII.10) и

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}. \quad (\text{VII.11})$$

Из (VII.10) и (VII.11) можно получить уравнения второго порядка для векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , имеющие в случае однородной среды вид

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (\text{VII.12})$$

На границах раздела двух проводников или проводника и диэлектрика векторы поля должны удовлетворять условиям:

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (\text{VII.13})$$

Величина $\delta = c/\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}$ (толщина скин-слоя) характеризует глубину проникновения поля в проводник (ω — частота поля). При сильном скин-эффекте в некотором приближении можно считать, что поле проникает в проводник на нулевую глубину; тогда внутри проводника $\mathbf{H} = 0$, а вне проводника, у его поверхности, поле связано с плотностью поверхностного тока \mathbf{i} соотношением

$$\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i} \times \mathbf{n}. \quad (\text{VII.14})$$

Вследствие возникновения вихревых токов проводник, помещенный в магнитное поле, приобретает магнитный момент, даже если у него $\mu = 1$. Для характеристики этого магнитного момента удобно ввести тензор магнитной поляризуемости тела β_{ik} по формуле

$$m_i = \beta_{ik} H_{0k}, \quad (\text{VII.15})$$

где m — магнитный момент тела, \mathbf{H}_0 — периодическое внешнее магнитное поле. Тензор β_{ik} симметричен ($\beta_{ik} = \beta_{ki}$), а его компоненты в общем случае комплексны и зависят от частоты.

Среднее (по времени) тепловыделение внутри проводника может быть подсчитано по одной из следующих формул:

$$Q = \int (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) dV = \int \sigma \bar{E}^2 dV \quad (\text{VII.16})$$

или

$$Q = -\frac{c}{4\pi} \oint (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (\text{VII.17})$$

В первой из этих формул интеграл берется по объему проводника, во второй — по его поверхности. Q выражается также через мнимую часть тензора магнитной поляризуемости тела ($\beta_{ik} = \beta'_{ik} + i\beta''_{ik}$):

$$Q = \frac{\omega}{2} \beta''_{ik} \text{Re}(H_{0i} H_{0k}^*). \quad (\text{VII.18})$$

Последняя формула справедлива только при гармонической зависимости поля от времени.

378. Широкая плита с проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ , ограниченная плоскостями $x = \pm h$, обмотана проводом, по которому протекает ток $\mathcal{I}_0 e^{-i\omega t}$. Провод тонкий, число витков на единицу длины n , витки намотаны параллельно друг другу. Пренебрегая краевым эффектом, определить вещественную амплитуду магнитного поля внутри плиты. Исследовать предельные случаи слабого ($\delta \gg h$) и сильного ($\delta \ll h$) скин-эффекта.

379*. Металлический цилиндр бесконечной длины с проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ расположен так, что его ось совпадает с осью бесконечного соленоида кругового сечения, по которому течет переменный ток $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 e^{-i\omega t}$. Найти напряженность магнитного и электрического поля во всем пространстве, а также распределение плотности тока j в цилиндре; радиус цилиндра a , радиус соленоида b , число витков на единицу длины n .

380. Проводящий цилиндр находится в однородном переменном магнитном поле $H = H_0 e^{-i\omega t}$, параллельном его оси. Используя результаты предыдущей задачи, исследовать распределение тока j внутри цилиндра в предельных случаях малых и больших частот.

381. Подсчитать количество тепла Q , выделяющегося за единицу времени на единице длины цилиндра, рассмотренного в задаче 379*. Исследовать предельные случаи малых и больших частот.

382. Найти магнитную поляризуемость β (на единицу длины) цилиндра, находящегося в переменном магнитном поле, параллельном его оси. Частота поля ω , радиус цилиндра a , проводимость σ , магнитная проницаемость $\mu = 1$. Рассмотреть предельные случаи больших и малых частот.

383*. Металлический цилиндр находится во внешнем однородном магнитном поле $H = H_0 e^{-i\omega t}$, перпендикулярном его оси. Радиус цилиндра a , проводимость σ , магнитная проницаемость $\mu = 1$. Найти результирующее поле и плотность тока j в цилиндре.

УКАЗАНИЕ. Выразить E и H через векторный потенциал A и проинтегрировать дифференциальное уравнение для A .

384. Найти диссипацию энергии на единицу длины бесконечного проводящего кругового цилиндра, помещенного в поперечное относительно оси цилиндра магнитное поле, меняющееся с частотой ω .

385*. Бесконечный круговой цилиндр радиуса a с проводимостью σ находится в поперечном относительно его оси магнитном поле, поляризованном по кругу:

$$H_0(t) = (H_{01} + iH_{02})e^{-i\omega t},$$

где \mathbf{H}_{01} и \mathbf{H}_{02} — взаимно перпендикулярные векторы с одинаковыми длинами: $H_{01} = H_{02} = H_0$. (Вектор $\mathbf{H}_0(t)$ описывает окружность постоянного радиуса H_0 в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра.) Найти средний вращательный момент \overline{N} , приложенный к единице длины цилиндра ($\mu = 1$).

386. Бесконечный цилиндр, находящийся в постоянном и однородном поперечном магнитном поле \mathbf{H}_0 , вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Найти тормозящий момент \overline{N} , приложенный к единице длины цилиндра.

387*. Бесконечный металлический цилиндр радиуса a с проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ находится в постоянном и однородном, продольном относительно его оси, магнитном поле H_0 . В некоторый момент времени внешнее поле выключается и поддерживается затем равным нулю. Найти ход затухания со временем магнитного поля в цилиндре.

388. Металлический шар радиуса a с проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ , помещен в однородное переменное магнитное поле $H_0(t) = H_0 e^{-i\omega t}$. Считая частоту малой, найти в первом исчезающем приближении распределение вихревых токов в шаре и среднюю поглощаемую им мощность Q .

389. Металлический шар помещен в однородное магнитное поле, меняющееся с частотой ω . Найти результирующее поле \mathbf{H} и среднюю поглощаемую шаром мощность Q при больших частотах. Радиус шара a , магнитная проницаемость μ , проводимость σ .

УКАЗАНИЕ. При определении поля вне шара считать, что внутри шара поле равно нулю (т. е. пренебречь глубиной проникновения δ по сравнению с радиусом шара a). При определении поля внутри шара считать его поверхность плоской.

390*. Проводящий эллипсоид находится в однородном переменном магнитном поле. Определить магнитную поляризуемость эллипсоида при сильном скин-эффекте (т. е. считая, что глубина проникновения поля в проводник равна нулю). Рассмотреть предельные случаи тонкого круглого диска и длинного тонкого стержня.

391*. Шар радиуса a с проводимостью σ находится в однородном магнитном поле $H(t) = H_0 e^{-i\omega t}$. Найти результирующее магнитное поле и распределение вихревых токов в шаре для общего случая произвольных частот. Убедиться, что в предельных случаях слабого и сильного скин-эффекта получаются результаты, найденные в задачах 388 и 389 (считать для простоты $\mu = 1$).

392. Найти среднюю мощность Q , поглощаемую проводящим шаром в однородном переменном магнитном поле при произвольных частотах.

393. Найти активное сопротивление R тонкого цилиндрического проводника при скин-эффекте. Длина проводника l , радиус a , проводимость σ , магнитная проницаемость $\mu = 1$. Исследовать предельные случаи малых и больших частот.

394. На поверхность цилиндрического проводника, у которого радиус a , удельная проводимость σ_1 , нанесен слой другого металла. Толщина слоя h , его проводимость σ_2 , причем $h \ll a$. Найти активное сопротивление R такого проводника переменному току, считая толщину скин-слоя малой по сравнению с a ($\mu = 1$).

395. Бесконечный полый цилиндр, у которого внутренний радиус a , толщина стенки h ($h \ll a$) находится в однородном продольном магнитном поле $H_0(t) = H_0 e^{-i\omega t}$. Найти амплитуду H' магнитного поля в полости. Исследовать ее зависимость от ω .

УКАЗАНИЕ. В силу условия $h \ll a$ при определении поля в толще оболочки можно считать ее плоской.

396. Переменный ток $\mathcal{J}(t) = \mathcal{J}_0 e^{-i\omega t}$ течет по полому цилиндрическому проводнику, у которого средний радиус a , проводимость σ , магнитная проницаемость μ , толщина $h \ll a$. Найти распределение тока j по сечению и активное сопротивление R на единицу длины. Указать условие, при выполнении которого сопротивление полого проводника будет мало отличаться от сопротивления сплошного проводника такого же радиуса.

УКАЗАНИЕ. Пренебречь кривизной поверхности проводника.

397*. Внутри металлической трубы на расстоянии l от ее осевой линии течет прямолинейный ток \mathcal{J} . Радиус трубы a , толщина стенки $h \ll a$, проводимость стенки σ ($\mu = 1$). Как ток \mathcal{J} , так и расстояние l зависят от времени по произвольному закону, но так, что во все моменты времени $l \ll a$. Считая выполненными условия квази-стационарности, определить силу f на единицу длины, действующую на ток \mathcal{J} со стороны вихревых токов, индуцируемых в цилиндрической оболочке, при слабом скин-эффекте ($h \ll \delta$).

398*. Решить предыдущую задачу для случая сильного скин-эффекта ($h \gg \delta$).

ЛИТЕРАТУРА

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. [66], Тамм И. Е. [101], Френкель Я. И. [112], Власов А. А. [25], Смайт В. [93], Стрэттон Дж. А. [100], Вайнштейн Л. А. [23], Бриллюэн Л., Пароди М. [19], Конторович М. И. [61].

ГЛАВА VIII

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 1. Плоские волны в однородной среде. Отражение и преломление волн. Волновые пакеты

В диэлектрической среде при отсутствии зарядов и токов векторы электромагнитного поля удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{VIII.1})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (\text{VIII.2})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (\text{VIII.3})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (\text{VIII.4})$$

В недиспергирующей среде векторы поля связаны соотношениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (\text{VIII.5})$$

где ε и μ — электрическая и магнитная проницаемости. Если потери электромагнитной энергии пренебрежимо малы, то ε и μ — вещественные величины. В случае однородной среды из (VIII.1)–(VIII.5) можно получить уравнение второго порядка для \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{v_\varphi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \mathbf{H} - \frac{1}{v_\varphi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{VIII.6})$$

где $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ — фазовая скорость распространения электромагнитных волн.

В общем случае соотношения (VIII.5) справедливы только для монохроматических компонент полей, причем проницаемости ε и μ зависят от частоты (дисперсия) и являются комплексными величинами. Мнимые части ε и μ определяют диссипацию электромагнитной энергии в среде.

В проводящей среде, при достаточно медленном изменении поля, когда между током и электрическим полем справедлива связь вида $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ со статическим значением проводимости σ , уравнение (VIII.2) заменяется следующим:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (\text{VIII.7})$$

оно снова примет вид (VIII.2), если ввести комплексную диэлектрическую проницаемость, имеющую при малых частотах вид

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad (\text{VIII.8})$$

где ε' и σ — статические значения диэлектрической проницаемости и проводимости. При высоких частотах диэлектрическая проницаемость проводящей среды — комплексная величина, зависящая от частоты.

У хороших проводников (металлов) второй член в (VIII.8) очень велик, поэтому при малых частотах

$$\varepsilon(\omega) = i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (\text{VIII.9})$$

Если частота поля такова, что глубина проникновения поля в металл много меньше радиуса кривизны поверхности металла и длины волны в окружающем металл пространстве, то при любом характере поля вне проводника можно считать, что тангенциальные компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} вблизи поверхности проводника связаны соотношением

$$\mathbf{E}_\tau = \zeta (\mathbf{H}_\tau \times \mathbf{n}). \quad (\text{VIII.10})$$

Здесь \mathbf{n} — орт нормали к поверхности, направленный вглубь проводника, ζ — поверхностный импеданс металла — величина, зависящая от частоты поля и определяемая свойствами металла:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (\text{VIII.11})$$

Равенство (VIII.10) справедливо только при $|\zeta| \ll 1$; его можно использовать в качестве граничного условия при определении поля вне проводника (приближенное граничное условие Леонтовича).

Если среда неоднородна, а $\mu = 1$, то гармонически меняющееся во времени электрическое поле будет удовлетворять уравнению

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\varepsilon \omega^2}{c^2} \mathbf{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0; \quad (\text{VIII.12})$$

\mathbf{H} определяется через \mathbf{E} из уравнения Максвелла (VIII.1).

Плоская монохроматическая волна, распространяющаяся в направлении волнового вектора \mathbf{k} ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ — длина волны), описывается функцией

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (\text{VIII.13})$$

Амплитуда волны $\mathbf{E}_0 = \mathcal{E}' + i\mathcal{E}''$ является в общем случае комплексным вектором, причем $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k}$ (поперечность волны). В зависимости от величины и направления вещественных векторов \mathcal{E}' и \mathcal{E}'' волна может иметь линейную, круговую или эллиптическую поляризацию.

Плоские монохроматические волны, обладающие определенной частотой и определенной поляризацией, представляют собой математическую идеализацию. Те волны, которые мы называем монохроматическими, в действительности всегда являются квазимонохроматическими. Их можно рассматривать как суперпозиции монохроматических волн с частотами в некотором промежутке $\Delta\omega$. В данной точке пространства такая волна описывается функцией $\mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega t}$, где ω — некоторая средняя частота в промежутке $\Delta\omega$, а $\mathbf{E}_0(t)$ — функция, меняющаяся значительно медленнее, чем $e^{-i\omega t}$. Кроме этого, часто (а в оптическом диапазоне — как правило) приходится иметь дело с одновременным наблюдением излучения от многих независимых источников, разности фаз у которых меняются беспорядочным образом. Эти волны будут немонахроматическими и только частично поляризованными.

Можно единым образом рассматривать состояние поляризации как монохроматических (и полностью поляризованных), так и немонахроматических (частично поляризованных) волн. Поляризацию и интенсивность этих волн можно характеризовать тензором

$$I_{ik} = \overline{E_{0i} E_{0k}^*}, \quad (\text{VIII.14})$$

где усреднение проводится по времени наблюдения и по ансамблю независимых источников, а $i, k = 1, 2$ характеризуют два основных направления в плоскости xy (здесь $\mathbf{k} \parallel z$). Тензор поляризации эрмитов: $I_{ik} = I_{ki}^*$. Он может быть представлен в виде

$$I_{ik} = I_1 e_i^{(1)} e_k^{(1)*} + I_2 e_i^{(2)} e_k^{(2)*}, \quad (\text{VIII.15})$$

где I_1 и I_2 — положительные величины, $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$ — взаимно ортогональные комплексные векторы, нормированные условием $e^{(i)} \cdot e^{(k)*} = \delta_{ik}$ и характеризующие два основных состояния поляризации частично поляризованной волны. Из (VIII.15) видно, что такую волну можно рассматривать как некогерентную¹ суперпозицию двух основных эллиптически поляризованных

¹Некогерентными называются колебания, разность фаз которых меняется беспорядочным образом

волн. Форма и ориентация эллипсов поляризации этих волн описываются векторами $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$. Эллипсы поляризации подобны, а их соответствующие оси взаимно перпендикулярны. Величины I_1 и I_2 представляют собой интенсивности основных волн. Полная интенсивность волны $I = \overline{E_0 E^*} = I_1 + I_2 = \text{Sp}(I_{ik})$. Величины I_i и $e^{(i)}$ могут быть определены из системы уравнений

$$I_{kl} e_l^{(i)} = I_i e_k^{(i)}. \quad (\text{VIII.16})$$

Отношение

$$P = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \quad (I_2 \leq I_1) \quad (\text{VIII.17})$$

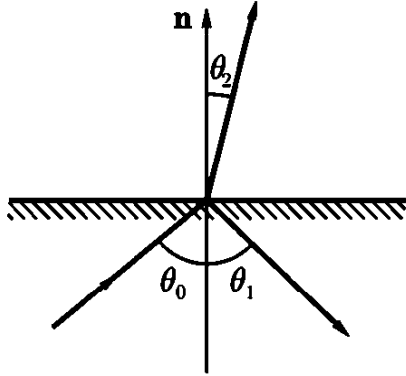


Рис. 24

называется степенью поляризации частично поляризованной волны, а $\rho = I_2/I_1$ — степенью ее деполяризации. Используется также другое определение степени деполяризации как $\rho' = 1 - P = 2I_2/(I_1 + I_2)$.

Для полностью поляризованной волны $P = 1$ ($\rho = \rho' = 0$), для неполяризованной волны $P = 0$ ($\rho = \rho' = 1$), $I_1 = I_2 = 1/2$, и тензор поляризации принимает вид

$$I_{ik} = \frac{1}{2} I \delta_{ik}.$$

При падении плоской волны на плоскую границу раздела двух сред углы $\theta_0, \theta_1, \theta_2$, указывающие направления распространения соответственно падающей, отраженной и преломленной волн (рис. 24) связаны соотношениями:

$$\theta_1 = \theta_0, \quad \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_0} = \frac{n_1}{n_2}, \quad n_i = \sqrt{\epsilon_i}, \quad (\text{VIII.18})$$

где $n_{1,2}$ — показатели преломления первой и второй сред (полагаем $\mu_1 = \mu_2 = 1$).

Амплитуды отраженной (E_1, H_1) и преломленной (E_2, H_2) волн выражаются через амплитуды E_0, H_0 падающей волны по формулам Френеля:

а) если E_0 нормальна к плоскости падения, то

$$E_1 = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_0)}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_0, \quad E_2 = \frac{2 \cos \theta_0 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_0; \quad (\text{VIII.19})$$

б) если H_0 нормальна к плоскости падения, то

$$H_1 = \frac{\text{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\text{tg}(\theta_0 + \theta_2)} H_0, \quad H_2 = \frac{\sin 2\theta_0}{\sin(\theta_0 + \theta_2) \cos(\theta_0 - \theta_2)} H_0. \quad (\text{VIII.20})$$

Угол θ_2 выражается через диэлектрические проницаемости сред по формулам (VIII.18). Формулы (VIII.18)–(VIII.20) сохраняют свой вид и при комплексном ε_2 , при этом угол θ_2 также станет комплексным и не будет иметь простого геометрического смысла. Случай комплексного угла θ_2 рассматривается в задаче 420*.

Коэффициентом отражения R называется отношение среднего (по времени) потока энергии отраженной волны к среднему, падающему на поверхность, потоку энергии.

Суперпозиция плоских монохроматических волн с разными волновыми векторами и частотами носит название группы волн или волнового пакета:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int \psi(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} dk_x dk_y dk_z, \quad (\text{VIII.21})$$

где $\Psi(\mathbf{r}, t)$ — любая декартова компонента вектора \mathbf{E} или \mathbf{H} . Функцию $\psi(\mathbf{k})$, характеризующую долю каждой отдельной плоской волны в общей суперпозиции, будем называть амплитудной функцией. Максимум амплитуды волнового пакета перемещается в пространстве с групповой скоростью $v_g = d\omega/dk$.

399. Две плоские монохроматические линейно поляризованные волны одной частоты распространяются вдоль оси z . Первая волна поляризована по x и имеет амплитуду a , вторая поляризована по y , имеет амплитуду b и опережает первую по фазе на χ . Найти поляризацию результирующей волны.

400. Рассмотреть в предыдущей задаче зависимость поляризации от сдвига фаз χ для случая $a = b$.

401. Две монохроматические волны одной частоты поляризованы по кругу с противоположными направлениями вращения, имеют одинаковые фазы и распространяются в одном направлении. Амплитуды этих волн a (у правополяризованной волны) и b (у левополяризованной волны). Найти зависимость характера поляризации от отношения a/b (a и b можно выбрать вещественными).

402. Выразить степень поляризации P плоской волны через составляющие I_{ik} тензора поляризации. Какому условию должны удовлетворять компоненты I_{ik} , чтобы волна была полностью поляризованной?

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться формулой (VIII.15) и ортонормированностью базисных векторов поляризации.

403. Убедиться в том, что частично поляризованная электромагнитная волна всегда может рассматриваться как совокупность неполяризованной и полностью поляризованной волны. Для этого доказать, что тензор поляризации (VIII.15) может быть в общем случае записан в форме

$$I_{ik} = \frac{1}{2}I(1 - P)\delta_{ik} + \frac{1}{2}PI_{ik}^{\text{пол}},$$

где тензор $I_{ik}^{\text{пол}}$ имеет нулевой определитель и, следовательно, описывает полностью неполяризованную волну, причем $I = I_1 + I_2$ — полная интенсивность, P — степень поляризации.

404. Плоская монохроматическая волна с интенсивностью I распространяется вдоль оси z и поляризована по эллипсу с полуосями a, b . Большая полуось a составляет угол ϑ с осью x . Составить тензор поляризации и рассмотреть возможные частные случаи.

405. Электромагнитная волна является суперпозицией двух некогерентных «почти монохроматических» волн равной интенсивности I с приблизительно одинаковыми частотами и волновыми векторами. Обе волны поляризованы линейно, направления поляризации задаются в плоскости, перпендикулярной к их волновому вектору, ортами $e^{(1)}(1, 0)$ и $e^{(2)}(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$. Построить тензор поляризации I_{ik} результирующей волны и определить степень ее деполаризации.

406. Решить предыдущую задачу для случая, когда интенсивности волн различны ($I_1 \neq I_2$), а направления поляризаций составляют угол $\pi/4$.

407. Тензор поляризации электромагнитной волны, который является эрмитовым, может быть представлен в виде

$$I_{ik} = \frac{1}{2}I \left(\delta_{ik} + \sum_{l=1}^3 \xi_l \hat{\tau}_{ik}^{(l)} \right) = \frac{1}{2}I \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix},$$

где I — полная интенсивность волны, ξ_i — вещественные параметры, удовлетворяющие условию $\xi_2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \leq 1$ (параметры Стокса), $\hat{\tau}^{(l)}$ -матрицы

$$\hat{\tau}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выяснить физический смысл параметров ξ_i . Для этого выразить степень деполаризации ρ волны через ξ_i и определить поляризации двух основных волн, на которые распадается частично поляризованная волна, в следующих трех случаях:

а) $\xi_1 \neq 0, \xi_2 = \xi_3 = 0$; б) $\xi_2 \neq 0, \xi_1 = \xi_3 = 0$; в) $\xi_3 \neq 0, \xi_1 = \xi_2 = 0$.

408. Пусть в плоской неоднородной¹ волне вектор электрического поля \mathbf{E} поляризован линейно. Определить взаимное расположение векторов \mathbf{E}_0 , \mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 , \mathbf{k}' , \mathbf{k}'' , (\mathcal{H}_1 , \mathcal{H}_2 — вещественная и мнимая части комплексной амплитуды \mathbf{H}_0 ; \mathbf{k}' и \mathbf{k}'' — вещественная и мнимая части волнового вектора \mathbf{k}). Какую кривую описывает конец вектора \mathbf{H} в фиксированной точке пространства?

Решить ту же задачу для случая, когда вектор \mathbf{H} поляризован линейно.

409. Поляризованная по кругу плоская монохроматическая волна падает наклонно на плоскую границу диэлектрика. Определить характер поляризации отраженной и преломленной волн.

410*. Пучок почти монохроматического неполяризованного света падает на плоскую границу диэлектрика. Найти тензоры поляризации $I_{ik}^{(1)}$, $I_{ik}^{(2)}$ и коэффициенты деполяризации ρ_1 , ρ_2 отраженного и преломленного света.

411. Неполяризованный почти монохроматический пучок света падает на плоскую границу раздела диэлектриков. Определить коэффициент отражения R и коэффициенты деполяризации $\rho_{1,2}$ отраженного и преломленного света, если угол падения равен углу Брюстера.

412. Вывести формулы Френеля для случая, когда электромагнитная волна падает из вакуума на плоскую границу проводящей среды с малым поверхностным импедансом ζ .

413. Найти коэффициент отражения R от металлической поверхности с малым поверхностным импедансом $\zeta = \zeta' + i\zeta''$. При каких углах падения θ_0 коэффициент отражения минимален?

414. Линейно поляризованная волна падает на плоскую границу проводящей среды с малым поверхностным импедансом ζ . Определить характер поляризации отраженной волны, если угол скольжения падающей волны равен углу Φ_0 , определенному в предыдущей задаче.

415. Линейно поляризованная плоская волна падает под углом θ_0 на поверхность металла. Направление ее поляризации составляет с плоскостью падения угол $\pi/4$. Экспериментально определены отношение поперечной и продольной (относительно плоскости падения) компонент отраженной

волны $\frac{E_{\parallel 1}}{E_{\perp 1}} = \operatorname{tg} \rho$ и сдвиг фаз между ними δ :

$$\frac{E_{\parallel 1}}{E_{\perp 1}} = \operatorname{tg} \rho e^{i\delta}.$$

¹Неоднородной называется волна, у которой вещественная \mathbf{k}' и мнимая \mathbf{k}'' составляющие комплексного волнового вектора \mathbf{k} имеют различные направления.

Выразить через ρ , δ и θ_0 вещественную часть показателя преломления n' и коэффициент поглощения n'' ($n' + in'' = 1/\zeta$, ζ — поверхностный импеданс), считая $|n'^2 - n''^2| \gg \sin^2 \theta_0$.

416. Найти коэффициент отражения R от плоской границы проводника при нормальном падении в предельном случае малых значений проводимости (см. формулу (VIII.8)).

417*. Показать, что после полного отражения от границы диэлектрика линейно поляризованная волна приобретает в общем случае эллиптическую поляризацию. При каких условиях поляризация будет круговой?

418. Исследовать движение энергии при полном внутреннем отражении. Найти поток энергии вдоль поверхности раздела и в перпендикулярном направлении в среде, от которой происходит отражение. Определить линии вектора Пойнтинга γ .

419. Плоская монохроматическая волна падает на плоскую границу раздела двух диэлектриков с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Какой характер примет поле по обе стороны от границы в случае скользящего падения (угол падения $\theta_0 \rightarrow \pi/2$)?

420*. Электромагнитная волна падает наклонно из диэлектрика на плоскую границу проводящей среды. Найти направления распространения, затухания и фазовую скорость v_φ волны в проводящей среде.

421*. Диэлектрический слой с проницаемостью ϵ_2 , ограниченный плоскостями $z = 0$ и $z = a$, разделяет диэлектрические среды с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_3 ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$). На этот слой нормально к его поверхности падает из области $z < 0$ электромагнитная волна. При какой толщине слоя отражение будет минимальным? При каком соотношении между ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 отражения не будет?

422*. Плоская волна падает нормально из вакуума на границу диэлектрика. Исследовать влияние размытости границы на коэффициент отражения. Для этого аппроксимировать ход диэлектрической проницаемости функцией

$$\epsilon(z) = \epsilon - \frac{\Delta\epsilon}{e^{z/a} + 1}, \quad \epsilon = 1 + \Delta\epsilon,$$

где ϵ и $\Delta\epsilon$ — постоянные. Исследовать частные случаи больших и малых a .

УКАЗАНИЕ. В дифференциальном уравнении для $E(z)$ (см. (VIII.12)) сделать замену независимой переменной $\xi = -e^{-z/a}$ и подстановку $E(\xi) = \xi^{-ika}\psi(\xi)$, где $\psi(\xi)$ будет удовлетворять гипергеометрическому уравнению (см. справочник [90], 9.151).

423*. При отсутствии поглощения диэлектрическая проницаемость плазмы имеет вид (см. задачу 312*):

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}.$$

Рассмотреть распространение электромагнитной волны в плазме, концентрация которой меняется линейно: $N(z) = N_0 z$. Плоская монохроматическая волна падает на неоднородный слой плазмы нормально. (Такой случай может иметь место при распространении радиоволн в ионосфере.)

УКАЗАНИЕ. Уравнение для $E(z)$ решать путем разложения искомой функции в интеграл Фурье.

424. Построить одномерный волновой пакет Ψ для момента времени $t = 0$, взяв в качестве амплитудной функции кривую Гаусса $a(k) = a_0 \exp\left[-\left(\frac{k - k_0}{\Delta k}\right)^2\right]$, где a_0 , k_0 , Δk — постоянные. Найти связь между шириной пакета Δx и интервалом волновых чисел Δk , вносящих основной вклад в суперпозицию.

425. Волновой пакет Ψ образован суперпозицией плоских волн с разными частотами. Амплитудная функция имеет вид кривой Гаусса $a(\omega) = a_0 \exp\left[-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta \omega}\right)^2\right]$, где a_0 , ω_0 , $\Delta \omega$ — постоянные. Найти зависимость амплитуды пакета от времени в точке $x = 0$. Получить связь между длительностью волнового импульса Δt и интервалом частот $\Delta \omega$.

426. Некоторый объект, освещаемый светом с длиной волны λ , рассматривается в микроскоп. Найти минимальный возможный размер объекта Δx_{\min} , допускаемый условием $\Delta x \cdot \Delta k \geq 1$.

427. Положение некоторого объекта определяется с помощью радиолокации. С какой предельной точностью можно провести это измерение, если расстояние до объекта l , длина волны λ ?

428. Исследовать форму и движение волнового пакета, полученного наложением плоских волн с одинаковыми амплитудами a_0 и с волновыми векторами, лежащими в области $|\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}| \leq q$ (\mathbf{k}_0 , q — постоянные). Действительный закон дисперсии $\omega(\mathbf{k})$ заменить приближенным соотношением $\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_0) + \left.\frac{d\omega}{d\mathbf{k}}\right|_0 \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$.

429*. Исследовать «расплывание» одномерного волнового пакета в диспергирующей среде. Для этого выбрать амплитудную функцию в виде кривой Гаусса $a(k) = a_0 e^{-\alpha(k-k_0)^2}$ и учесть квадратичный член в разложении частоты ω по k .

430. Найти фазовую v_φ и групповую v_g скорости распространения в среде, диэлектрическая проницаемость которой (ср. (VI.12))

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Ограничиться рассмотрением только случаев больших и малых (по сравнению с ω_0) частот ω ($\mu = 1$).

431. Определить скорость переноса энергии одномерным волновым пакетом, движущимся в диспергирующей среде. Показать, что эта скорость совпадает с групповой скоростью v_g .

УКАЗАНИЕ. Скорость переноса энергии v определяется соотношением $\bar{\gamma} = v\bar{\omega}$, где

$$\bar{\omega} = \frac{1}{16\pi} \left[\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} EE^* + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} HH^* \right]$$

— усредненная плотность энергии в диспергирующей среде (см. [66]), $\bar{\gamma}$ — средняя плотность потока энергии.

§ 2. Плоские волны в анизотропных и гиротропных средах

Оптически анизотропными называются такие среды, у которых электрическая и магнитная проницаемости являются тензорами. Оптическая анизотропия может быть следствием кристаллической структуры тела, а также вызываться внешним электрическим полем (см. задачи 313*, 314) или внешними механическими воздействиями. При отсутствии внешнего магнитного поля тензоры $\varepsilon_{ik}(\omega)$ и $\mu_{ik}(\omega)$ ¹ симметричны:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}, \quad \mu_{ik} = \mu_{ki}. \quad (\text{VIII.22})$$

В анизотропной среде в данном направлении могут распространяться с разными фазовыми скоростями две плоские монохроматические волны одной частоты, поляризованные линейно в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Направления, вдоль которых обе волны имеют одинаковые скорости распространения, называются оптическими осями. Направление распространения волны, которое определяется нормалью к волновой поверхности, в общем случае не совпадает с направлением луча (т. е. с направлением вектора Пойнтинга).

¹Мы не рассматриваем эффектов, связанных с пространственной неоднородностью поля, которые приводят к зависимости ε_{ik} и μ_{ik} от волнового вектора \mathbf{k} (см. [66], а также задачу 446).

Кристаллы, у которых два главных значения тензора диэлектрической проницаемости совпадают ($\epsilon^{(1)} = \epsilon^{(2)} = \epsilon_{\perp}$, $\epsilon^{(3)} = \epsilon_{\parallel}$), являются одноосными. Их оптическая ось совпадает с осью $x_3 = z$. Волновые векторы двух волн, распространяющихся под углом θ к оптической оси, имеют в этом случае величины:

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{\perp} \mu}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} \mu}{\epsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \epsilon_{\parallel} \cos^2 \theta}}. \quad (\text{VIII.23})$$

Первая из этих волн называется обыкновенной, в ней векторы индукции \mathbf{D} и напряженности электрического поля \mathbf{E} направлены одинаково и оба перпендикулярны волновому вектору \mathbf{k}_1 и плоскости, проходящей через волновой вектор и оптическую ось (плоскость главного сечения). Вторая волна называется необыкновенной. Вектор \mathbf{D} этой волны лежит в плоскости главного сечения и перпендикулярен ее волновому вектору \mathbf{k}_2 . Вектор \mathbf{E} также лежит в плоскости главного сечения и не совпадает по направлению с \mathbf{D} .

При наличии внешнего постоянного магнитного поля тензоры ϵ_{ik} и μ_{ik} перестают быть симметричными; но в непоглощающих средах, которые только и будут рассматриваться в этом параграфе, они являются эрмитовыми:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}^*, \quad \mu_{ik} = \mu_{ki}^*. \quad (\text{VIII.24})$$

В этом случае связь между напряженностями полей и индукциями можно записать в виде (ср. с задачей 316)

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon}' \mathbf{E} + i(\mathbf{E} \times \mathbf{g}_e), \quad \mathbf{B} = \hat{\mu}' \mathbf{H} + i(\mathbf{H} \times \mathbf{g}_m), \quad (\text{VIII.25})$$

где \mathbf{g}_e и \mathbf{g}_m — векторы гирации (электрический и магнитный), $\hat{\epsilon}' \mathbf{E}$ — вектор с компонентами $\epsilon'_{ik} E_k$. Среда, в которых векторы поля связаны уравнениями (VIII.25), называются гиротропными.

В гиротропной среде в заданном направлении могут распространяться с разными фазовыми скоростями две плоские волны одной частоты. Эти волны поляризованы эллиптически с противоположными направлениями вращения, эллипсы поляризации имеют одинаковое отношение осей и повернуты друг относительно друга на $\pi/2$.

Граничные условия на поверхности анизотропного или гиротропного тела имеют такой же вид, как и на границе раздела изотропных сред (см. (III.9) и (V.6)).

432. Необыкновенная волна распространяется в одноосном кристалле под углом θ к оптической оси. Определить угол α между волновым вектором \mathbf{k} и вектором \mathbf{E} , а также угол ϑ между направлением луча (вектором Пойнтинга) и оптической осью кристалла.

433. Плоская волна падает из вакуума на плоскую поверхность одноосного кристалла. Оптическая ось кристалла нормальна к его поверхности. Найти направления обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле, если угол падения θ_0 .

434. Решить предыдущую задачу для случая, когда оптическая ось кристалла параллельна его поверхности и составляет угол α с плоскостью падения.

435. Плоская монохроматическая волна распространяется в безграничной ферритовой намагниченной до насыщения среде под углом θ к постоянному магнитному полю. Магнитная проницаемость феррита — тензор¹:

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_{\perp} & -i\mu_a & 0 \\ i\mu_a & \mu_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix}$$

(см. задачу 331; ось z направлена вдоль постоянного магнитного поля). Диэлектрическую проницаемость феррита ε можно считать скаляром². Найти фазовые скорости распространения $v_{1,2}$.

436. Плоская монохроматическая волна распространяется в диэлектрике с $\mu = 1$, находящемся в постоянном и однородном магнитном поле. Тензор диэлектрической проницаемости (см. задачу 318) имеет вид

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & -i\varepsilon_a & 0 \\ i\varepsilon_a & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}.$$

Найти фазовые скорости распространения.

437. Исследовать поляризации волн, которые могут распространяться в безграничной ферритовой намагниченной до насыщения среде. Рассмотреть два частных случая распространения:

- а) вдоль постоянного магнитного поля;
- б) перпендикулярно постоянному магнитному полю.

438. Диэлектрик находится во внешнем магнитном поле. Плоская монохроматическая волна распространяется в направлении магнитного поля (ось z) и имеет в точке $z = 0$ линейную поляризацию. Определить поляризацию волны в точке $z \neq 0$.

¹Такой же вид имеет тензор диэлектрической проницаемости газообразного диэлектрика, находящегося во внешнем однородном магнитном поле (см. задачу (318)).

²Это объясняется тем, что влияние постоянного магнитного поля на магнитные свойства феррита значительно сильнее, чем на электрические.

УКАЗАНИЕ. Использовать тензор диэлектрической проницаемости, полученный в задаче 318.

439. Плоская поляризованная по кругу волна падает из вакуума нормально на плоскую границу феррита. Феррит намагничен в направлении падения волны. Определить характер поляризации и амплитуды отраженной и прошедшей волн.

УКАЗАНИЕ. Использовать граничные условия для векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} .

440. Решить предыдущую задачу для случая, когда падающая волна поляризована линейно.

441*. Искусственный диэлектрик состоит из тонких идеально проводящих круглых дисков, ориентированных одинаковым образом и находящихся в вакууме. Перпендикулярно плоскостям дисков приложено постоянное магнитное поле \mathbf{H}_0 и в том же направлении распространяется плоская электромагнитная волна. Определить фазовые скорости распространения, рассматривая диэлектрик как сплошную среду.

УКАЗАНИЕ. Учесть эффект Холла, который возникнет из-за наличия внешнего магнитного поля.

442. Плоская волна падает нормально на плоскую решетку, образованную тонкими параллельными бесконечно длинными проводниками. Расстояния между проводниками и их толщина много меньше длины волны. Какое влияние окажет решетка на распространение волн с различными поляризациями?

443. Рассмотреть возможность распространения продольных колебаний в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$. При таких колебаниях вектор электрического поля \mathbf{E} параллелен волновому вектору. Указать условия, при которых затухание этих колебаний является малым. На какой частоте возможны продольные колебания в плазме (ее диэлектрическая проницаемость вычислена в задаче 312*)?

444. Область $x < 0$ занята плазмой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ (см. задачу 312*), при $x > 0$ — вакуум. Показать, что вдоль границы плазма–вакуум может распространяться поверхностная волна, напряженности поля в которой затухают экспоненциально при удалении от границы. Найти частоту, при которой возможна такая волна, и ее поляризацию. Ограничиться рассмотрением медленной волны ($v_\varphi = \omega/k \ll c$).

445. Ионизованный газ находится в постоянном магнитном поле. Вдоль направления поля распространяется поперечная плоская волна. Найти фазовые скорости распространения. Рассмотреть, в частности, случай

малых частот ($\omega \rightarrow 0$) и исследовать характер электромагнитных волн с учетом движения положительных ионов.

УКАЗАНИЕ. Использовать выражение для тензора диэлектрической проницаемости ионизованного газа в постоянном магнитном поле, полученное в задаче 321*.

446. Определить тензор магнитной проницаемости $\mu_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ ферродиелектрика, не пренебрегая членом $q\nabla^2\mathbf{M}$ в выражении (VI.16) эффективного магнитного поля. Для этого рассмотреть движение вектора намагниченности под действием плоской монохроматической волны. Ферродиелектрик намагничен до насыщения постоянным магнитным полем \mathbf{H}_0 .

УКАЗАНИЕ. Ограничиться случаем малых амплитуд, линеаризовать уравнение движения вектора намагниченности.

447. Найти с учетом члена $q\nabla^2\mathbf{M}$ в выражении (VI.16) для $\mathbf{H}_{\text{эфф}}$ дисперсионное уравнение электромагнитных волн, распространяющихся в изотропной, намагниченной до насыщения ферродиелектрической среде. Показать, что в такой среде могут распространяться три типа волн с разными законами дисперсии $\omega(\mathbf{k})$. Определить явный вид зависимости $\omega(\mathbf{k})$ для того типа волн, у которого может выполняться условие $\frac{\omega^2 \epsilon}{(ck)^2} \ll 1$. Оценить относительную величину электрического и магнитного полей для этой ветви колебаний.

448. Определить поверхностный импеданс ζ ферромагнитного проводника, находящегося в постоянном магнитном поле, параллельном его поверхности. Тензор магнитной проницаемости приведен в условии задачи 435, а компоненты тензора электропроводности равны $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_1$, $\sigma_{33} = \sigma_3$, $\sigma_{12} = -\sigma_{21} = -i\sigma_2$, $\sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$.

УКАЗАНИЕ. Поверхностный импеданс в данном случае — тензор Π ранга и должен быть определен из условия (ср. (VIII.10))

$$E_{\tau i} = \zeta_{ik}(\mathbf{H}_{\tau} \times \mathbf{n})_k,$$

где $i, k = 1, 2$, \mathbf{E}_{τ} и \mathbf{H}_{τ} — касательные составляющие векторов поля вблизи поверхности проводника, \mathbf{n} — орт нормали к поверхности.

449. Решить предыдущую задачу для случая, когда постоянное магнитное поле нормально к поверхности ферромагнитного проводника.

§ 3. Рассеяние электромагнитных волн на макроскопических телах. Дифракция

Точное решение задачи о дифракции электромагнитной волны на проводящем или диэлектрическом теле сводится к интегрированию уравне-

ний Максвелла при соответствующих граничных условиях. Оно возможно в немногих случаях (см., например, задачи 450*, 457*). В ряде случаев может быть найдено приближенное решение.

Если линейные размеры тела малы по сравнению с длиной волны, то электромагнитное поле вблизи тела можно считать однородным. Тело, находящееся в однородном периодическом поле, приобретет электрический и магнитный моменты, которые будут зависеть от времени по тому же закону, что и внешнее поле.

Рассеянная волна возникает в результате излучения этими переменными моментами. Задача о рассеянии электромагнитных волн на теле малых размеров сводится к определению дипольных моментов, которые приобретает тело. Поля излучения выражаются через дипольные моменты по формулам (XII.17) и (XII.20).

Эффективным дифференциальным сечением рассеяния в телесный угол $d\Omega$ называется отношение

$$d\sigma_s = \frac{dI(\vartheta, \alpha)}{\bar{\gamma}_0}. \quad (\text{VIII.26})$$

Здесь $dI = \bar{\gamma} dS = \bar{\gamma} r^2 d\Omega$ — средняя (по времени) интенсивность излучения в телесный угол $d\Omega$; $\bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma}_0$ — средние плотности потока энергии в рассеянной и падающей волнах. Плотность потока энергии описывается вектором Пойнтинга

$$\gamma = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (\text{VIII.27})$$

Эффективным сечением поглощения называется отношение средней энергии, поглощаемой телом в единицу времени, к средней плотности потока энергии в падающей волне:

$$\sigma_a = \frac{Q}{\bar{\gamma}_0}. \quad (\text{VIII.28})$$

В противоположном предельном случае, когда длина волны много меньше размеров тела, применимы методы геометрической оптики. При дифракции электромагнитной волны на отверстии в бесконечном непрозрачном экране амплитуда дифрагированного поля в приближении геометрической оптики описывается формулой

$$u_P = \frac{k}{2\pi i} \int \frac{u}{R} e^{ikR} dS_n, \quad (\text{VIII.29})$$

которая может быть выведена на основе принципа Гюйгенса. Здесь u_P — поле в точке P за экраном (рис. 25), u — поле на участке dS поверхности

отверстия (это поле предполагается таким же, как при отсутствии экрана, т. е. неискаженным), dS_n — проекция элемента dS поверхности отверстия на направление луча, пришедшего из источника света O в dS , R — расстояние от dS до точки P , k — абсолютная величина волнового вектора световой волны.

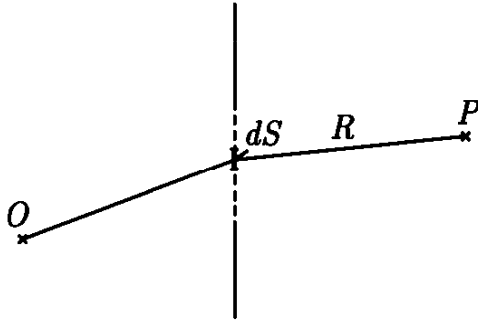


Рис. 25

Источник света O и точка наблюдения P могут находиться как на конечных, так и на бесконечно больших расстояниях от экрана. Случай, когда точки O и P , или хотя бы одна из них, находятся на конечном расстоянии от экрана, носит название дифракции Френеля.

Если обе точки O и P находятся на очень больших расстояниях от экрана, то лучи света, идущие от источника к отверстию и от отверстия в точку наблюдения, можно считать параллельными. В этом случае, который носит название дифракции Фраунгофера, формула (VIII.29) может быть преобразована:

$$u_P = \frac{u_0 e^{ikR_0}}{2\pi i R_0} \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} dS_n. \quad (\text{VIII.30})$$

Здесь \mathbf{k} и \mathbf{k}' — волновые векторы падающего и дифрагированного света, R_0 — расстояние от отверстия до точки наблюдения, u_0 — амплитуда поля на отверстии.

Интенсивность дифрагированного света пропорциональна квадрату модуля $|u_P|^2$.

В случае дополнительных¹ экранов имеет место принцип Бабине [55]: пусть u_1 и u_2 — волновые поля в некоторой точке, соответствующие двум дополнительным экранам, u — неискаженное волновое поле в той же точке при отсутствии экранов, тогда

$$u_1 + u_2 = u. \quad (\text{VIII.31})$$

Формулы (VIII.29) и (VIII.30) не учитывают поляризации электромагнитных волн (амплитуда u предполагается скалярной, а не векторной величиной). Дифракционная формула, учитывающая векторный характер электромагнитного поля, может быть записана в виде

$$\mathbf{E}_P = -\frac{ik}{4\pi R} \int \{ \mathbf{n}_0 \times \mathbf{H} - \mathbf{n}[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{H})] + \mathbf{n} \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}) \} e^{ikr} dS. \quad (\text{VIII.32})$$

¹ Дополнительным называется экран, имеющий отверстия там, где другой экран не прозрачен, и не прозрачный там, где другой экран имеет отверстия.

В этой формуле \mathbf{E} и \mathbf{H} — значения полей на поверхности отверстия, \mathbf{E}_P — электрическое поле на большом расстоянии от экрана (в волновой зоне), \mathbf{n} — единичный вектор в направлении распространения дифрагированной волны, \mathbf{n}_0 — орт нормали к поверхности отверстия, направленный в сторону точки наблюдения, r — расстояние от dS до точки наблюдения, R — расстояние от начала координат (выбранного на отверстии) до точки наблюдения.

Магнитное поле в волновой зоне выражается через электрическое по обычной формуле:

$$\mathbf{H}_P = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_P.$$

450*. На бесконечный круговой идеально проводящий цилиндр радиуса a , находящийся в вакууме, падает плоская монохроматическая волна в направлении, перпендикулярном оси цилиндра. Вектор \mathbf{E}_0 падающей волны параллелен оси цилиндра. Определить результирующее поле, распределение тока по поверхности цилиндра и полный ток \mathcal{I} , текущий вдоль цилиндра.

451. Найти дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma_s$ электромагнитной волны (диаграмму направленности вторичных волн) цилиндром, рассмотренным в задаче 450*. Найти также полное сечение рассеяния σ_s .

452*. Плоская монохроматическая волна падает на идеально проводящий круговой цилиндр так, что ее магнитный вектор $\mathbf{H}_0 = \mathcal{H}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ параллелен, а волновой вектор \mathbf{k} перпендикулярен оси цилиндра. Цилиндр находится в вакууме. Найти результирующее электромагнитное поле. Рассмотреть, в частности, случай тонкого ($ka \leq 1$) цилиндра, определить дифференциальное $d\sigma_s$ и полное σ_s сечения рассеяния для этого случая.

453. Пусть $d\sigma_{\parallel}$ и $d\sigma_{\perp}$ — дифференциальные сечения рассеяния на бесконечном цилиндре плоской волны с вектором \mathbf{E} , направленным соответственно параллельно и перпендикулярно оси цилиндра. Найти дифференциальное сечение $d\sigma'_s$ рассеяния волны, у которой вектор \mathbf{E} составляет с осью цилиндра угол φ , а также дифференциальное сечение $d\sigma''_s$ рассеяния неполяризованной волны.

УКАЗАНИЕ. Использовать принцип суперпозиции полей.

454. неполяризованная плоская волна рассеивается на идеально проводящем тонком ($ka \ll 1$) цилиндре. Определить степень деполяризации ρ рассеянных волн в зависимости от угла рассеяния.

455*. Решить задачу 452* о дифракции плоской волны на бесконечном цилиндре, не предполагая цилиндр идеально проводящим, но считая его поверхностный импеданс ζ малым. Воспользоваться приближенным граничным условием Леонтовича (VIII.10).

456. Определить среднюю потерю энергии Q и сечение поглощения σ_a на единицу длины цилиндра, рассмотренного в предыдущей задаче. Исследовать, в частности, случай $ka \ll 1$ и объяснить получающийся результат.

457*. Рассмотреть дифракцию плоской монохроматической волны на диэлектрическом цилиндре. Цилиндр радиуса a с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ находится в вакууме. Волна падает нормально к образующей цилиндра, вектор \mathbf{E} параллелен его оси. Определить результирующее поле.

458*. Линейно поляризованная плоская монохроматическая волна рассеивается на шаре, радиус которого a много меньше длины волны λ . Выразить составляющие электромагнитного поля рассеянного излучения в волновой зоне через электрическую и магнитную поляризуемости шара. Определить эффективное дифференциальное сечение рассеяния.

УКАЗАНИЕ. В силу условия $a \ll \lambda$ считать внешнее поле вблизи шара однородным и рассмотреть излучение индуцированных электрического \mathbf{p} и магнитного \mathbf{m} дипольных моментов.

459. Вычислить дифференциальное $d\sigma_s$ и полное σ_s сечения рассеяния, а также степень деполяризации ρ вторичного излучения при рассеянии неполяризованной волны шаром, радиус которого a много меньше длины волны λ . Результат выразить через электрическую β_e , и магнитную β_m поляризуемости шара.

460. Используя результаты предыдущей задачи, определить дифференциальное $d\sigma_s$ и полное σ_s сечения рассеяния неполяризованного света малым диэлектрическим шаром с проницаемостью ϵ ($\mu = 1$), а также степень деполяризации ρ рассеянного света. Построить графики зависимости этих величин от угла рассеяния θ . Указать условие применимости полученных формул. Решить ту же задачу для идеально проводящего шара с $\mu = 1$.

461. Плоская монохроматическая волна падает под углом $\frac{\pi}{2} - \alpha$ на идеально проводящий тонкий диск, радиус которого a много меньше длины волны λ . Определить дифференциальное $d\sigma_s$ и полное σ_s сечения рассеяния при различных поляризациях падающей волны, а также сечение рассеяния неполяризованной волны.

462. В однородном диэлектрике с проницаемостью ϵ ($\mu = 1$) вырезана полость, имеющая форму тонкого диска радиуса a , толщиной $2h$. Нормально к плоскости полости падает неполяризованный свет с длиной волны $\lambda \gg a$. Найти дифференциальное $d\sigma_s$ и полное σ_s сечения рассеяния.

463*. Найти дифференциальное и полное сечения рассеяния плоской волны длиной λ на идеально проводящем цилиндре высотой $2h$ и радиуса $a \ll h \ll \lambda$. Исследовать различные случаи поляризации падающей волны. Цилиндр аппроксимировать вытянутым эллипсоидом вращения с полуосями a и h .

УКАЗАНИЕ. Использовать решения задач 197, 198, 390*.

464. Решить предыдущую задачу для диэлектрического цилиндра, высота которого $2h$ много меньше длины волны λ внутри цилиндра,

465*. Плоская монохроматическая волна $\mathcal{E}_0 \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$ рассеивается на диэлектрическом шаре радиуса a , поляризуемость которого $(\epsilon - 1)/4\pi \ll 1$ ($\mu = 1$). Вследствие малой поляризуемости поляризация шара в первом приближении пропорциональна полю падающей волны. Определить дифференциальное сечение рассеяния и степень деполяризации ρ рассеянного излучения. Какой характер приобретает рассеяние в случае очень большого шара ($ka \gg 1$)?

466. Определить полное сечение рассеяния σ_s диэлектрической сферой, рассмотренной в предыдущей задаче, в предельном случае $ka \gg 1$. Сравнить со случаем $ka \ll 1$.

467*. Плоская монохроматическая волна рассеивается некоторой системой зарядов (например, макроскопическим телом). Электрическое поле на больших расстояниях от рассеивателя имеет вид

$$\mathbf{E} = E_0 \left[\mathbf{e} e^{i\mathbf{k}\mathbf{z}} + \mathbf{F}(\mathbf{n}) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r} \right],$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$, $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}_0}{E_0}$, $k = \frac{\omega}{c}$, E_0 — амплитуда падающей волны, $\mathbf{F}(\mathbf{n})$ — амплитуда рассеяния — функция, характеризующая свойства рассеивателя и зависящая от частоты. Доказать соотношение («оптическую теорему»):

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im}[\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{n}_0)].$$

Здесь $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a$ — полное сечение взаимодействия волны с системой зарядов, равное сумме сечений рассеяния σ_s и поглощения σ_a , $\mathbf{F}(\mathbf{n}_0)$ — амплитуда рассеяния «вперед», т. е. в направлении распространения падающей волны.

468*. Плоская монохроматическая волна падает на макроскопическую частицу, размер которой много меньше длины волны λ . Электрическая и магнитная поляризуемости частицы: $\beta_e = \beta'_e + i\beta''_e$ и $\beta_m = \beta'_m + i\beta''_m$ — комплексны, поэтому наряду с рассеянием происходит поглощение электромагнитной энергии. Вычислить сечение поглощения σ_a .

УКАЗАНИЕ. Поглощаемая в единицу времени энергия равна потоку вектора Пойнтинга через поверхность сферы большого радиуса, окружающей частицу.

469. Вычислить сечение поглощения электромагнитной волны проводящим шаром σ_a с малым поверхностным импедансом $\zeta = \zeta' + i\zeta''$. Радиус шара b мал по сравнению с длиной волны λ .

470. Плоская монохроматическая волна падает на макроскопическое тело. Сечение поглощения волны телом σ_a и дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma_s/d\Omega$ — известны. Выразить через них среднюю по времени силу \bar{F} , действующую на тело со стороны волны.

471*. Определить среднюю силу \bar{F} , которая действует на малый шар радиуса a , находящийся в поле плоской монохроматической волны. Рассмотреть случаи идеально проводящего шара и диэлектрического шара с диэлектрической проницаемостью ϵ (магнитная проницаемость $\mu = 1$). Амплитуда падающей волны E_0 .

472. Точечный источник света расположен на оси, проходящей через центр круглого непрозрачного экрана радиуса a перпендикулярно его плоскости. Считая выполненным условие применимости геометрической оптики ($\lambda \ll a$), найти интенсивность света I в симметричной относительно экрана точке P .

473. В предыдущей задаче рассмотреть дифракцию на дополнительном экране (т. е. на круглом отверстии в бесконечном непрозрачном экране).

474. Параллельный пучок света падает на круглое отверстие в непрозрачном экране перпендикулярно его плоскости. Найти распределение интенсивности света I на средней линии за экраном.

475. Найти угловое распределение интенсивности света dI при Дифракции Фраунгофера на кольцевом отверстии (радиусы $a > b$) в бесконечном непроницаемом экране. Начальный пучок света падает нормально к плоскости отверстия. Рассмотреть частный случай дифракции на круглом отверстии.

476. Найти угловое распределение интенсивности света dI при наклонном падении параллельного пучка на круглое отверстие (дифракция Фраунгофера).

477. Плоская линейно поляризованная волна падает на прямоугольное отверстие $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ в бесконечном тонком экране нормально к его плоскости. Амплитуды электрического и магнитного полей имеют составляющие $E_y = E_0$, $H_x = -E_0$, $H_y = E_x = 0$. Определить поле излучения из отверстия, а также угловое распределение излучения dI .

478. Плоская линейно поляризованная волна $E_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ падает на круглое отверстие радиуса a в бесконечном тонком экране нормально к его плоскости. Определить поле излучения из отверстия и угловое распределение интенсивности излучения dI .

§ 4. Когерентность и интерференция

Детекторы электромагнитного излучения в оптическом диапазоне реагируют на интенсивность I излучения, которая является усредненной по времени квадратичной функцией компонент поля

$$I = \overline{|u|^2} = \frac{1}{T} \int_0^T |u|^2 dt.$$

Это усреднение выражает тот факт, что время T срабатывания детекторов составляет не менее чем 10^{-10} сек (в исключительных случаях до 10^{-13} сек), а характерный период оптических колебаний $10^{-15} \div 10^{-16}$ сек.

В связи с этим наблюдаться может только такая интерференционная картина, которая существует достаточно стабильно в течение промежутка времени, большего чем T . Это усложняет наблюдение интерференции волн в оптическом диапазоне.

Тепловые, люминесцентные, тормозные источники света состоят, как правило, из большого количества независимых (некогерентных) излучателей, испускающих свет не согласованно по фазе и поляризации. Почти полное согласование достигается в квантовых оптических генераторах (лазерах), в которых главную роль играет вынужденное излучение света. Однако и в этом случае имеются флуктуации фазы и поляризации из-за спонтанного излучения и рассеяния на различных флуктуирующих неоднородностях.

Для наблюдения стабильной интерференционной картины обычно приходится прибегать к расщеплению волнового поля каждого из независимых излучателей (и источника в целом) на несколько пучков. Если образовавшиеся после расщепления волновые пакеты снова перекрываются, пройдя разные оптические пути, то в области их перекрытия может возникнуть интерференционная картина, если выполняются определенные условия когерентности.

Эти условия сводятся к требованию, чтобы интерференционные картины от различных независимых источников не замазывали друг друга.

Выделяют два простейших случая когерентности (подробнее см., например, [18], [84], [27], [120]).

1) *Временная когерентность*. Интерференция волновых пакетов может произойти, только если время τ запаздывания одного из пакетов будет меньше, чем время Δt жизни отдельного излучателя. По порядку величины $\Delta t \sim 1/\Delta\nu$, где $\delta\nu = \Delta\omega/2\pi$ — спектральный интервал излучаемых атомами частот (см. задачи 482–484). Вместо времени Δt когерентности можно рассматривать продольный размер l_{\parallel} области когерентности (длина когерентности):

$$l_{\parallel} = c\Delta t \sim \frac{c}{\Delta\nu} \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}, \quad (\text{VIII.33})$$

где $\Delta\vartheta$ — длина излучаемой квазимонохроматической волны, $\Delta\lambda$ — разброс длин волн, связанный со спектральной шириной соотношением $\Delta\lambda = (\lambda^2/c)\Delta\nu$.

2) *Пространственная когерентность*. Если источник является протяженным, то интерференционные картины от независимых излучателей, находящихся в разных достаточно удаленных друг от друга точках источника, могут взаимно смазываться, налагаясь друг на друга. Поле сохраняет когерентность в окрестностях точки наблюдения в области, поперечные размеры которой

$$l_{\perp} \sim \frac{\lambda}{\Delta\vartheta} \sim \lambda \frac{R}{L}, \quad (\text{VIII.34})$$

где $\Delta\vartheta$ — угловой размер источника, L — поперечный размер источника, R — расстояние от него до точки наблюдения. Продольный размер l_{\parallel} области когерентности определяется формулой (VIII.33).

Объемом когерентности называется величина

$$\Delta V = l_{\perp}^2 l_{\parallel} \sim \left(\frac{R}{L}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right) \cdot \lambda^3. \quad (\text{VIII.35})$$

Параметром δ вырождения излучения называется среднее число фотонов (квантов света), пересекающих площадь когерентности l_{\perp}^2 за время когерентности $\Delta t = 1/\Delta\nu$:

$$\delta = l_{\perp}^2 \frac{\gamma}{\hbar\omega} \Delta t = \frac{\Delta V \cdot \gamma}{c\hbar\omega}, \quad (\text{VIII.36})$$

где γ — плотность потока энергии излучения, приходящаяся на интервал частот $\Delta\nu$, $\hbar\omega = 2\pi\hbar\nu$ — энергия одного фотона, $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27}$ эрг·сек —

постоянная Планка. Параметр вырождения характеризует важное свойство квантовых излучателей: способность к вынужденному или стимулированному излучению. Это свойство состоит в том, что интенсивность излучения от излучателей, находящихся в электромагнитном поле, пропорциональна $1 + \delta$ и увеличивается с ростом δ .

Пусть поле $u(\mathbf{r}, t)$ в точке наблюдения \mathbf{r} в момент t выражается, согласно принципу Гюйгенса, через поля в точках $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ в моменты времени $t - t_1, t - t_2$:

$$u(\mathbf{r}, t) = A_1 u(\mathbf{r}_1, t - t_1) + A_2 u(\mathbf{r}_2, t - t_2). \quad (\text{VIII.37})$$

Здесь $t_1 = s_1/c, t_2 = s_2/c, s_1 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|, s_2 = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|, A_1, A_2$ — множители, зависящие от геометрии схемы и размеров отверстий, расположенных вблизи точек, радиусы-векторы которых \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 .

Тогда наблюдаемую усредненную интенсивность в точке \mathbf{r} в момент t при стационарном режиме можно записать в виде

$$I(\mathbf{r}) = \overline{u^*(\mathbf{r}, t)u(\mathbf{r}, t)} = I_1(\mathbf{r}) + 2\sqrt{I_1(\mathbf{r})I_2(\mathbf{r})} \operatorname{Re} \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau). \quad (\text{VIII.38})$$

В этой формуле $\tau = (s_1 - s_2)/c$, величины

$$I_i(\mathbf{r}) = |A_i|^2 \overline{|u(\mathbf{r}_i, t - t_i)|^2} = |A_i|^2 I(\mathbf{r}_i)$$

представляют собой интенсивности в точке \mathbf{r} , если открыто только одно i -е отверстие. Функция $\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ называется комплексной степенью когерентности (или коэффициентом частичной когерентности) и определяется следующим образом:

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{\sqrt{I_1(\mathbf{r})I_2(\mathbf{r})}}, \quad (\text{VIII.39})$$

где

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \overline{u(\mathbf{r}_1, t)u^*(\mathbf{r}_2, t + \tau)} \quad (\text{VIII.40})$$

— корреляционная функция полей в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 в моменты t и $t + \tau$. Случаю пространственной когерентности соответствует $\tau = 0$.

Понятие корреляционной функции и определения (VIII.39), (VIII.40) сохраняют свой смысл независимо от описанного здесь способа изучения когерентных свойств поля с помощью двух отверстий. Можно любым способом разделить световой пучок от точечного источника на два пучка с интенсивностями I_1 и I_2 и осуществить задержку одного из них на время τ относительно другого. Если затем соединить опять эти пучки и наблюдать в малой области около точки \mathbf{r} усредненную по t интенсивность

результатирующего поля, то эта интенсивность будет описываться формулой вида (VIII.38), корреляционная функция — формулой (VIII.40), а коэффициент частичной когерентности — формулой (VIII.39) с $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$. Функция $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau)$ называется автокорреляционной функцией поля в точке с радиусом-вектором \mathbf{r} в моменты t и $t + \tau$.

Коэффициент частичной когерентности удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \tau| \leq 1.$$

Нижняя граница этих неравенств отвечает полностью некогерентному свету, для которого $I(\mathbf{r}) = I_1(\mathbf{r}) + I_2(\mathbf{r})$, верхняя же граница — полностью когерентному свету. За меру резкости интерференционных полос принимается видимость по Майкельсону:

$$B(\mathbf{r}) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \tau|^2 \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}. \quad (\text{VIII.41})$$

Положение максимумов усредненной интенсивности определяется условием

$$\begin{aligned} \arg \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \tau &= 2n\pi, \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Если в поле когерентной световой волны находится некоторый предмет, рассеивающий эту волну, то в области наложения рассеянного поля на поле основной («опорной») волны образуется интерференционная картина, интенсивность которой в каждой точке этой области зависит как от интенсивностей, так и от разности фаз рассеянной и опорной волн. Эту картину можно отобразить на фотопластинке, а затем использовать эту фотопластинку как дифракционную решетку, пропуская через нее когерентный свет. Интенсивность I' света, прошедшего через проявленную фотопластинку в данной ее точке (x, y) при освещении пластинки светом, распределенным с интенсивностью $I(x, y)$, пропорциональна $I(x, y)$:

$$I'(x, y) = T(x, y)I(x, y)$$

и зависит от степени почернения фотопластинки, характеризуемой «пропусканием» $T(x, y)$. Пропускание зависит от интенсивности $I_0(x, y)$ первичного поля, вызвавшего почернение, и от контрастности фотоэмульсии, характеризуемой законом

$$T(x, y) \propto [I_0(x, y)]^{-\gamma/2},$$

где γ — коэффициент контрастности фотоэмульсии.

Фотопластинка, на которой изображена картина интерференции опорной волны с волной, рассеянной от предмета, называется голограммой. Оказывается, что при пропускании через голограмму когерентного света за нею образуется объемное изображение первоначального предмета. Процесс такого восстановления первичного волнового поля называется голографией (см., например, [99], [84]) и иллюстрируется задачами 495–499.

Приведем некоторые астрономические постоянные, используемые в решениях задач:

Среднее расстояние от Земли до Солнца	$1,50 \cdot 10^8 \text{ км}$
Диаметр Солнца	$1,39 \cdot 10^6 \text{ км}$
Световой год	$9,46 \cdot 10^{12} \text{ км}$
Парсек	$30,8 \cdot 10^{12} \text{ км}$

479. Вывести оценочное выражение (VIII.34) для поперечной длины l_{\perp} когерентности. Исходить из того, что интерференционные картины, создаваемые излучателями, находящимися в разных точках протяженного квазимонохроматического источника с поперечником L , не должны замазывать друг друга в пределах области когерентности. Расстояние до источника R , длина волны λ .

480. Вывести оценочную формулу (VIII.36) для параметра вырождения δ .

481. Квазимонохроматический источник имеет поперечный размер L и испускает свет с длиной волны λ . Оценить порядок величины того телесного угла $\Delta\Omega$, в котором его излучение когерентно.

482. Каковы поперечная и продольная длина, а также телесный угол и объем когерентности излучения, испускаемого атомами натрия, находящимися в атмосфере Солнца. Наблюдается (на Земле) спектральная линия с длиной волны $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$, масса атома $m = 3,7 \cdot 10^{-23}$. Главный вклад в ширину спектральной линии дает тепловое движение атомов (температура $T \approx 6000 \text{ К}$).

УКАЗАНИЕ. Доплеровская ширина спектральной линии

$$\gamma_D = \sqrt{\frac{8\pi^2 kT}{m\lambda_0^2}},$$

где k — постоянная Больцмана (см. задачу 795).

483. Как изменятся результаты предыдущей задачи, если с Земли наблюдается звезда типа Солнца, находящаяся на расстоянии 10 световых лет?

484. Определить продольную и поперечную длины, а также объем когерентности в непосредственной близости от квантового оптического генератора, работающего на длине волны $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ см с разбросом частот $\Delta\nu = 10^2$ гц. Диаметр зеркал $D = 5$ см.

485. Найти параметр вырождения δ излучения абсолютно черного тела, находящегося при температуре T . Сделать численные оценки для $\lambda = 1$ см и $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см при $T = 273^\circ$ и для $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см при $T = 10\,000^\circ$.

УКАЗАНИЕ. Спектральная плотность энергии излучения черного тела

$$I_\nu = \frac{4\pi\nu^2\hbar\omega}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp \frac{2\pi\hbar\nu}{kT} - 1},$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град — постоянная Больцмана.

486. Найти параметр вырождения для квантового оптического генератора, рассмотренного в задаче 484. Мощность излучения 200 вт. Какой эффективной температуре отвечает это значение δ ?

487. Связать автокорреляционную функцию $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \tau) = \overline{u(\mathbf{r}, t)u^*(\mathbf{r}, t + \tau)}$ со спектром мощности $I(\omega)$ излучения. Интенсивность излучения $I = \overline{u^*(t)u(t)} = \int_0^\infty I(\omega) d\omega$.

488. Найти автокорреляционную функцию излучения, если линия испускания узкая и имеет прямоугольную форму в интервале шириной $\Delta\omega$ около ω_0 . Интенсивность излучения I .

489. В интерференционном опыте Юнга наблюдается интерференционная картина в области перекрытия пучков, дифрагировавших на двух отверстиях (рис. 26). Отверстия расположены на расстоянии D друг от друга в точках с координатами $(0, 0)$ и (x, y) . Источник света протяженный, его размер значительно превышает D и он находится на расстоянии R от отверстий ($R \gg D$). Свет достаточно монохроматичен, так что для каждого из независимых излучателей выполняется условие временной когерентности. Выразить коэффициент частичной когерентности через распределение интенсивности $I(x, y)$ излучения по поперечнику источника света.

490. Звездный интерферометр Майкельсона представляет собой вариант интерференционной схемы Юнга, в которой расстояние между отверстиями может изменяться. Найти зависимость видимости V интерференционных полос в интерферометре Майкельсона от расстояния D между отверстиями и от длины волны λ для двух случаев.

а) Наблюдается двойная звезда — система двух близких звезд, находящихся на угловом расстоянии α друг от друга. Каждую из звезд можно рассматривать как точечный источник света. Считать светимости обеих звезд одинаковыми.

б) Наблюдается одиночная звезда больших размеров с угловым поперечником α (можно рассматривать эту звезду как равномерно излучающий диск).

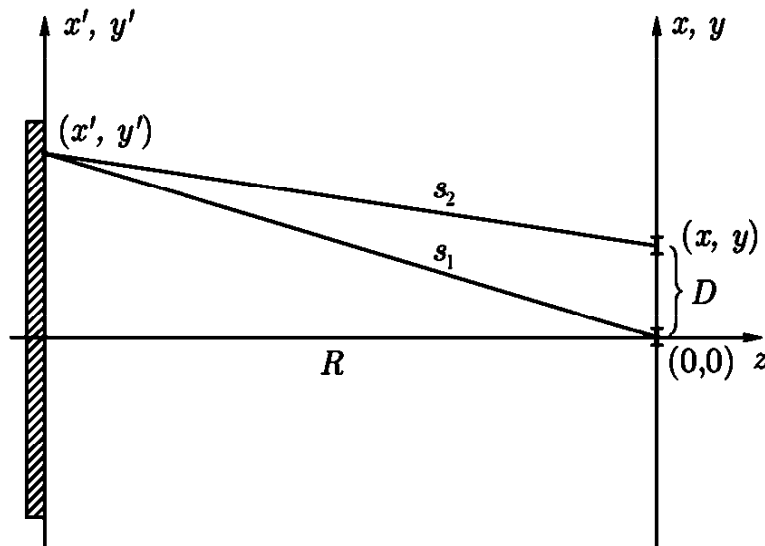


Рис. 26

491. В звездный интерферометр Майкельсона, рассмотренный в предыдущей задаче, поступает свет от двойной звезды или от одиночной звезды больших размеров. При увеличении расстояния D между отверстиями видимость интерференционных полос ослабевает и при некотором значении $D = D_0$ обращается в нуль. Определить: а) расстояние ρ между компонентами двойной звезды Капелла, находящейся от нас на расстоянии $R = 44,6$ световых лет, если $D_0 = 70,8$ см, а наблюдение ведется на длине волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см; б) диаметр d звезды Бетельгейзе, расстояние до которой составляет 652 световых года, если $D_0 = 720$ см, а $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ см.

УКАЗАНИЕ. Первый ненулевой корень функции Бесселя $I_1(x)$ равен $x_1 = 3,8317$.

492. В интерферометре Брауна и Твисса (рис. 27) независимо детектируются, а затем перемножаются и регистрируются интенсивности света, идущего от двух удаленных некогерентных точечных источников или от различных точек одного протяженного источника. Волны, идущие от источников, можно считать плоскими (волновые векторы \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2), их амплитуды и фазы флуктуируют случайным образом. Показать, что с помощью интерферометра Брауна и Твисса можно путем наблюдения корреляции между интенсивностями измерять угловое расстояние между источниками.

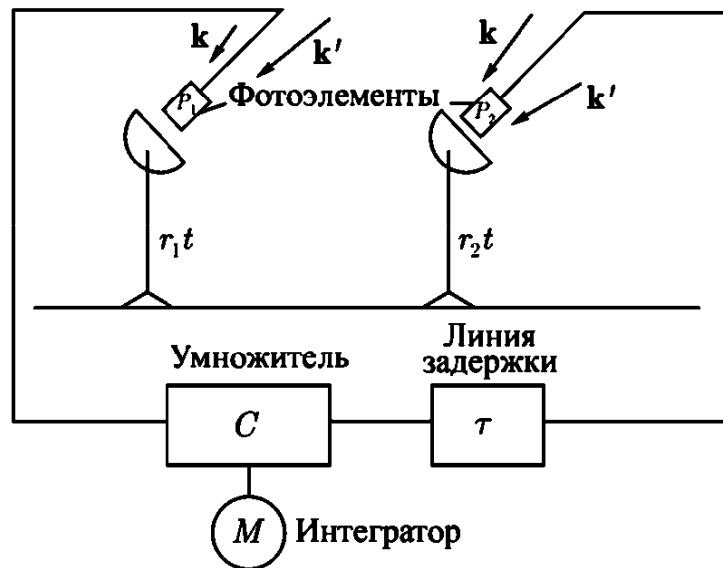


Рис. 27

493. Плоская волна (длина волны λ) падает почти нормально на боковую поверхность тонкой призмы с углом $\alpha \ll 1$ при вершине и показателем преломления n . Найти зависимость от x (рис. 28а) фазового сдвига, который приобретает волна в плоском слое $ABCD$, часть которого занята призмой.

494. Плоская волна падает на тонкую собирающую или рассеивающую линзу с радиусами кривизны R_1 , R_2 и показателем преломления n (рис. 28б). Длина волны λ , угол между волновым вектором и оптической осью линзы мал. Найти зависимость от x фазового сдвига, приобретаемого волной в плоском слое $ABCD$, часть которого занята линзой.

495. Монохроматическая плоская волна (длина волны λ) от квантового оптического генератора падает на бизеркало Френеля (рис. 29) с углом $\vartheta \ll 1$ между плоскостями зеркал. В области перекрытия двух плоских волн, идущих от бизеркала, образуется интерференционное волновое поле. На фотопластинке, помещенной в эту область и образующей угол $\vartheta_1 \ll 1$

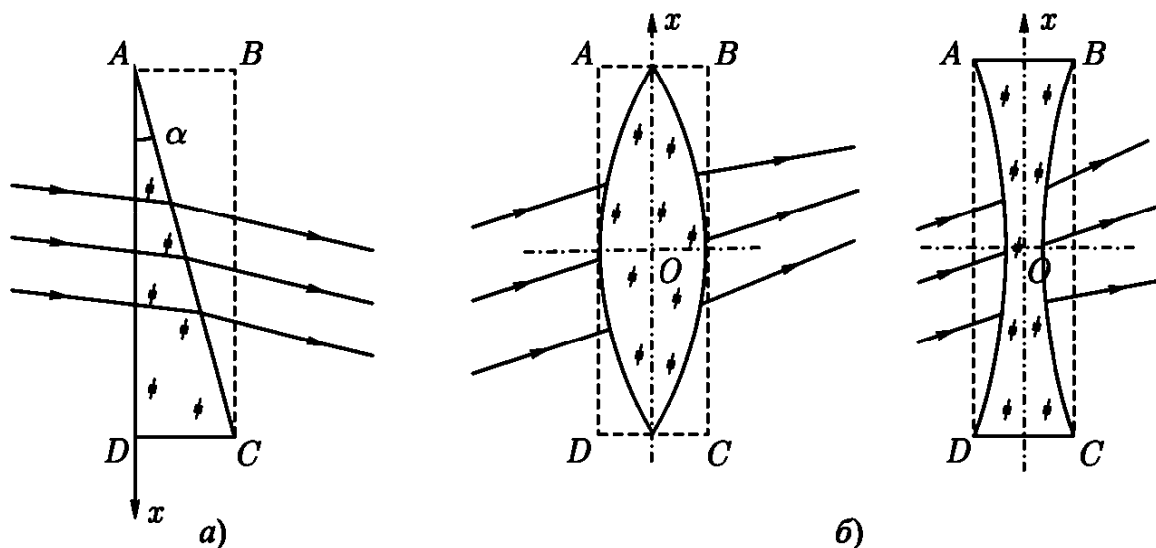


Рис. 28

с фронтом одной из волн, возникает система прозрачных и темных интерференционных полос. Какое волновое поле образуется за этой фотопластинкой, если после проявления пропустить сквозь нее нормально к поверхности плоскую волну от того же самого оптического генератора?

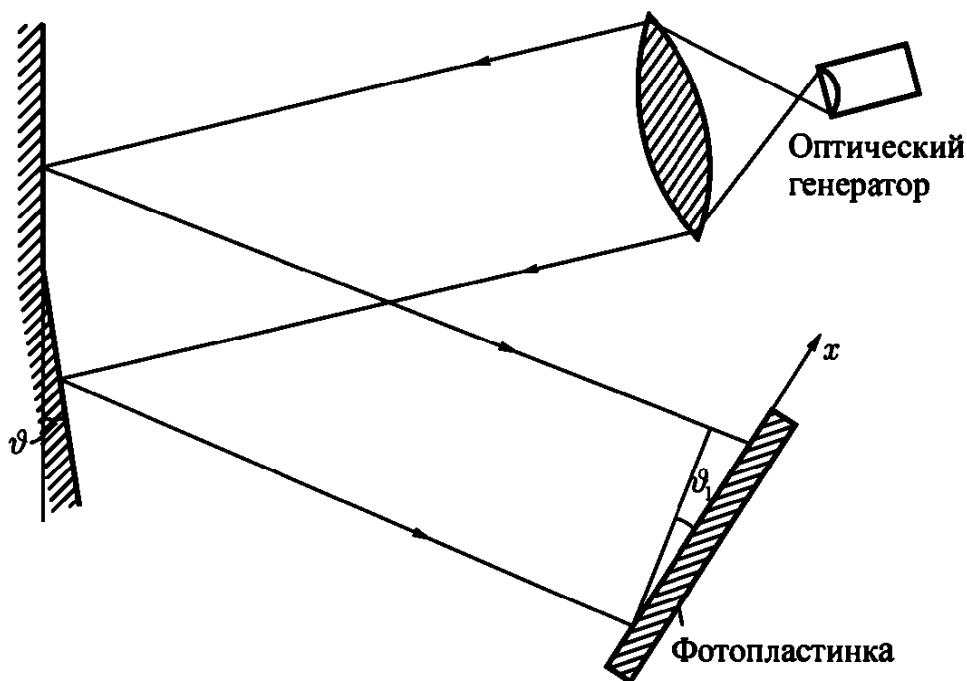


Рис. 29

496. Плоская монохроматическая волна проходит одновременно через призму и отверстие в непрозрачном экране, находящемся на расстоянии f (рис. 30). Призма тонкая, преломляющий угол $\alpha \ll 1$, а показатель преломления ее вещества n . На фотопластинке возникает некоторое распределение интенсивности поля за счет интерференции между «опорной» плоской волной (часть волны, прошедшая через призму и отклоненная вниз) и волной, дифрагировавшей на отверстии (угол дифракции считать малым). Найти это распределение.

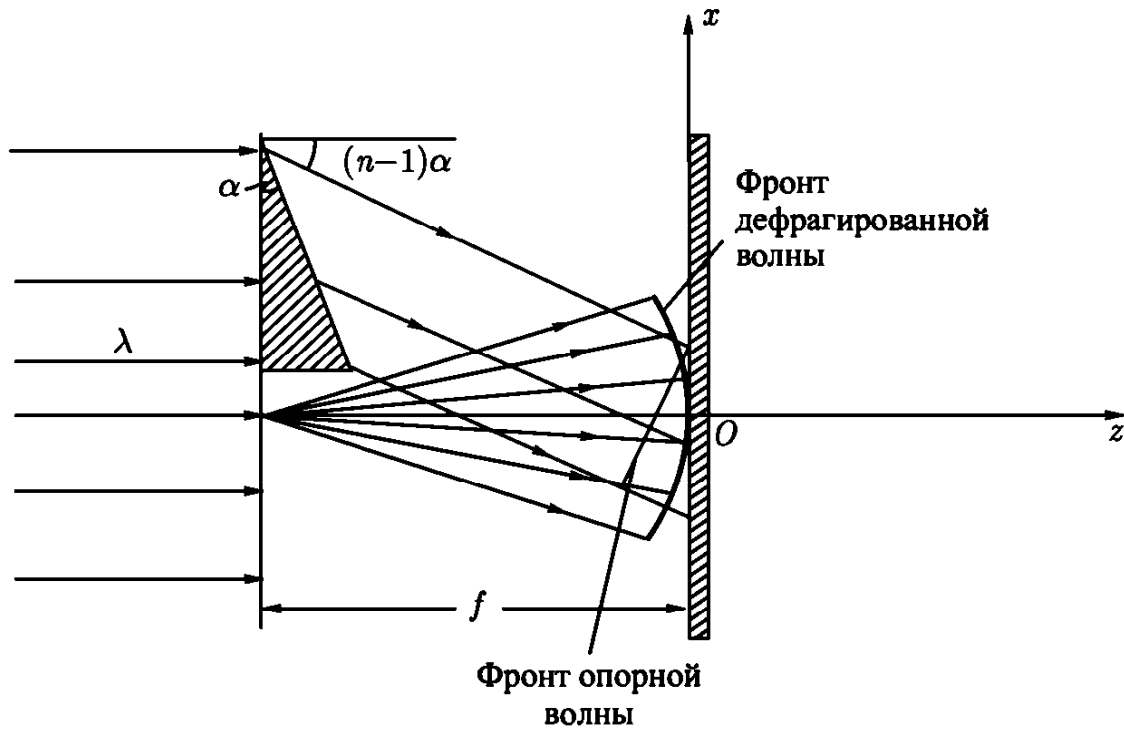


Рис. 30

497. Найти распределение пропускания $T(x)$ сквозь голограмму, полученную в условиях, описанных в предыдущей задаче. Считать при этом, что при создании голограммы интенсивность опорной волны была велика по сравнению с интенсивностью волны, прошедшей сквозь отверстие. Проследить за процессом восстановления первоначальных волновых фронтов при пропускании через эту голограмму нормально падающей плоской монохроматической волны $u_0 = A'_0 \exp[i(kz - \omega t)]$ (длина волны та же, что и у первичной волны). В частности, проследить за возникновением точечного изображения первоначального отверстия.

УКАЗАНИЕ. Волновое поле за голограммой можно получить простым умножением падающей на голограмму волны $u_0(x)$ на пропускание $T(x)$. Для интерпретации получившегося выражения следует обратиться к решениям задач 493, 494.

498. На установке, рассмотренной в задачах 496, 497, получается голограмма двух отверстий, находящихся на расстоянии $2D$ друг от друга в плоскости призмы. По этой голограмме восстанавливается изображение двух отверстий. Найти это изображение и выяснить, в каком случае оно будет увеличенным.

УКАЗАНИЕ. Голограмму можно освещать при восстановлении изображения светом с длиной волны λ' , не совпадающей с той λ , которая применялась при получении голограммы.

499. Определить разрешающую способность голограммы, которая получена на установке типа, рассмотренного в задаче 496. Голограмма выполнена на фотопластинке с размером зерен эмульсии d

§ 5. Дифракция рентгеновых лучей

При рассмотрении рассеяния рентгеновых лучей на макроскопических телах существенным является то обстоятельство, что длина волны λ сравнима с размерами a атомов. В конденсированных средах тот же порядок величины имеют межатомные расстояния, в газах эти расстояния много больше a . Вследствие этого становится невозможным усреднение по физически малым элементам объема, содержащим много атомов. Однако в том случае, когда частота рентгеновых лучей велика по сравнению с характерными атомными частотами $\omega_{ат} \sim v_{ат}/c$, электроны среды можно рассматривать как свободные. Так как для свободных (к тому же нерелятивистских) электронов уравнения движения во внешнем электромагнитном поле легко интегрируются, то может быть вычислен наведенный полем ток и определена диэлектрическая проницаемость, зависящая от координат \mathbf{r} :

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = 1 - \frac{4\pi e^2 n(\mathbf{r})}{m\omega^2}. \quad (\text{VIII.42})$$

Здесь $n(\mathbf{r})$ — концентрация электронов в теле, определяемая законами квантовой механики, усредненная по равновесному статистическому распределению состояний теплового движения атомов.

Уравнения Максвелла имеют свой обычный вид (VIII.1)–(VIII.4) с диэлектрической проницаемостью (VIII.42) и магнитной проницаемостью $\mu = 1$, если $4\pi e^2 n/m\omega^2 \ll 1$.

Пусть на некоторое тело конечной протяженности падает плоская волна $\mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega t)]$ рентгеновой частоты $\omega \gg \omega_{ат}$. Для того чтобы падающее излучение можно было рассматривать как плоскую поляризованную волну, необходимо, чтобы размеры тела были малы по сравнению с длиной

когерентности¹. При этом дифференциальное сечение рассеяния линейно поляризованной волны (определение понятия сечения дано в § 3 этой главы) имеет вид

$$d\sigma = r_0^2 \sin^2 \theta \left| \int n(\mathbf{r}) \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}] dV \right|^2 d\Omega, \quad (\text{VIII.43})$$

где $r_0 = e^2/mc^2$ — классический радиус электрона, \mathbf{k} — волновой вектор рассеянной волны, $k = k_0 = \omega/c$, θ — угол между \mathbf{E}_0 и \mathbf{k} , $d\Omega$ — элемент телесного угла направлений \mathbf{k} , $\mathbf{q} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}$ — переданный волновой вектор. Величина q связана с углом ϑ рассеяния волны (угол между \mathbf{k}_0 и \mathbf{k}) формулой

$$q = 2\frac{\omega}{c} \sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \frac{\vartheta}{2}. \quad (\text{VIII.44})$$

Сечение рассеяния неполяризованной рентгеновой волны

$$d\sigma = \frac{1}{2}r_0^2(1 + \cos^2 \vartheta) \left| \int n(\mathbf{r}) \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}] dV \right|^2 d\Omega. \quad (\text{VIII.45})$$

Условием применимости формул (VIII.43), (VIII.45) является требование, чтобы полное сечение $\sigma = \int_{(4\pi)} d\sigma$ было мало по сравнению с площадью

поперечного сечения образца в целом.

В случае дифракции рентгеновых лучей на идеальном монокристалле сечения (VIII.43) или (VIII.45) обнаруживают ряд резких максимумов, положение которых определяется уравнением Лауэ

$$\mathbf{k}_0 - \mathbf{k} = 2\pi\mathbf{g}, \quad (\text{VIII.46})$$

где \mathbf{g} — векторы обратной решетки. Если элементарная кристаллическая ячейка имеет форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами a_1, a_2, a_3 , то

$$\mathbf{g} = \left(\frac{n_1}{a_1}, \frac{n_2}{a_2}, \frac{n_3}{a_3} \right),$$

где n_1, n_2, n_3 — произвольные целые числа.

Если интеграл того вида, который входит в (VIII.43) или (VIII.45), берется по объему V_a одного атома, то он называется атомным формфактором:

$$F_a(\mathbf{q}) = \int_{V_a} n_a(\mathbf{r}) \exp[i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}] dV. \quad (\text{VIII.47})$$

¹Определение длины когерентности см. в § 4 этой главы

Атомный формфактор представляет собой просто компоненту Фурье от распределения $n_a(\mathbf{r})$ электронов в атоме и через него можно с помощью обратного преобразования Фурье выразить $n_a(\mathbf{r})$.

Подробнее вопрос о дифракции рентгеновых лучей рассмотрен, например, в [63], [66].

500. Выяснить, при каких условиях сечение рассеяния рентгеновых лучей на телах конечной протяженности принимает вид сечения рассеяния на свободных зарядах (формула Томсона). Написать соответствующие выражения для сечений. Число атомов в теле N , число электронов в каждом атоме Z .

501. Распределение электронной концентрации в Z -электронном атоме аппроксимируется выражением $n_a(r) = n_{0a} \exp\left[-\frac{r}{a}\right]$, где $n_{0a} = Z/\pi a^3$, $a = a_0/Z^{1/3}$, $a_0 = 0,529 \cdot 10^{-8}$ см — боровский радиус. Найти дифференциальное сечение рассеяния волны рентгенового диапазона на одноатомном газе, содержащем N атомов, считая распределение атомов совершенно хаотическим.

502. Найти сечение рассеяния рентгеновых лучей на объеме газа, содержащем N двухатомных молекул. Атомы в молекуле одинаковы и находятся на фиксированном расстоянии R друг от друга. Принять, что формфактор $F_a(q)$ атома, входящего в состав молекулы, тот же, что и у изолированного атома.

503. Как изменится сечение рассеяния рентгеновых лучей на объеме газа из двухатомных молекул, рассмотренном в предыдущей задаче, если учесть тепловые колебания атомов в молекуле.

УКАЗАНИЕ. Считать, что расстояния R между атомами распределены около среднего значения $R_0 \gg b$ по закону $dW_x = \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{b^2}\right] dx$, где $x = R - R_0$,

$b = \sqrt{\frac{2kT}{\mu\omega^2}}$, T — температура, μ — приведенная масса, ω — частота собственных колебаний атомов в молекуле.

504. Вывести уравнение Лауэ (VIII.46) и условие Брэгга–Вульфа $k \sin(\vartheta/2) = \pi|\mathbf{g}|$, где $|\mathbf{g}|$ — длина вектора обратной решетки, рассматривая интерференцию волн, рассеянных на отдельных центрах идеальной кристаллической решетки.

505. Найти сечение рассеяния рентгеновых лучей на идеальном монокристалле, состоящем из N одинаковых атомов с формфакторами $F_a(q)$ (считать, что эти формфакторы те же, что и в случае изолированных атомов).

Элементарная ячейка имеет форму куба с ребром a , кристалл имеет форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами L_1, L_2, L_3 , параллельными ребрам элементарной ячейки. Определить положение главных максимумов, убедиться в выполнении уравнения Лауэ (VIII.46). Найти величину сечения в этих максимумах.

506. Кристалл состоит из кубических элементарных ячеек с ребром a и имеет форму прямой призмы с прямоугольным равнобедренным треугольником в основании (катеты основания $L_1 = L_2$, боковое ребро L_3). Определить положения главных максимумов, найти величину сечения в этих максимумах.

507. Найти распределение интенсивности в дифракционном пятне вблизи одного из главных максимумов при рассеянии рентгеновых лучей на монокристалле, рассмотренном в задаче 505. Волновой вектор падающих рентгеновых лучей параллелен ребру L_3 , а $k \gg 1/a$. Определить ширину дифракционного максимума и полное сечение, отвечающее рассеянию в пределах одного дифракционного пятна.

508. Вычислить распределение интенсивности в дифракционном пятне вокруг главного максимума при произвольном направлении падения и произвольном соотношении между k и $1/a$. Рентгеновы лучи рассеиваются на монокристалле, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами L_1, L_2, L_3 (см. задачу 505).

509. Решить предыдущую задачу для случая рассеяния на монокристаллическом образце шарообразной формы (радиус R).

ЛИТЕРАТУРА

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. [65, 66], Борн М. [16], Бейтмен Г. [10], Тамм И. Е. [101], Зоммерфельд А. [55], Френкель Я. И. [111], Стрэттон Дж. А. [100], Смайт В. [93], Джексон Дж. [52], Альперт Я. Л., Гинзбург В. Л., Фейнберг Е. Л. [3], Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Каганов М. И. [5], Власов А. А. [25], Пановский В., Филипс М. [86], Вайнштейн Л. А. [23], Гуревич А. Г. [48], Шифрин К. С. [116], Силин В. П., Рухадзе А. А. [91], Борн М., Вольф Э. [18], Микаэлян А. Л. [78], Горелик Г. С. [43], Эйхенвальд А. А. [118], Альвен Х., Фельтхаммар К. Г. [2], Компанец А. С. [60], Гинзбург В. Л., Мотулевич Г. П. [34], Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В. [42], Строук Дж. [99], О'Нейл Э. [84], Вольф Э., Мандель Л. [27], Кривоглаз М. А. [63], Франсон М., Сланский С. [120].

ГЛАВА IX

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЛАХ

Часть пространства, ограниченная со всех сторон металлическими стенками, называется полым резонатором. В резонаторе может существовать система стоячих волн с определенными частотами ω (собственными частотами резонатора). Эта система волн определяется (в случае не заполненного диэлектриком резонатора с идеально проводящими стенками) путем решения уравнений

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (\text{IX.1})$$

с граничным условием

$$\mathbf{E}_\tau = 0. \quad (\text{IX.2})$$

Собственные функции резонатора \mathbf{E}_ν ,¹ отвечающие различным собственным частотам ω_ν , взаимно ортогональны. Собственные функции, соответствующие одной и той же частоте (их может быть несколько — см. задачи 529, 531), также можно выбрать взаимно ортогональными. Условимся нормировать их на 4π :

$$\int \mathbf{E}_{\nu'} \cdot \mathbf{E}_\nu dV = 4\pi \delta_{\nu\nu'}, \quad (\text{IX.3})$$

где интеграл берется по объему резонатора. Этому же условию удовлетворяют собственные функции \mathbf{H}_ν , которые выражаются через \mathbf{E}_ν с помощью уравнений Максвелла.

Вследствие потерь энергии в стенках или в веществе, заполняющем резонатор, а также излучения энергии во внешнее пространство, свободные колебания реальных резонаторов являются затухающими. Потери энергии

¹Значком ν обозначена совокупность четырех величин, однозначно определяющих собственный тип колебаний («моду») резонатора.

данного типа колебаний характеризуются добротностью Q_ν , которая определяется отношением

$$Q_\nu = \frac{\tilde{\omega}_\nu W_\nu}{P_\nu} \quad \text{или} \quad Q_\nu = \frac{\tilde{\omega}_\nu}{2\gamma_\nu}. \quad (\text{IX.4})$$

Здесь W_ν — энергия, запасенная в резонаторе, P_ν — средняя (по времени) мощность потерь; $\tilde{\omega}_\nu$ — резонансная частота, которая может отличаться от резонансной частоты идеального резонатора; γ_ν — декремент затухания.

В отличие от резонатора, волновод представляет собою полость (трубу) неограниченной длины. Вдоль оси волновода (ось z) возможно распространение бегущих волн, в поперечном направлении волна является стоячей. В общем случае волны в волноводе не являются поперечными. Волны, у которых $E_z \neq 0$, $H_z = 0$ называются волнами электрического типа, волны с $H_z \neq 0$, $E_z = 0$ — волнами магнитного типа. Только в волноводах с неодносвязной формой поперечного сечения возможны чисто поперечные электромагнитные волны.

Типы волн, которые могут распространяться в данном волноводе, определяются путем решения уравнений Максвелла при соответствующих граничных условиях. Волна, бегущая вдоль оси волновода, описывается функциями

$$\mathbf{E}(r, t) = \mathcal{E}(x, y)e^{i(kz - \omega t)}, \quad \mathbf{H}(r, t) = \mathcal{H}(x, y)e^{i(kz - \omega t)}.$$

Здесь ω — частота волны, k — составляющая волнового вектора в направлении оси волновода. Величину k называют также постоянной распространения.

В случае волн электрического типа (E -волн) $\mathcal{H}_z = 0$, а \mathcal{E}_z удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathcal{E}_z + \kappa^2 \mathcal{E}_z = 0, \quad (\text{IX.5})$$

где $\kappa^2 = \frac{\omega^2 \epsilon \mu}{c^2} - k^2$, κ — поперечная составляющая волнового вектора, ϵ и μ — проницаемости диэлектрика, заполняющего волновод, и граничному условию

$$\mathcal{E}_z = 0 \quad (\text{IX.6})$$

на стенке волновода.

В случае волн магнитного типа (H -волн) $\mathcal{E}_z = 0$, а \mathcal{H}_z является решением уравнения

$$\Delta \mathcal{H}_z + \kappa^2 \mathcal{H}_z = 0, \quad (\text{IX.7})$$

удовлетворяющим граничному условию

$$\mathcal{E}_\tau = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial n} = 0 \quad (\text{IX.8})$$

на стенке волновода.

В уравнениях (IX.5) и (IX.7) Δ — двумерный оператор Лапласа. Граничные условия (IX.6) и (IX.8) строго справедливы только для волноводов с идеально проводящими стенками.

Поперечные составляющие векторов \mathcal{E} и \mathcal{H} могут быть выражены с помощью уравнений Максвелла через продольные составляющие этих векторов.

E - или H -волна заданного типа (т. е. с определенным значением \varkappa) может распространяться в волноводе с односвязной формой сечения только в том случае, если ее частота больше некоторой граничной частоты ω_0 . Соответствующая «длина волны в вакууме» $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$ — порядка линейного размера сечения волновода. При $\omega < \omega_0$ постоянная распространения k становится чисто мнимой, поэтому распространение волны невозможно. Однако и при $\omega > \omega_0$ k в общем случае комплексно.

Это связано с тем, что стенки волновода имеют конечную проводимость, поэтому в них происходит диссипация энергии и электромагнитная волна затухает по закону $e^{-\alpha z}$. Коэффициент затухания α (мнимая часть k) равен отношению энергии, диссипируемой в единицу времени в стенках волновода на единице его длины, к удвоенному потоку энергии вдоль волновода. В случае, когда поверхностный импеданс $\zeta = \zeta' + i\zeta''$ стенок мал, можно получить приближенные выражения коэффициента затухания для E -волн:

$$\alpha = \frac{\omega \zeta'}{2 \varkappa k c} \cdot \frac{\oint |\nabla \mathcal{E}_z|^2 dl}{\int |\mathcal{E}_z|^2 dS} \quad (\text{IX.9})$$

и для H -волн:

$$\alpha = \frac{c \varkappa^2 \zeta'}{2 k \omega} \cdot \frac{\oint [|\mathcal{H}_z|^2 + (k^2 / \varkappa^4) |\nabla \mathcal{H}_z|^2] dl}{\int |\mathcal{H}_z|^2 dS}. \quad (\text{IX.10})$$

Здесь \mathcal{E}_z и \mathcal{H}_z — компоненты полей, вычисленные при $\zeta = 0$ (т. е. в предположении идеальной проводимости стенок волновода), dl — элемент контура поперечного сечения волновода, dS — элемент площади этого сечения.

510. Определить типы волн, которые могут распространяться в прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками (длины сторон a , b). Найти для них закон дисперсии и конфигурации полей (т. е. зависимость компонент поля от координат).

511. Определить коэффициенты затухания α разных типов волн в прямоугольном волноводе. Поверхностный импеданс стенок волновода ζ задан.

512. Бесконечно протяженный диэлектрический слой заполняет в вакууме область $-a \leq x \leq a$ и имеет проницаемости ϵ и μ . Показать, что такой слой может действовать как волновод (для этого нужно, чтобы поле бегущей электромагнитной волны концентрировалось, в основном, внутри слоя). Определить типы волн, которые могут распространяться в таком волноводе. Ограничиться случаем, когда векторы поля не зависят от координаты y .

513. Диэлектрический слой с проницаемостями ϵ , μ , заполняющий область $0 \leq x \leq a$, нанесен на поверхность идеального проводника. В области $x > a$ — вакуум. Какие типы электромагнитных волн с амплитудой, убывающей при удалении от слоя, могут распространяться вдоль слоя? Сравнить возможные типы волн с системой волн, полученной в предыдущей задаче.

514. Найти возможные типы волн в круглом волноводе радиуса a , считая его стенки идеально проводящими. Определить граничную частоту ω_0 для такого волновода.

515. Используя результат предыдущей задачи, найти коэффициенты затухания α разных типов волн в круглом волноводе. Поверхностный импеданс стенок ζ задан.

516. Определить фазовую v_φ и групповую v_g скорости волн в прямоугольном и круглом волноводе с идеально проводящими стенками. Построить их зависимость от $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$.

517. Определить фазовую v_φ и групповую v_g скорости волн в волноводе геометрическим методом. Для этого рассмотреть простейшую волну типа H_{10} в прямоугольном волноводе, разложить ее на плоские волны и исследовать отражение этих волн от стенок волновода.

518. Исследовать структуру поперечной электромагнитной волны в идеально проводящей коаксиальной линии (большой и малый радиусы соответственно b и a). Подсчитать средний поток энергии $\bar{\gamma}$ вдоль линии. Рассмотреть предельный случай одиночного идеально проводящего провода.

519. Определить возможные типы непоперечных электромагнитных волн в коаксиальной линии с идеально проводящими стенками (радиусы a и $b > a$).

520. Определить коэффициент затухания α поперечной электромагнитной волны в коаксиальной линии. Заданы радиусы a , $b > a$ и поверхностный импеданс $\zeta = \zeta' + i\zeta''$.

УКАЗАНИЕ. Использовать приведенное в начале главы определение коэффициента затухания через потери энергии.

521*. Рассмотреть распространение аксиально симметричной волны электрического типа вдоль одиночного бесконечно длинного цилиндрического проводника с конечной проводимостью, находящегося в вакууме. Определить фазовую скорость волны. Показать, что в случае идеально проводящего провода волна перейдет в поперечную электромагнитную волну (см. задачу 518. Использовать приближенное граничное условие Леонтовича (см. (VIII.10)).

522. Аксиально симметричная E -волна распространяется в круглом волноводе радиуса b , частично заполненном диэлектриком. Диэлектрик имеет проницаемость ϵ и занимает область $a \leq r \leq b$. Считая $a \ll b$, определить зависимость фазовой скорости от частоты и граничную частоту. При каких условиях фазовая скорость будет меньше c ? Рассмотреть предельный случай волновода, полностью заполненного диэлектриком.

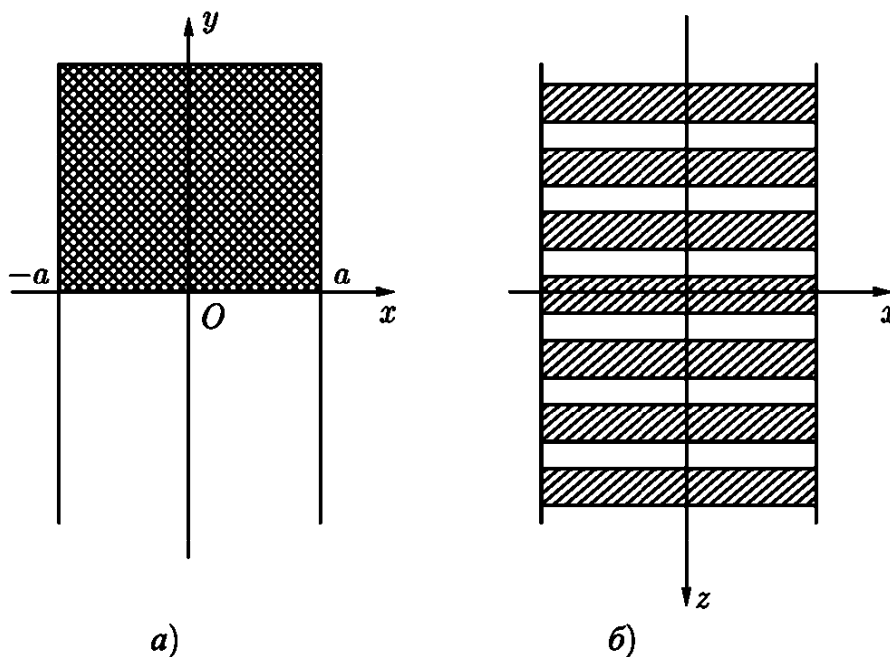


Рис. 31

523. Между двумя идеально проводящими плоскостями $x = \pm a$ (рис. 31а) помещена в плоскости $y = 0$ лестничная перегородка (рис. 31б), состоящая из тонких металлических полосок, ориентированных вдоль оси x . Расстояния между полосками и их ширина малы по сравнению с длиной волны. Область $y > 0$ над лестничной перегородкой заполне-

на диэлектриком с проницаемостью ϵ , в области $y < 0$ — воздух. Найти возможные типы бегущих волн, которые могут распространяться в такой системе вдоль оси z . Как связана постоянная распространения этих волн с частотой?

УКАЗАНИЕ. Лестничную перегородку для достаточно длинных волн можно рассматривать как анизотропно проводящую плоскость, проводимость которой в направлении оси x бесконечна, а в направлении z равна нулю.

524. Прямоугольный волновод с поперечным сечением $a \times b$ и идеально проводящими стенками заполнен ферродиелектриком. Постоянное магнитное поле приложено перпендикулярно широкой стенке волновода (вдоль оси y). Тензоры электрической и магнитной проницаемостей ферродиелектрика имеют вид

$$\epsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & 0 & -i\epsilon_a \\ 0 & \epsilon_{\parallel} & 0 \\ i\epsilon_a & 0 & \epsilon_{\perp} \end{pmatrix}, \quad \mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_{\perp} & 0 & -i\mu_a \\ 0 & \mu_{\parallel} & 0 \\ i\mu_a & 0 & \mu_{\perp} \end{pmatrix}$$

(ср. с результатом задачи 331). Определить составляющие электромагнитного поля, постоянную распространения и граничную частоту волновода для случая, когда поле не зависит от y .

525. Электрическое и магнитное поля в волноводе с идеально проводящими стенками, не содержащем диэлектрика, описываются функциями

$$\mathbf{E}_0 = \mathcal{E}_0(x, y)e^{i(k_0z - \omega t)}, \quad \mathbf{H}_0 = \mathcal{H}_0(x, y)e^{i(k_0z - \omega t)}.$$

Если в волновод вставить диэлектрический сердечник, имеющий форму цилиндра произвольного сечения с осью, параллельной оси волновода, то поля в волноводе примут вид

$$\mathbf{E} = \mathcal{E}(x, y)e^{i(kz - \omega t)}, \quad \mathbf{H} = \mathcal{H}(x, y)e^{i(kz - \omega t)}.$$

Диэлектрик в общем случае может характеризоваться тензорными параметрами ϵ_{ik} , μ_{ik} . Показать с помощью уравнений Максвелла, что постоянная распространения изменится на величину

$$\Delta k = k - k_0 = \frac{\omega \int (\Delta\epsilon_{ik} \cdot \mathcal{E}_k \mathcal{E}_{0i}^* + \Delta\mu_{ik} \cdot \mathcal{H}_k \mathcal{H}_{0i}^*) dS}{c \int_S [(\mathcal{E}_0^* \times \mathcal{H}) + (\mathcal{E} \times \mathcal{H}_0^*)] \cdot \mathbf{e}_z dS},$$

где $\Delta\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik} - 1$, $\Delta\mu_{ik} = \mu_{ik} - 1$, интеграл в числителе берется по площади сечения диэлектрического стержня (ΔS), интеграл в знаменателе — по площади сечения волновода (S).

526. В прямоугольный волновод с идеально проводящими стенками вносится ферродиелектрическая пластинка толщиной $d \ll a$, намагниченная вдоль оси волновода (рис. 32). Пользуясь формулой, полученной в предыдущей задаче, определить с точностью до членов порядка d изменение Δk постоянной распространения волны типа H_{10} . Диэлектрическая проницаемость пластинки — скалярная величина, тензор ее магнитной проницаемости приведен в условии задачи 435.

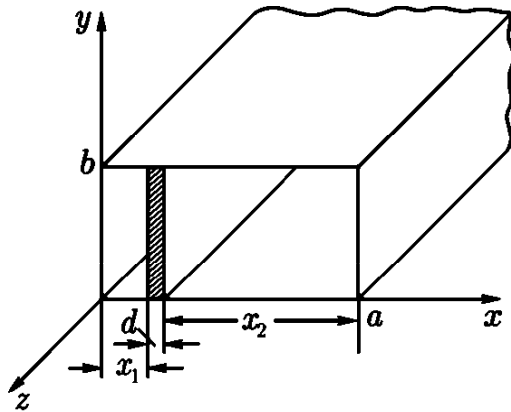


Рис. 32

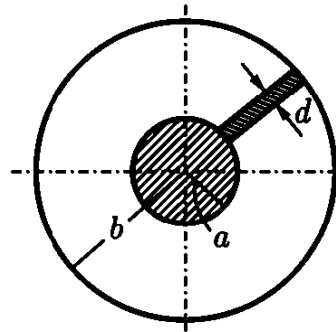


Рис. 33

527. В коаксиальный волновод (рис. 33) вставлена тонкая ферритовая пластина ($d < a, b$), намагниченная вдоль оси волновода. Определить изменение Δk постоянной распространения поперечной электромагнитной волны.

УКАЗАНИЕ. Амплитуды возмущенных полей определить таким же методом, как в предыдущей задаче.

528. Решить предыдущую задачу для случая, когда постоянное подмагничивающее поле H_0 направлено перпендикулярно оси волновода. Рассмотреть два направления этого поля: а) H_0 перпендикулярно широкой грани пластинки; б) H_0 перпендикулярно узкой грани пластинки.

529. Определить типы собственных колебаний в полном резонаторе с идеально проводящими стенками. Резонатор имеет форму прямоугольного параллелепипеда, его размеры $a \times b \times h$.

530. Определить число собственных колебаний $\Delta N(\omega)$, приходящихся на интервал частот $\Delta\omega$ в полном резонаторе объема V , рассмотренном в предыдущей задаче. Считать, что выполняются неравенства $\Delta\omega \ll \omega$ и $\Delta N \gg 1$.

531. Резонатор имеет форму прямого кругового цилиндра высотой h и радиуса a . Считая стенки резонатора идеально проводящими, найти частоты собственных колебаний. Рассмотреть колебания электрического и магнитного типов.

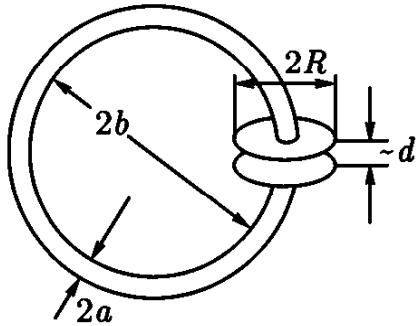


Рис. 34

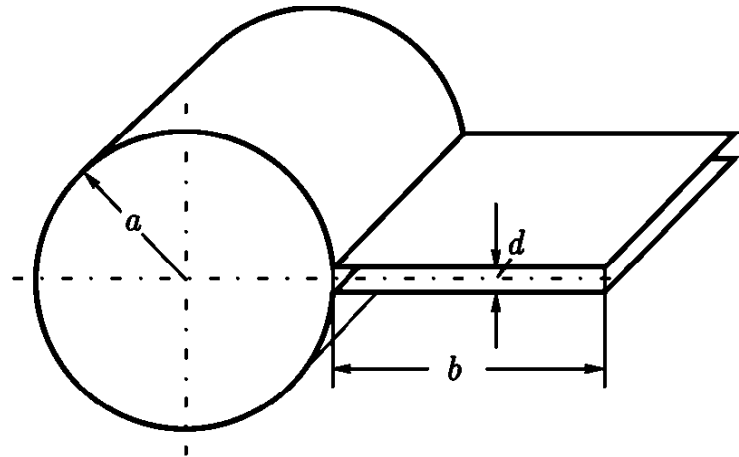


Рис. 35

532. Две круглые металлические пластинки радиуса R находятся на малом расстоянии d друг от друга, образуя конденсатор. Обкладки конденсатора замкнуты проводником толщиной $2a$, имеющим форму кольца радиуса b (рис. 34). Найти собственную частоту колебаний такого «открытого резонатора», предполагая применимым квазистационарное приближение. Все проводники считать идеально проводящими.

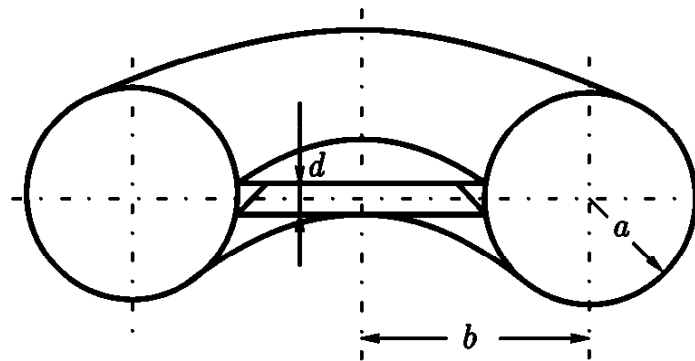


Рис. 36

533. Найти собственную частоту ω_0 колебаний системы, изображенной на рис. 35, предполагая, что соответствующая ей длина волны λ_0 велика

по сравнению с размерами системы. Потерями энергии и краевыми эффектами пренебречь.

534. Для уменьшения потерь энергии на излучение вместо открытого колебательного контура (см. рис. 34) используют закрытый резонатор, состоящий из соединенных вместе тороидальной камеры и плоского конденсатора с круглыми пластинами (его разрез и размеры показаны на рис. 36). Найти собственную частоту ω_0 основного типа колебаний такого резонатора в квазистационарном приближении. При каких условиях применимо такое приближение? Стенки резонатора считать идеально проводящими.

535. Решить предыдущую задачу для тороидального резонатора с камерой прямоугольного сечения (рис. 37).

536. Резонатор представляет собой цилиндр кругового сечения (внутренний радиус b , высота h), вдоль оси которого вставлен идеально проводящий стержень радиуса a (рис. 38). Стенки цилиндра также обладают идеальной проводимостью. Между стержнем и одним из торцов цилиндра оставлен зазор d . Найти собственные частоты поперечных относительно оси системы электромагнитных колебаний, считая, что длина волны этих колебаний много больше зазора d (но не высоты h цилиндра). Как изменится спектр колебаний при $d \rightarrow 0$?

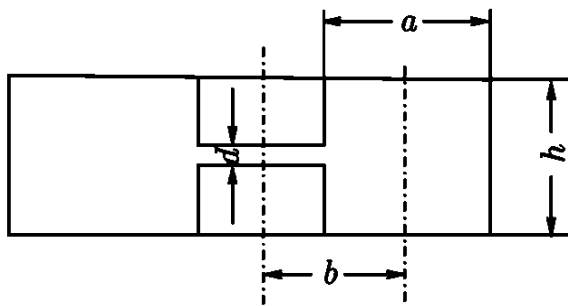


Рис. 37

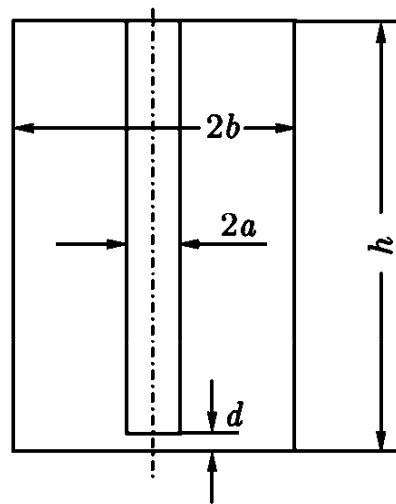


Рис. 38

537. Известны собственные частоты колебаний ω_ν и собственные функции E_ν, H_ν резонатора с идеально проводящими стенками. Вычислить изменение собственных частот, вызванное конечной проводимостью стенок резонатора. Поверхностный импеданс ζ стенок мал.

УКАЗАНИЕ. Искать решение уравнений Максвелла в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\nu} q_{\nu}(t) \mathbf{E}_{\nu}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\nu} p_{\nu}(t) \mathbf{H}_{\nu}(\mathbf{r}),$$

где q_{ν} и p_{ν} — неизвестные функции времени. Вывести уравнения для q_{ν} и p_{ν} с точностью до членов, линейных по ζ и исследовать их решения.

538. Полый резонатор имеет форму куба со стороной a . Проводимость стенок σ , магнитная проницаемость $\mu = 1$. Вычислить добротность резонатора для произвольного типа колебаний. Как она зависит от частоты? При каких частотах резонансные свойства системы исчезнут?

539. Полый резонатор, стенки которого имеют поверхностный импеданс ζ , возбуждается сторонним током $\mathbf{j}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, текущим внутри резонатора. Частота тока ω близка к одной из собственных частот резонатора. Найти электромагнитное поле, возбуждаемое в резонаторе, и его зависимость от частоты ω вблизи резонанса.

УКАЗАНИЕ. Использовать метод решения, развитый в задаче 537.

540. Открытый резонатор инфракрасного диапазона состоит из двух параллельных круглых зеркал диаметром D , находящихся на расстоянии L друг против друга (рис. 39). Пусть собственное колебание такой системы реализуется в виде двух волн с $\lambda \ll L, D$, распространяющихся перпендикулярно плоскостям зеркал навстречу друг другу и образующих стоячую электромагнитную волну.

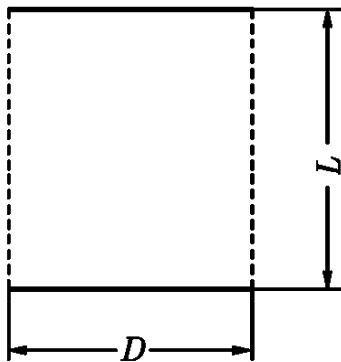


Рис. 39

Оценить по порядку величины добротность такого резонатора в приближении геометрической оптики. Учесть потери энергии при отражениях от зеркал (коэффициент отражения R) и излучение через боковую поверхность резонатора за счет дифракции. Параметры резонатора: $D = L = 1 \text{ см}$; $R = 0,95$; $\lambda = 3 \cdot 10^{-4} \text{ см}$.

541. Зеркала открытого резонатора, рассмотренного в предыдущей задаче, слегка непараллельны. Угол между их плоскостями $\beta \ll 1$. Оценить дополнительные потери на излучение и соответствующий вклад в добротность резонатора, обусловленный непараллельностью зеркал. Какие значения угла β допустимы без существенного уменьшения полной добротности резонатора?

542. В резонаторе, образованном двумя параллельными зеркалами (см. рис. 39), собственные колебания с $\lambda \ll L, D$ осуществляются в виде

стоячих волн в пространстве между зеркалами. Рассмотреть тот тип колебаний, в котором волновой вектор стоячей волны составляет малый угол ϑ с нормалью к плоскостям зеркал.

а) Найти условие, определяющее возможные значения ϑ при заданной λ .

б) Оценить по порядку величины добротность резонатора как функцию угла ϑ . Рассмотреть различные соотношения между потерями в зеркалах и потерями на излучение.

ЛИТЕРАТУРА

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. [66], Вайнштейн Л. А. [23], Гуревич А. Г. [47, 48], де-Бройль Л. [51], Джексон Дж. [52], Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В. [42], Пановский В., Филипс М. [86], Ахиезер А. И., Файнберг Я. Б. [7], Петрунькин В. Ю. [88], Басов Н. Г., Крохин О. Н., Попов Ю. М. [9].

ГЛАВА X

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Преобразования Лоренца

Координаты и время в двух инерциальных системах отсчета S и S' связаны между собой формулами преобразования Лоренца¹:

$$x = \gamma(x' + Vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right) \quad (\text{X.1})$$

(соответствующие оси координат систем S и S' параллельны между собой, относительная скорость направлена вдоль оси Ox и при $t = t' = 0$ начала координат S и S' совпадают). Обратные преобразования Лоренца получаются как здесь, так и во всех других случаях (например, в формулах (X.4), (X.11)) изменением знака скорости V :

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right). \quad (\text{X.2})$$

Величины $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ являются координатами мировой точки

$$x_i = (ct, \mathbf{r}). \quad (\text{X.3})$$

Всякие четыре величины A_0, A_1, A_2, A_3 , преобразующиеся при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой как координаты и время, т. е. по формулам

$$A_0 = \gamma(A'_0 + \beta A'_1), \quad A_1 = \gamma(A'_1 + \beta A'_0), \quad A_2 = A'_2, \quad A_3 = A'_3 \quad (\text{X.4})$$

¹В этой и следующих главах применяются обозначения:

$$\beta = \frac{V}{c} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

где V — скорость системы S' относительно системы S .

образуют четырехмерный вектор (4-вектор) A_i , $i = 0, 1, 2, 3$. Трехмерный вектор $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ называют пространственной, а величину A_0 — временной составляющими 4-вектора A_i .

Скалярное произведение двух четырехмерных векторов определяется следующим образом:

$$A_i B_i = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3. \quad (\text{X.5})$$

Как и раньше (см. гл. I), будем подразумевать суммирование по дважды повторяющемуся индексу, который теперь принимает значения 0, 1, 2, 3. При этом слагаемое с индексом 0 берется со знаком плюс, а слагаемые с индексами 1, 2, 3 — со знаком минус. Этим правилом знаков при суммировании будем пользоваться и в дальнейшем.

Квадраты 4-векторов A_i^2 , определенные в соответствии с (X.5), и их скалярные произведения $A_i B_i$ имеют одинаковые значения во всех инерциальных системах отсчета (инварианты относительно преобразований Лоренца). 4-вектор A_i называется пространственноподобным, если $A_i^2 < 0$, и времениподобным, если $A_i^2 > 0$.

Инвариантная величина

$$s_{12} = [(c^2(t_1 - t_2)^2 - (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2)]^{1/2} \quad (\text{X.6})$$

называется интервалом между двумя событиями с координатами (\mathbf{r}_1, t_1) и (\mathbf{r}_2, t_2) .

Время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с данным объектом, называется собственным временем этого объекта. Если объект движется относительно системы S со скоростью V , то интервал собственного времени $d\tau$ выражается через промежуток времени dt в системе S по формуле

$$d\tau = dt \sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (\text{X.7})$$

Величина $dt \sqrt{1 - \beta^2}$ является инвариантом преобразования Лоренца.

Если некоторый стержень в покое имеет длину l_0 , то при движении со скоростью v вдоль своей оси он имеет с точки зрения неподвижного наблюдателя длину

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (\text{X.8})$$

Четырехмерной скоростью (4-скоростью) частицы называется 4-вектор, компоненты которого определяются формулой

$$u_i = \frac{dx_i}{d\tau} = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right), \quad (\text{X.9})$$

где $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ — обычная скорость частицы. Из (X.9) очевидно, что

$$u_i^2 = c^2. \quad (\text{X.10})$$

4-скорость, как и всякий 4-вектор, преобразуется по формулам (X.4).

Компоненты обычной скорости не являются пространственными составляющими какого-либо 4-вектора и преобразуются по формулам ($\mathbf{V} \parallel x$):

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}. \quad (\text{X.11})$$

Если скорость частицы составляет с осью x углы ϑ и ϑ' в системах S и S' соответственно, то

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{v' \sqrt{1 - V^2/c^2} \sin \vartheta'}{v' \cos \vartheta' + V}, \quad v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2}. \quad (\text{X.12})$$

Четырехмерным ускорением частицы называется 4-вектор с компонентами

$$\omega_i = \frac{du_i}{d\tau} = \frac{d^2 x_i}{d\tau^2}. \quad (\text{X.13})$$

Волновой вектор \mathbf{k} и частота ω плоской электромагнитной волны являются компонентами волнового 4-вектора k_i :

$$k_i = \left(\frac{i\omega}{c}, \mathbf{k} \right). \quad (\text{X.14})$$

Поэтому фаза плоской волны $\varphi = -k_i x_i$ является инвариантом.

Из формул (X.4) следуют формулы преобразования угла ϑ , составляемого световым лучом с осью x :

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \vartheta'}{\gamma(\cos \vartheta' + \beta)} \quad \text{или} \quad \cos \vartheta = \frac{\cos \vartheta' + \beta}{1 + \beta \cos \vartheta'}. \quad (\text{X.15})$$

Задачи на преобразование Лоренца для энергии, импульса и силы собраны в § 1 гл. XI.

543. Пусть система S' движется относительно системы S со скоростью V вдоль оси x . Часы, покоящиеся в S' в точке (x'_0, y'_0, z'_0) , в момент t'_0 проходят мимо точки (x_0, y_0, z_0) в системе S , где находятся часы, показывающие в этот момент время t_0 . Написать формулы преобразования Лоренца для этого случая.

544. Система S' движется относительно системы S со скоростью V . Доказать, что при сравнении хода часов в системах S и S' всегда будут отставать те часы в одной из этих систем отсчета, показания которых последовательно сравниваются с показаниями двух часов в другой системе отсчета. Выразить один промежуток времени через другой. (Показания движущихся часов сравниваются в момент, когда они проходят друг мимо друга.)

545. Длину стержня, движущегося вдоль своей оси в некоторой системе отсчета, можно находить таким образом: измерять промежуток времени, в течение которого стержень проходит мимо фиксированной точки этой системы, и умножать его на скорость стержня. Показать, что при таком методе измерения получается обычное лоренцово сокращение.

546. Система S' движется относительно системы S со скоростью V . В момент, когда начала координат совпадали, находившиеся там часы обеих систем показывали одно и то же время $t = t' = 0$. Какие координаты в каждой из этих систем в дальнейшем будет иметь мировая точка, обладающая тем свойством, что находящиеся в ней часы систем S и S' показывают одно и то же время $t = t'$? Определить закон движения этой точки.

547. Пусть для измерения времени используется периодический процесс отражения светового «зайчика» попеременно от двух зеркал, укрепленных на концах стержня длиной l . Один период — это время движения «зайчика» от одного зеркала до другого и обратно. Световые часы неподвижны в системе S' и ориентированы параллельно направлению движения. Пользуясь постулатом о постоянстве скорости света, показать, что интервал собственного времени $d\tau$ выражается через промежуток времени dt в системе S формулой (X.7).

548. Решить предыдущую задачу для случая, когда световые часы ориентированы перпендикулярно направлению относительной скорости.

549. «Поезд» $A'B'$, длина которого $l_0 = 8,64 \cdot 10^8$ км в системе, где он покоится, идет со скоростью $V = 240\,000$ км/сек мимо «платформы», имеющей такую же длину в своей системе покоя. В голове B' и хвосте A' «поезда» имеются одинаковые часы, синхронизованные между собой. Такие же часы установлены в начале (A) и в конце (B) «платформы». В тот момент, когда голова «поезда» поравнялась с началом «платформы», совпадающие часы показывали 12 час 00 мин. Ответить на следующие вопросы: а) можно ли утверждать, что в этот момент в какой-либо системе отсчета все часы также показывают 12 час 00 мин; б) сколько показывают каждые из часов в момент, когда хвост «поезда» поравнялся с началом «платформы»; в) сколько показывают часы в момент, когда голова «поезда» поравнялась с концом «платформы»?

550. Какой промежуток времени Δt занял бы по земным часам полет ракеты до звездной системы Проксима–Центавра и обратно (расстояние до нее 4 световых года¹), если бы он осуществлялся с постоянной скоростью $v = \sqrt{0,9999}c$? Из расчета какой длительности путешествия следовало бы запастись продовольствием и другим снаряжением? Каков запас кинетической энергии в такой ракете, если ее масса $10m$?

551. Два масштаба, каждый из которых имеет длину покоя l_0 , равномерно движутся навстречу друг другу параллельно общей оси x . Наблюдатель, связанный с одним из них, заметил, что между совпадением левых и правых концов масштабов прошло время Δt . Какова относительная скорость v масштабов? В каком порядке совпадают их концы для наблюдателей, связанных с каждым из масштабов, а также для наблюдателя, относительно которого оба масштаба движутся с одинаковой скоростью в противоположные стороны?

552. Вывести формулы лоренцова преобразования от системы S' к системе S для радиуса-вектора \mathbf{r} и времени t , не предполагая, что скорость \mathbf{V} системы S' относительно S параллельна оси x . Результат представить в векторной форме.

УКАЗАНИЕ. Разложить \mathbf{r} на продольную и поперечную относительно \mathbf{V} компоненты и воспользоваться преобразованиями Лоренца (X.1).

553. Записать формулы преобразования Лоренца для произвольного 4-вектора $A_i = (A, A_4)$, не предполагая, что скорость \mathbf{V} системы S' относительно S параллельна оси x .

554. Вывести формулы сложения скоростей для случая, когда скорость \mathbf{V} системы S' относительно S имеет произвольное направление. Формулы представить в векторном виде.

555. Даны три системы отсчета: S, S', S'' . S'' движется относительно S' со скоростью V' , параллельной оси x' , S' — относительно S со скоростью V , параллельной оси x . Соответствующие оси всех трех систем параллельны. Записать преобразования Лоренца от S'' к S и получить из них формулу сложения параллельных скоростей.

556. Доказать формулу

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - v'^2/c^2} \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}/c^2},$$

¹Световым годом называется расстояние, проходимое светом в пустоте за год (см. введение к § 4 гл. VIII).

где \mathbf{v} и \mathbf{v}' — скорости частицы в системах S и S' , \mathbf{V} — скорость S' относительно S .

557. Доказать соотношение

$$v = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}' + \mathbf{V})^2 - (\mathbf{v}' \times \mathbf{V})^2/c^2}}{1 + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{V}/c^2},$$

где \mathbf{v} и \mathbf{v}' — скорости частицы в системах S и S' , \mathbf{V} — скорость S' относительно S .

558. Происходит три последовательных преобразования системы отсчета: 1) переход от системы S к системе S' , двигающейся относительно S со скоростью \mathbf{V} , параллельной оси x ; 2) переход от системы S' к системе S'' , двигающейся относительно S' со скоростью \mathbf{v} , параллельной оси y' ; 3) переход от системы S'' к системе S''' , двигающейся относительно S'' со скоростью, равной релятивистской сумме скоростей $-\mathbf{v}$ и $-\mathbf{V}$.¹ Доказать, что система S''' , как и следует ожидать, неподвижна относительно S и $t''' = t$, однако S''' повернута относительно S на некоторый угол в плоскости xy (томасовская прецессия). Вычислить угол φ томасовской прецессии.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться формулами общего вида для преобразования Лоренца (см. задачу 552) и сложения скоростей (см. задачу 554), записав эти формулы в проекциях на декартовы оси.

559. Два масштаба, каждый из которых имеет в своей системе покоя длину l_0 , движутся навстречу друг другу с равными скоростями v относительно некоторой системы отсчета. Какова длина l каждого из масштабов, измеренная в системе отсчета, связанной с другим масштабом?

560. Два пучка электронов летят навстречу друг другу со скоростями $v = 0,9c$ относительно лабораторной системы координат. Какова относительная скорость V электронов: а) с точки зрения наблюдателя в лаборатории; б) с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с одним из пучков электронов?

561. Эффекты, возникающие при столкновении двух элементарных частиц, не зависят от равномерного движения этих частиц, как целого; эти эффекты определяются лишь их относительной скоростью. Одну и ту же относительную скорость можно сообщить сталкивающимся частицам двумя способами (предполагается для простоты, что частицы обладают одинаковой массой m): а) один ускоритель разгоняет частицы до энергии \mathcal{E} , затем

¹Обратим внимание на то, что результирующая скорость зависит от того порядка, в котором производится сложение скоростей

быстрые частицы ударяются о неподвижную мишень из тех же частиц; б) два одинаковых ускорителя расположены так, чтобы создаваемые ими пучки частиц были направлены навстречу друг другу; каждый из ускорителей при этом должен разгонять частицы до энергии $\mathcal{E}_0 < \mathcal{E}$.

Сравнить между собой значения \mathcal{E} и \mathcal{E}_0 . Рассмотреть, в частности, ультрарелятивистский случай.

562. Найти формулы преобразования ускорения \dot{v} для случая, когда система S' движется относительно системы S с произвольно направленной скоростью V . Представить эти формулы преобразования в векторном виде.

563. Выразить компоненты четырехмерного ускорения ω_i через обычное ускорение \dot{v} и скорость v частицы. Найти ω_i^2 . Пространственноподобно или времениподобно четырехмерное ускорение?

564. Выразить ускорение \dot{v}' частицы в мгновенно сопутствующей ей инерциальной системе через ее ускорение \dot{v} в лабораторной системе. Рассмотреть случаи, когда скорость v частицы меняется только по величине или только по направлению.

565. Релятивистская частица совершает «равноускоренное» одномерное движение (ускорение $\dot{v} \equiv \omega$ постоянно в собственной системе отсчета). Найти зависимость скорости $v(t)$ и координаты $x(t)$ частицы от времени t в лабораторной системе отсчета, если начальная скорость v_0 , а начальная координата x_0 . Рассмотреть, в частности, нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы.

УКАЗАНИЕ. Использовать результат предыдущей задачи.

566. Ракета, рассматривавшаяся в задаче 550, разгоняется от состояния покоя до скорости $v = \sqrt{0,9999} c$. Ускорение ракеты составляет $|\dot{v}| = 20 \text{ м/сек}^2$ в системе, мгновенно сопутствующей ракете. Сколько времени продлится разгон ракеты по часам в неподвижной системе отсчета и по часам в ракете?

УКАЗАНИЕ. Влияние сил инерции на ход часов в ракете не учитывать¹.

567. Частица движется со скоростью v и ускорением \dot{v} , так что за малый промежуток времени δt ее скорость в лабораторной системе S меняется на величину $\delta v = \dot{v} \delta t$. Пусть S' — инерциальная система, мгновенно сопутствующая частице в момент t , а S'' — такая же система для момента

¹Это означает, что предлагается вычислить сумму собственных времен $d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ в последовательности мгновенно сопутствующих ракете инерциальных систем отсчета, выражаемую интегралом $\int d\tau$. Подробнее по этому поводу см. [107], § 62, а также [17], [72].

времени $t + \delta t$. Пользуясь преобразованиями Лоренца, показать с точностью до членов, линейных по $\delta \mathbf{v}$, что координаты и время в этих системах связаны формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'' &= \mathbf{r}' + \Delta\varphi \times \mathbf{r}' - t' \Delta\mathbf{v}, \\ t'' &= t' - \frac{\mathbf{r}' \cdot \Delta\mathbf{v}}{c^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{v} &= \gamma \left[\delta\mathbf{v} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} \right], \\ \delta\varphi &= (\gamma - 1) \frac{\delta\mathbf{v} \times \mathbf{v}}{v^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Какой геометрический смысл имеют преобразования (1)? Какой вид приобретают формулы (2) при $v \ll c$ в первом неисчезающем приближении?

УКАЗАНИЕ. Удобно рассмотреть цепочку преобразований $S'' \rightarrow S \rightarrow S'$ с помощью формул, приведенных в ответе к задаче 552.

568. Относительно системы S движутся система S' со скоростью V и два тела со скоростями \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 . Каков угол α между скоростями этих тел при наблюдении в системе S и в системе S' ?

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться результатами задач 554 и 556.

569. Что происходит с углом между скоростями двух тел предыдущей задачи, когда скорость системы S' относительно S стремится к c ?

570. В некоторый момент времени направление луча света от звезды составляет угол ϑ с орбитальной скоростью v Земли (в системе, связанной с Солнцем). Найти изменение направления от Земли на звезду за полгода (абберация света), не делая приближений, связанных с малостью $\frac{v}{c}$.

571. Найти форму видимой кривой, описываемой звездой на небосводе вследствие годичной абберации. Полярные координаты звезды в системе, связанной с Солнцем, ϑ, α (полярная ось проведена перпендикулярно плоскости земной орбиты). Орбитальная скорость Земли $v \ll c$.

572. Пучок света в некоторой системе отсчета образует телесный угол $d\Omega$. Как изменится этот угол при переходе к другой инерциальной системе отсчета?

573. Если считать, что звезды в ближайшей к нам части Галактики распределены равномерно, то каково будет их распределение $dN/d\Omega'$ для наблюдателя в ракете, летящей со скоростью, близкой к скорости света?

574. Найти формулы преобразования частоты ω (эффект Доплера) и волнового вектора \mathbf{k} плоской монохроматической световой волны при переходе от одной инерциальной системы к другой. Направление относительной скорости \mathbf{V} произвольно.

575. Найти частоту ω световой волны, наблюдаемую при поперечном эффекте Доплера (направление распространения света перпендикулярно к направлению движения источника в системе, связанной с приемником света). Каково направление распространения рассматриваемой волны в системе, связанной с источником?

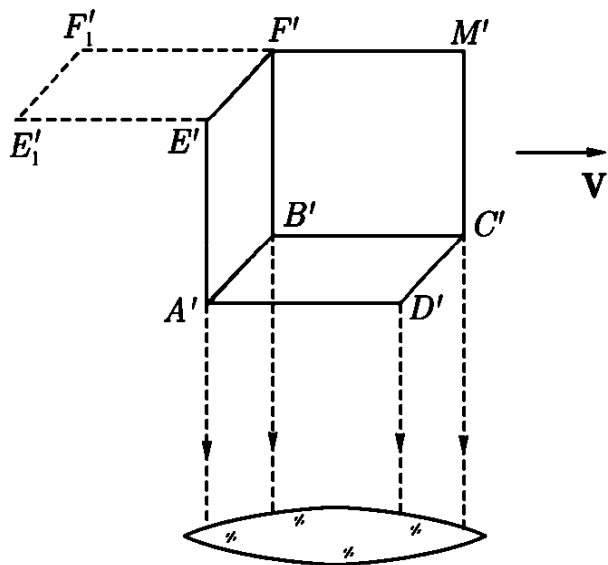


Рис. 40

576. Длина волны света, излучаемого некоторым источником, в той системе, в которой источник покоится, равна λ_0 . Какую длину волны λ зарегистрируют: а) наблюдатель, приближающийся со скоростью V к источнику и б) наблюдатель, удаляющийся с такой же скоростью от источника?

577. Источник, испускающий свет частоты ω_0 изотропно во все стороны в своей системе отсчета, движется равномерно и прямолинейно относительно наблюдателя со скоростью V , проходя от него в момент наибольшего сближения на прицельном расстоянии d . Число фотонов, излучаемых в единицу времени в единицу телесного угла (интенсивность потока фотонов), равно J_0 в системе покоя источника. Найти зависимость частоты ω и интенсивности J потока фотонов, регистрируемого наблюдателем, от угла между направлением луча и скорости V . При каких углах $\theta = \theta_0$ регистрируемые частота и интенсивность потока фотонов совпадут с ω_0 и J_0 ? Какая доля фотонов регистрируется наблюдателем в интервалах $0 \leq \theta \leq \theta_0$ и $\theta_0 \leq \theta \leq \pi$? Начертить графики зависимостей $\omega(\theta)$ и $J(\theta)$ для $V/c = 1/3$ и $V/c = 4/5$. Какой характер имеют эти зависимости при $V/c \rightarrow 1$?

578. Найти угловое распределение силы света I (световая энергия, излучаемая в единицу времени в единицу телесного угла), а также полный световой поток от источника света, рассмотренного в предыдущей задаче.

УКАЗАНИЕ. каждый фотон обладает энергией $\hbar\omega$, где \hbar — постоянная Планка.

579. Зеркало движется нормально к собственной плоскости со скоростью V . Найти закон отражения плоской монохроматической волны от такого зеркала (заменяющий закон равенства углов падения и отражения при $V = 0$), а также закон преобразования частоты при отражении. Рассмотреть, в частности, случай $V \rightarrow c$.

580. Решить предыдущую задачу для случая, когда зеркало перемещается поступательно вдоль собственной плоскости.

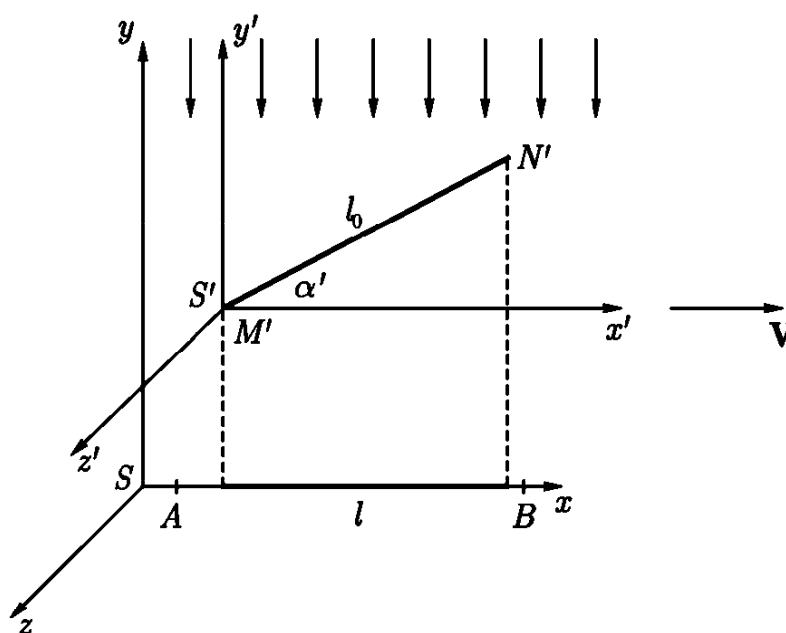


Рис. 41

581. Непрозрачный куб с ребром l_0 в своей системе покоя движется относительно наблюдателя со скоростью V (рис. 40). Наблюдатель фотографирует его в момент, когда лучи света, испускаемые поверхностью куба, приходят в объектив фотоаппарата под прямым углом к направлению движения (в системе фотоаппарата). Куб виден под малым телесным углом, вследствие чего лучи, приходящие от разных точек куба, можно считать параллельными.

Какой вид будет иметь изображение на фотопластинке? Составить чертеж изображения, нанести на него те вершины и ребра куба, которые будут сфотографированы. Вычислить их относительные длины. Изображению какого неподвижного предмета эквивалентна полученная фотография? Какой вид приняло бы изображение движущегося куба, если бы были справедливы преобразования Галилея?

582. Тонкий стержень $M'N'$ неподвижен в системе S' , имеет в ней длину l_0 и ориентирован так, как показано на рис. 41. Система S' движется со скоростью $V \parallel Ox$ относительно фотопластинки AB , покоящейся в системе S . В момент прохождения стержня мимо фотопластинки происходит короткая световая вспышка, при которой лучи света падают нормально к плоскости xy фотопластинки.

а) Какова длина l изображения на фотопластинке? Может ли она стать равной или превысить l_0 ?

б) При каком угле наклона α' сфотографируется только торец стержня?

в) Каков угол наклона α стержня к оси Ox ?

583. Шар, движущийся со скоростью V , фотографируется неподвижным наблюдателем под малым телесным углом. Лучи света от шара падают параллельным пучком на объектив фотоаппарата, составляя прямой угол с направлением скорости V . Какую форму будет иметь изображение на фотопластинке? Какая часть поверхности шара будет сфотографирована?

УКАЗАНИЕ. Представить шар в виде совокупности тонких дисков, движущихся параллельно своим плоскостям, и построить изображение каждого диска.

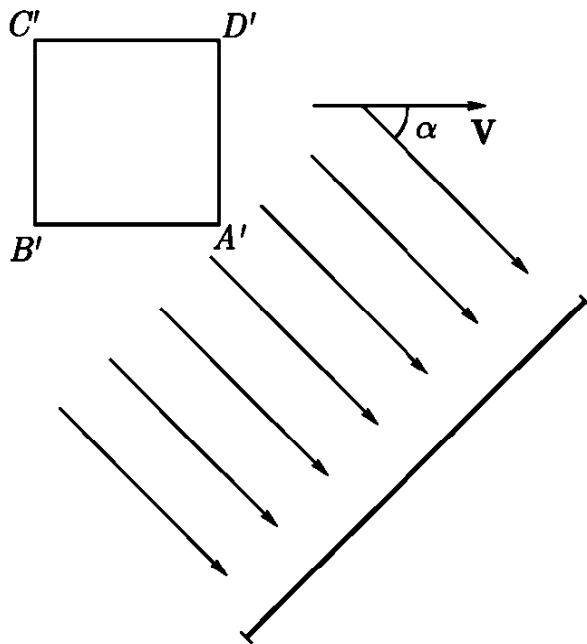


Рис. 42

584. Пусть движущийся непрозрачный куб фотографируется неподвижным наблюдателем в момент, когда лучи, приходящие от куба, составляют произвольный угол α с направлением скорости V куба (в системе наблюдателя). Телесный угол, под которым виден куб, мал, вследствие чего лучи приходят параллельным пучком и падают на фотопластинку нормально к ее поверхности (рис. 42). Показать, что фотография должна совпадать с фотографией неподвижного, но повернутого на некоторый угол куба. Найти угол поворота изображения при разных значениях V и фиксированном α . При каком значении V будет сфотографирована одна грань $A'B'$? одна грань $B'C'$?

585. Ввести волновой 4-вектор, описывающий распространение плоской монохроматической волны в движущейся со скоростью V в среде с показателем преломления n (фазовая скорость волны в неподвижной сре-

де $v' = \frac{c}{n}$). Найти формулы преобразования частоты, угла распространения и фазовой скорости.

586. Плоская волна распространяется в движущейся со скоростью V среде в направлении перемещения среды. Длина волны в вакууме λ . Найти скорость v волны относительно лабораторной системы (опыт Физо). Показатель преломления n определяется в системе S' , связанной со средой, и зависит от длины волны λ' в этой системе. Вычисления проводить с точностью до первого порядка по V/c .

§ 2. Четырехмерные векторы и тензоры

При переходе от одной инерциальной системы (S') к другой (S) компоненты 4-вектора преобразуются по формулам

$$A_i = \alpha_{ik} A'_k, \quad (\text{X.16})$$

где матрица преобразования $\hat{\alpha}$ имеет вид¹

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{X.17})$$

Она соответствует преобразованию (X.1), при котором одноименные координатные оси систем S и S' параллельны, относительная скорость направлена вдоль x и начала координат при $t = t' = 0$ совпадали.

Матрица преобразования удовлетворяет соотношениям

$$\alpha_{il}\alpha_{kl} = g_{ik}, \quad \alpha_{li}\alpha_{lk} = g_{ik}, \quad (\text{X.18})$$

где g_{ik} — метрический тензор, имеющий вид

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{X.19})$$

Знаки на главной диагонали метрического тензора соответствуют знакам в формуле (X.5), определяющей скалярное произведение двух 4-векторов.

¹ Не забывать правило знаков при суммировании, сформулированное после формулы (X.5): при суммировании по дважды повторяющимся индексам слагаемое с индексом 0 берется со знаком «+», а слагаемые с индексами 1, 2, 3 — со знаком «-».

Преобразование, обратное (X.16), записывается так:

$$A'_i = \alpha_{ki} A_k. \quad (\text{X.20})$$

Координаты мировой точки $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ образуют 4-вектор и преобразуются по формулам (X.16), (X.20).

При последовательном выполнении двух преобразований Лоренца соответствующие матрицы перемножаются по обычному правилу умножения матриц (см. гл. I, § 1).

Четырехмерным тензором (4-тензором) N -го ранга называется совокупность 4^N величин $T_{ik\dots l}$, которые при переходе к другой инерциальной системе отсчета преобразуются как произведения соответствующих компонент 4-вектора A_i, A_k, \dots, A_l :

$$T_{ik\dots l} = \alpha_{ip}\alpha_{kr}\dots\alpha_{ls}T'_{pr\dots s}. \quad (\text{X.21})$$

Определитель $|\alpha_{ik}|$, составленный из элементов матрицы $\hat{\alpha}$ преобразования Лоренца, может быть равен -1 (собственное преобразование Лоренца, например, (X.1)) или $+1$ (несобственное преобразование). Любое собственное преобразование Лоренца сводится к преобразованию вида (X.1) и пространственному повороту; такие преобразования могут рассматриваться как повороты в четырехмерном пространстве. Несобственные преобразования Лоренца включают в себя отражение одной или трех координат.

Псевдотензором N -го ранга называется совокупность 4^N величин $P_{ik\dots l}$, которые при четырехмерных преобразованиях координат преобразуются по формулам

$$P_{ik\dots l} = \alpha_{ip}\alpha_{kr}\dots\alpha_{ls}|\alpha_{mn}|P'_{pr\dots s}. \quad (\text{X.22})$$

Примером псевдотензора является совершенно антисимметричный единичный псевдотензор 4-го ранга (см. ниже задачу 592). Его компоненты e_{iklm} определяются следующими условиями: а) e_{iklm} меняют знак при перестановке любой пары значков; б) $e_{0123} = 1$. Отсюда следует, что компоненты e_{iklm} равны нулю, если среди значков есть совпадающие между собой, или равны ± 1 , если все значки различны.

587. Доказать равенства:

$$A_i = g_{ik}A_k, \quad A_i B_i = A_i g_{ik} B_k, \quad g_{ik} g_{kl} = g_{il}, \quad g_{ii} = 4,$$

где g_{ik} — метрический тензор (X.19), A_i и B_i — четырехмерные векторы. При суммировании по двум повторяющимся значкам используется правило знаков, приведенное после формулы (X.5).

588. Показать, что тензор g_{ik} (X.19) имеет одинаковый вид во всех инерциальных системах координат.

589. Показать, что компоненты A_1, A_2, A_3 четырехмерного вектора $A_i = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ при пространственных поворотах преобразуются как компоненты трехмерного вектора $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, а компонента A_4 является трехмерным скаляром.

590. Найти, на какие трехмерные тензоры расщепляется 4-тензор Π ранга при пространственных поворотах.

591. Показать, что компоненты антисимметричного 4-тензора Π ранга преобразуются при пространственных поворотах как компоненты двух независимых трехмерных векторов.

592. Доказать, что величина e_{iklm} , определенная во введении к данному параграфу, действительно преобразуется как псевдотензор.

593. Доказать равенства: а) $e_{iklm}e_{lmrs} = 2(g_{is}g_{kr} - g_{ir}g_{ks})$; б) $e_{iklm}e_{klmn} = -6g_{in}$, где величины e_{iklm} и g_{ik} определены во введении к этому параграфу.

594. Доказать равенство

$$e_{iklm}e_{lmrs} = A_i B_k C_r D_s = 2(A_i C_i)(B_k C_k) - 2(A_i C_i)(B_k D_k).$$

595. Составить 4-вектор из частных производных $\partial\varphi/\partial x_i$ ($i = 0, 1, 2, 3$), где φ — скаляр. Найти выражение для компонент ∇_i оператора четырехмерного градиента.

596. Составить 4-вектор T_{ik} из частных производных $\partial A_i/\partial x_k$ ($i, k = 0, 1, 2, 3$), где A_i — 4-вектор. Показать, что 4-дивергенция $\nabla_i A_i$ является инвариантом, где ∇_i — оператор 4-градиента, введенный в предыдущей задаче.

597. Найти закон преобразования величин:

а) A_i^2 ; б) $T_{ik}A_k$, если A_i — 4-вектор, T_{ik} — 4-тензор.

598. Два 4-вектора A_i и B_i называются параллельными, если

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}.$$

Доказать, что отношение одноименных компонент параллельных 4-векторов инвариантно относительно преобразования Лоренца.

599. Сколько существенно различных компонент имеет 4-тензор Π ранга, антисимметричный по отношению к перестановке любой пары знаков? Показать, что они преобразуются при поворотах как компоненты четырехмерного псевдовектора.

600. Даны три системы отсчета: S, S', S'' . S'' движется относительно S' со скоростью V' , параллельной оси x' , S' — относительно S со скоростью V , параллельной оси x . Одноименные оси всех трех систем параллельны. Путем перемножения соответствующих матриц получить матрицу преобразования от S'' к S . Получить отсюда формулу сложения (см. (X.11)) одинаково направленных скоростей.

601. Записать преобразование Лоренца (X.1) в переменных $x_1, x_2, x_3, x_0 = ct$, выразив величину относительной скорости V через угол α по формуле $\frac{V}{c} = \text{th } \alpha$.

602. Получить матрицу преобразования \hat{g} от системы S' к системе S путем перемножения матриц простых преобразований. S' движется относительно S со скоростью V ($\frac{V}{c} = \text{th } \alpha$) в направлении, характеризуемом сферическими углами ϑ, φ . Соответствующие оси S и S' параллельны.

§ 3. Релятивистская электродинамика

Приведем основные формулы релятивистской электродинамики в вакууме. Плотность трехмерного тока $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ и плотность заряда ρ образуют 4-вектор плотности тока:

$$j_i = (c\rho, \mathbf{j}). \quad (\text{X.23})$$

Электрическое и магнитное поля являются компонентами антисимметричного 4-тензора электромагнитного поля F_{ik} :

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{X.24})$$

При переходе от системы S' к системе S компоненты поля преобразуются по формулам (оси x и x' параллельны относительной скорости):

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E_y &= \gamma(E'_y + \beta H'_z), & E_z &= \gamma(E'_z - \beta H'_y); \\ H_x &= H'_x, & H_y &= \gamma(H'_y - \beta E'_z), & H_z &= \gamma(H'_z + \beta E'_y). \end{aligned} \quad (\text{X.25})$$

Величины

$$\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2 = \text{inv}, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = \text{inv} \quad (\text{X.26})$$

являются инвариантами преобразования Лоренца. Векторный \mathbf{A} и скалярный φ потенциалы образуют 4-вектор потенциала

$$A_i = (\varphi, \mathbf{A}). \quad (\text{X.27})$$

Компоненты тензора энергии-импульса в вакууме определяются формулой

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(-F_{il}F_{kl} + \frac{1}{4}g_{ik}F_{lm}^2 \right). \quad (\text{X.28})$$

Девять пространственных компонент тензора T_{ik} образуют трехмерный тензор натяжений Максвелла

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} (-E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta) + \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) \delta_{\alpha\beta}. \quad (\text{X.29})$$

Пространственно-временные компоненты T_{ik} пропорциональны составляющим плотности потока энергии \mathbf{S} и плотности импульса поля \mathbf{g} :

$$\begin{aligned} T_{0\alpha} &= \frac{1}{c} \gamma_\alpha, & \mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \\ T_{0\alpha} &= c g_\alpha, & \mathbf{g} &= \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}. \end{aligned} \quad (\text{X.30})$$

Временная компонента T_{ik} связана с плотностью энергии поля ω соотношением

$$T_{00} = \omega = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2). \quad (\text{X.31})$$

Дивергенция тензора T_{ik} определяет объемную плотность сил $f_i = \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}}{c}, \mathbf{f} \right)$, приложенных к зарядам:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = f_i = -\frac{1}{c} F_{ik} j_k. \quad (\text{X.32})$$

Перейдем теперь к формулам электродинамики при наличии сред. В этом случае векторы поля \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} образуют два антисимметричных четырехмерных тензора II ранга: тензор поля

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{X.33})$$

и тензор индукции

$$H_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{X.34})$$

Векторы поляризации и намагничения \mathbf{P} и \mathbf{M} также образуют 4-тензор

$$M_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & P_x & P_y & P_z \\ -P_x & 0 & -M_z & M_y \\ -P_y & M_z & 0 & -M_x \\ -P_z & -M_y & M_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{X.35})$$

Формулы $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$ объединяются в одно соотношение

$$H_{ik} = F_{ik} - 4\pi M_{ik}. \quad (\text{X.36})$$

Четырехмерная f_i , приложенная к единице объема среды со стороны поля, определяется как

$$f_i = \left(\frac{1}{c} [Q + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}], \mathbf{f} \right), \quad (\text{X.37})$$

где \mathbf{f} — пондеромоторная сила, приложенная к единице объема, Q — джоулево тепло, выделяемое в единицу времени в единице объема.

603. Записать формулы преобразования для векторов поля \mathbf{E} , \mathbf{B} ; \mathbf{D} , \mathbf{H} и поляризаций \mathbf{P} , \mathbf{M} при переходе к системе S' , движущейся относительно системы S с произвольно направленной скоростью \mathbf{V} . Представить формулы преобразования в векторном виде.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться выражением коэффициентов преобразования, приведенным в задаче 602, и антисимметрией тензоров F_{ik} , H_{ik} , M_{ik} .

604. В системе отсчета S имеется однородное электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} . С какой скоростью относительно S должна двигаться система S' , в которой $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{H}'$? Всегда ли задача имеет решение и единственно ли оно? Чему равны абсолютные значения \mathbf{E}' и \mathbf{H}' ?

605. В системе отсчета S электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны: $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$. С какой скоростью относительно S должна двигаться система S' , в которой имеется только электрическое или только магнитное поле? Всегда ли существует решение и единственно ли оно?

606. Бесконечно длинный круговой цилиндр равномерно заряжен с линейной плотностью λ . Вдоль оси цилиндра течет равномерно распределенный ток \mathcal{I} . Во всем пространстве проницаемости $\epsilon = \mu = 1$. Найти такую систему отсчета, в которой существует только электрическое или только магнитное поле. Найти величину этих полей.

607. Система дифференциальных уравнений для магнитных силовых линий вида

$$dr \times \mathbf{H} = 0 \quad (1)$$

не является релятивистски инвариантной и при переходе в другую инерциальную систему не сохраняет своего вида.

а) Показать, что для полей некоторого специального вида система уравнений

$$dr \times \mathbf{H} + c\mathbf{E} dt = 0, \quad \mathbf{E} \cdot dr = 0 \quad (2)$$

может рассматриваться как релятивистски инвариантное обобщение системы (1).

б) Выяснить структуру полей, для которых такое обобщение возможно, путем рассмотрения условий совместности уравнений (2). Сколько независимых уравнений содержится в системе (2)?

в) Какой вид имеет условие интегрируемости системы (2)?

г) Убедиться в том, что силовые линии, определяемые системой (2), перемещаются в поперечном направлении со скоростью $\mathbf{u} = c\mathbf{E} \times \frac{\mathbf{H}}{H^2}$, т. е. являются движущимися даже в случае статических полей.

608. Показать, что релятивистски инвариантная система уравнений для электрических силовых линий, аналогичная системе (2) предыдущей задачи, имеет вид $e_{iklm} F_{lm} dx_k = 0$ (1). Какие требования налагаются на \mathbf{E} и \mathbf{H} , а также на распределение зарядов и токов условиями совместности и интегрируемости системы (1)? Как перемещаются силовые линии, определяемые системой (1)?

609. Найти величину э. д. с. электромагнитной индукции, возникающей при движении проводника в магнитном поле \mathbf{B} . Воспользоваться либо формулами преобразования напряженностей поля, либо формулами преобразования потенциалов.

610. Найти поля φ , \mathbf{A} , \mathbf{E} , \mathbf{H} точечного заряда e , движущегося равномерно со скоростью \mathbf{V} , произведя преобразование Лоренца от системы отсчета, в которой заряд покоится.

611. Показать, что электрическое поле равномерно движущегося точечного заряда «сплющивается» в направлении движения. При этом происходит ослабление поля E на линии движения заряда по сравнению с кулоновым полем. Как согласуется это ослабление с формулой преобразования $E_{\parallel} = E'_{\parallel}$?

612. Электрический диполь с моментом \mathbf{p}_0 в системе покоя равномерно движется со скоростью \mathbf{V} . Найти создаваемое им электромагнитное поле φ , \mathbf{A} , \mathbf{E} , \mathbf{H} .

613. Получить формулы преобразования электрического \mathbf{p} и магнитного \mathbf{m} дипольных моментов поляризованного и намагниченного тела при переходе от инерциальной системы отсчета, в которой тело покоится, к другой инерциальной системе.

УКАЗАНИЕ. Исходить из известных формул преобразования вектора поляризации \mathbf{P} и вектора намагничения \mathbf{M} .

614. Незаряженная проволочная петля с током \mathcal{I}' , имеющая форму прямоугольника $a \times b$, движется равномерно со скоростью \mathbf{V} параллельно своей стороне a . Провод имеет конечное сечение. Найти распределение электрических зарядов на петле, а также ее электрический и магнитный моменты, наблюдаемые в лабораторной системе отсчета.

615. Найти закон релятивистского преобразования джоулева тепла Q , исходя из определения четырехмерной плотности силы.

616. Найти формулы преобразования компонент тензора энергии импульса T_{ik} при преобразовании Лоренца.

617. Найти шпур тензора энергии импульса (X.28), т. е. результат свертывания его по двум значкам.

618*. Электромагнитное поле отлично от нуля лишь внутри некоторого конечного пространственного объема V , в котором отсутствуют заряды. Доказать, что полная энергия и импульс поля образуют 4-вектор.

619*. Полный момент импульса системы, состоящей из электромагнитного поля в вакууме и точечных зарядов, можно определить формулой¹

$$K_{ik} = -\frac{i}{c} \int_t (x_i T_{kl} - x_k T_{il}) dS_l + \sum (x_i p_k - x_k p_i),$$

в которой интеграл распространен на всю гиперповерхность $x_0 = ct = \text{const}$. Суммирование производится по всем частицам; при этом берутся значения x_i, p_k в точках пересечения мировых линий соответствующих зарядов с гиперповерхностью $x_0 = \text{const}$. Доказать сохранение полного момента импульса K_{ik} системы, учитывая, что $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{1}{c} F_{ik} j_k$.

¹ Легко убедиться непосредственно, используя определение тензора T_{ik} , что пространственная часть $K_{\alpha\beta}$ тензора K_{ik} представляет собой антисимметричный тензор, эквивалентный вектору $\mathbf{K} = \int (\mathbf{r} \times \mathbf{g}) dV + \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, где $\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ — плотность импульса поля.

620*. Система состоит из частиц и электромагнитного поля в вакууме и занимает конечный объем. Из рассмотрения баланса полного момента импульса $K_{\alpha\beta}$ этой системы найти выражение для плотности потока \mathcal{K} момента импульса поля. Воспользоваться выражением для K_{ik} , приведенным в условии предыдущей задачи.

ЛИТЕРАТУРА

Фок В. А. [107], Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. [65, 66], Бергман П. Г. [13], Френкель Я. И. [111, 112], Эйнштейн А. [117], Мандельштам Л. И. [76], Джексон Дж. [52] Беккер Р. [12], Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. [106], Гуревич Л. Э. [49], Паули В. [87], Гайтлер В. [29], Компанеец А. С. [60], Минковский Г. [79], Борн М. [17], Лефферт К., Донайе Т. [72], Пановский В., Филипс М. [86], Вайскопф В. [24], Соколовский Ю. И. [97].

ГЛАВА XI

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

§ 1. Энергия и импульс

Импульс \mathbf{p} релятивистской частицы связан с ее скоростью \mathbf{v} соотношением

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (\text{XI.1})$$

где m — масса частицы. Полная энергия \mathcal{E} свободно движущейся частицы может быть выражена через скорость:

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{XI.2})$$

или импульс:

$$\mathcal{E} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \quad (\text{XI.3})$$

Кинетическая энергия T частицы отличается от полной энергии на величину энергии покоя $\mathcal{E}_0 = mc^2$:

$$T = \mathcal{E} - mc^2. \quad (\text{XI.4})$$

Энергия, импульс и скорость частицы связаны формулой:

$$\mathcal{E}\mathbf{v} = c^2\mathbf{p}. \quad (\text{XI.5})$$

Энергия и импульс частицы являются временной и пространственной составляющими 4-вектора энергии импульса (4-импульса):

$$p_i = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p}). \quad (\text{XI.6})$$

При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой энергия и импульс преобразуются по формулам (X.4). Квадрат 4-импульса является релятивистским инвариантом:

$$p_i^2 = \mathcal{E}^2/c^2 - p^2 = m^2c^2. \quad (\text{XI.7})$$

Частица называется нерелятивистской, если ее кинетическая энергия мала, и ультрарелятивистской, если ее кинетическая энергия велика по сравнению с энергией покоя. Скорость ультрарелятивистской частицы близка к скорости света, импульс связан с энергией соотношением

$$\mathcal{E} = cp. \quad (\text{XI.8})$$

Частицы с нулевой массой и энергией покоя (фотоны, нейтрино) всегда являются ультрарелятивистскими, их скорость точно равна c .

Энергия и импульс фотона в вакууме связаны с его частотой формулами:

$$\mathcal{E} = \hbar\omega, \quad p = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k, \quad (\text{XI.9})$$

где $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}$ — постоянная Планка.

Полные энергия и импульс замкнутой системы частиц сохраняются. Отсюда следует, что если до начала и после окончания некоторой реакции (распада или столкновения) частицы не взаимодействуют между собой, то полный 4-импульс в начальном и конечном состояниях одинаков:

$$\sum_a p_{ai}^{(0)} = \sum_b p_{bi}, \quad (\text{XI.10})$$

где суммирование производится по всем частицам, имеющимся до и после реакции.

При рассмотрении столкновений удобно пользоваться одной из двух систем отсчета: лабораторной системой S или системой центра инерции S' (система ц. и.), в которой полный импульс p равен нулю. Следует обратить внимание на полезный прием, состоящий в использовании инвариантности квадратов 4-импульсов (см. решения задач 651, 657*, 675).

Различаются два типа столкновений: упругие, при которых не меняются внутренние состояния и, следовательно, массы частиц, и неупругие, при которых меняются внутренние энергии (массы) сталкивающихся частиц, исчезают старые или рождаются новые частицы. При неупругом столкновении двух частиц сумма масс $m_1 + m_2$ сталкивающихся частиц отличается от суммы масс M_k образующихся частиц на величину

$$\Delta M = m_1 + m_2 - M_k. \quad (\text{XI.11})$$

которая называется дефектом массы. Величина $Q = c^2 \Delta M$ называется энергетическим выходом реакции.

Реакции, идущие по схеме

$$a + b \rightarrow c + d, \quad (\text{XI.12})$$

т. е. такие, при которых две частицы превращаются в две другие частицы, называются двухчастичными (частным случаем двухчастичной реакции является упругое рассеяние двух частиц). Кинематику двухчастичных реакций удобно описывать с помощью инвариантных переменных s , t , u :

$$s = (p_{ai} + p_{bi})^2, \quad t = (p_{ai} - p_{ci})^2, \quad u = (p_{ai} - p_{di})^2, \quad (\text{XI.13})$$

где p_{ai} — и т. д. — 4-импульсы частиц, участвующих в реакции. Любую из величин s , t , u можно выразить через две другие с помощью соотношения

$$s + t + u = (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2)c^2. \quad (\text{XI.14})$$

Наглядное представление о кинематике двухчастичной реакции дает кинематическая плоскость, на которой откладываются значения переменных s и t (или s , t и u — см. задачу 673). Законы сохранения энергии и импульса ограничивают на кинематической плоскости область значений s , t , u , физическую для данной реакции.

Многие формулы релятивистской кинематики приобретают более простой вид, если пользоваться системой единиц, в которой скорость света $c = 1$. При этом масса, энергия и импульс измеряются в одинаковых единицах, например в $Mэв$ ($1 Mэв = 10^6 эв = 10^{-3} Гэв = 1,602 \cdot 10^{-6} эрг$). В некоторых задачах этого параграфа используется такая система единиц (что всегда оговаривается). В ряде случаев массы элементарных частиц измеряют в единицах массы электрона m_e (т. е. используют систему единиц, в которой $m_e = 1$).

В таблице XI.1 приведены для справок массы ряда элементарных частиц. В таблице XI.2 приведены значения энергий связи B некоторых ядер. Под энергией связи понимается величина

$$B = \Delta M c^2 = \sum \mathcal{E}_{0н} - \mathcal{E}_{0я}, \quad (\text{XI.15})$$

где $\mathcal{E}_{0н}$ — энергия покоя нуклона, $\mathcal{E}_{0я}$ — энергия покоя ядра.

621. Выразить импульс p релятивистской частицы через ее кинетическую энергию T .

622. Выразить скорость v частицы через ее импульс p .

623. Частица с массой m обладает энергией \mathcal{E} . Найти скорость v частицы. Рассмотреть, в частности, нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы.

¹ В качестве двух независимых величин можно выбрать, например, s и t . Все другие величины (энергии и углы рассеяния частиц в лабораторной системе и системе ц. и.) выражаются через них — см. задачи 668–670.

Таблица XI.1

Частица	Масса	
	в единицах m_e	в Мэв
Фотон γ	0	0
Нейтрино ν	0	0
Электрон e^-	1	0,511
Позитрон e^+		
Мю-мезоны μ^\pm	207	105,7
Пи-мезоны π^\pm	273	139,6
π^0	264	135,0
Ка-мезоны K^\pm	966	493,8
K^0, \bar{K}^0	974	497,8
Протон p	1836	938,2
Нейтрон n	1839	939,5
Лямбда-гиперон Λ	2181	1115,4

Таблица XI.2

Изотопы	H_1^2	He_2^4	Li_3^7
$B, \text{Мэв}$	2,23	28,11	38,96

624. Найти приближенные выражения кинетической энергии T частицы с массой m : а) через ее скорость v и б) через ее импульс p с точностью до $\frac{v^4}{c^4}$ и $\frac{p^4}{m^4 c^4}$ соответственно, при $v \ll c$.

625. Найти скорость v частицы с массой m и зарядом e , прошедшей разность потенциалов V (начальная скорость равна нулю). Упростить общую формулу для нерелятивистского и ультрарелятивистского случаев (учесть по два члена разложения).

626. Найти скорость v частиц в следующих случаях: а) электроны в электронной лампе ($\mathcal{E} = 300 \text{ эВ}$); б) электроны в синхротроне на 300 Мэв ;

в) протоны в синхроциклотроне на 680 Мэв, г) протоны в синхрофазотроне на 10 Гэв.

627. Ускоритель дает на выходе пучок заряженных частиц с кинетической энергией T ; сила тока в пучке равна \mathcal{I} . Найти силу F давления пучка на поглощающую его мишень и выделяемую в мишени мощность W . Масса частицы m , заряд e .

628. Некоторое тело движется с релятивистской скоростью v через газ, в единице объема которого содержится N медленно движущихся частиц с массой m . Найти давление p , производимое газом на элемент поверхности, нормальный к его скорости, если частицы упруго отражаются от поверхности тела.

629. В линейном ускорителе частица ускоряется в щели между полыми цилиндрическими электродами — «пролетными трубками», вдоль общей оси которых проходит траектория частицы. Ускорение происходит под действием высокочастотного электрического поля с частотой $\nu = \text{const}$. Разгоняются те частицы, которые проходят все промежутки между трубками при наличии там ускоряющего поля. Каковы должны быть длины пролетных трубок, чтобы частица с зарядом e и массой m пролетала через ускоряющие промежутки в те моменты времени, когда на них имеется максимальное напряжение V_e ? Оценить также полную длину ускорителя с N пролетными трубками.

630. Поток монохроматических μ -мезонов, родившихся в верхних слоях атмосферы¹, падает вертикально вниз. Найти отношение интенсивностей потока μ -мезонов на высоте h над уровнем моря (I_h) и на уровне моря (I_0), считая, что в рассматриваемом слое воздуха толщиной h происходит только ослабление потока за счет естественного распада μ -мезонов. Энергия μ -мезонов $\mathcal{E} = 4,2 \cdot 10^8$ эв, $h = 3$ км, среднее время жизни покоящегося μ -мезона $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ сек.

631. Система отсчета S' движется со скоростью V относительно системы S . Частица с массой m , обладающая в S' энергией \mathcal{E}' и скоростью v' , движется под углом ϑ' к направлению V . Найти угол ϑ между импульсом p частицы и направлением V в системе S . Выразить энергию и импульс частицы в S через ϑ' , \mathcal{E}' или ϑ' , v' . Рассмотреть, в частности, ультра-релятивистский случай $\mathcal{E}' \gg mc^2$, $V \approx c$. Показать, что в этом случае в некотором (каком?) интервале углов можно пользоваться приближенной формулой $\vartheta \approx \frac{1}{\gamma} \text{tg} \frac{\vartheta'}{2}$.

¹Задача формулируется в упрощенном виде.

632*. Система S' движется относительно системы S со скоростью V . Угловое распределение частиц, имеющих в S' одинаковую энергию \mathcal{E}' , описывается функцией $\frac{dW}{d\Omega'} = F'(\vartheta', \alpha')$, где величина dW представляет собой долю частиц, движущихся в системе S' внутри телесного угла $d\Omega'$. Ее обычно нормируют так, что

$$\int dW = \int F'(\vartheta', \alpha') d\Omega' = 1.$$

Угол ϑ' отсчитывается от направления V . Найти угловое распределение таких частиц в системе S . Рассмотреть, в частности, ультрарелятивистский случай.

633*. Число частиц dN , находящихся в элементе объема dV и имеющих составляющие импульсы, заключенные в пределах от p_x до $p_x + dp_x$, от p_y до $p_y + dp_y$, от p_z до $p_z + dp_z$, выражается в виде

$$dN = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) dV(d\mathbf{p}),$$

где $(d\mathbf{p}) = dp_x dp_y dp_z$ — элемент объема в пространстве импульсов, $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ — функция распределения (или плотность числа частиц в фазовом пространстве). Найти закон релятивистского преобразования функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$.

634. Частицы сорта 1, обладающие в системе S скоростью v_1 , рассеиваются неподвижными частицами сорта 2. Как преобразуется сечение рассеяния $d\sigma_{12}$ при переходе к системе отсчета S' , в которой частицы сорта 2 обладают скоростью v'_2 , а частицы сорта 1 — скоростью v'_1 ? Рассмотреть, в частности, случай, когда скорости v'_1 и v'_2 параллельны.

УКАЗАНИЕ. Сечением рассеяния $d\sigma_{12}$ называется отношение числа частиц, рассеиваемых в единицу времени в телесный угол $d\Omega$ одним рассеивающим центром, к плотности потока рассеиваемых частиц $J_{12} = n_1 v_0$, где n_1 — число рассеиваемых частиц в единице объема, $v_0 = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ — относительная скорость частиц 1-го и 2-го сорта (ср. с задачей 560).

635. π^0 -мезон движется со скоростью v и распадается на лету на два γ -кванта. Найти угловое распределение γ -квантов распада $\frac{dW}{d\Omega}$ в лабораторной системе отсчета, учитывая, что в системе покоя π^0 -мезона оно сферически симметрично.

636. Выразить энергию π^0 -мезона, рассмотренного в предыдущей задаче, через отношение f числа γ -квантов распада, испускаемых в переднюю полусферу, к числу γ -квантов, испускаемых в заднюю полусферу.

637. π^0 -мезон распадается на лету на два γ -кванта. Показать, что минимальный угол ϑ_{\min} разлета γ -квантов определяется условием $\cos \frac{\vartheta_{\min}}{2} = \frac{v}{c}$ в той системе отсчета, в которой скорость π^0 -мезона равна v .

638*. Найти зависимость энергии γ -кванта, возникающего при распаде π^0 -мезона (ср. с задачей 635), от угла ϑ между направлениями распространения кванта и движения π -мезона. Определить энергетический спектр γ -квантов распада в лабораторной системе отсчета.

УКАЗАНИЕ. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что в системе покоя π^0 -мезона энергия γ -кванта $\mathcal{E}' = mc^2/2$ (m — масса π^0 -мезона).

639. Показать, что какова бы ни была форма энергетического спектра π^0 -мезонов, энергетический спектр γ -квантов распада в лабораторной системе отсчета будет иметь максимум при $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$, $\mathcal{E}' = \frac{mc^2}{2}$, где m — масса π^0 -мезона. Пусть \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 — произвольные значения энергии γ -квантов распада, расположенные по разные стороны указанного максимума и отвечающие одинаковым значениям функции распределения. Выразить массу m π^0 -мезона через \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 .

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться энергетическим спектром γ -квантов, найденным в задаче 638*.

640. Определить массу m некоторой частицы, зная, что она распадается на две частицы с массами m_1, m_2 . Из опыта известны величины импульсов p_1, p_2 частиц, образовавшихся при распаде, и угол ϑ между их направлениями. Вычислить массу заряженного π -мезона, распадающегося по схеме $\pi \rightarrow \mu + \nu$, если из опыта известно, что π -мезон до распада покоился, а μ -мезон получил после распада импульс $p_\mu = 29,8 \text{ Мэв/с}$. Масса μ -мезона приведена в таблице XI.1.

641. Определить массу m_1 некоторой частицы, зная, что она представляет собой одну из двух частиц, образовавшихся при распаде частицы с массой m и импульсом p . Импульс p_2 , масса m_2 и угол ϑ_2 вылета второй частицы, образовавшейся при распаде, также известны.

642. Частица с массой m_1 и скоростью v сталкивается с покоящейся частицей массы m_2 и поглощается ею. Найти массу m и скорость V образовавшейся частицы.

643. Покоящееся тело с массой m_0 распадается на две части с массами m_1 и m_2 . Вычислить кинетические энергии T_1 и T_2 продуктов распада. Найти распределение энергии распада в системе покоя распадающейся частицы между а) α -частицей и дочерним ядром при α -распаде U^{238} ; б) μ -ме-

зоном и нейтрино (ν) при распаде π -мезона ($\pi \rightarrow \mu + \nu$); в) γ -квантом и ядром отдачи при излучении γ -кванта.

644. Покоящаяся частица a распадается по схеме $a \rightarrow b + d$. Выразить энергию распада $Q_a = m_a - m_b - m_d$ ($c = 1$) через кинетическую энергию T_b одной из частиц распада и массы m_b, m_d . Вычислить энергию распада и массу Σ^+ -частицы, распадающейся по схеме $\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$, пользуясь найденным из опыта значением $T_{\pi^+} = 91,7 \text{ Мэв}$ и массами нейтрона и π^+ -мезона, приведенными в табл. XI.1. Сделать то же самое для распада Σ^+ по другой схеме $\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$, если известна $T_p = 18,8 \text{ Мэв}$.

645. Покоящееся свободное возбужденное ядро (энергия возбуждения $\Delta\mathcal{E}$) излучает γ -квант. Найти его частоту ω . Масса возбужденного ядра m . В чем причина того, что $\omega \neq \Delta\mathcal{E}/\hbar$? Как изменится результат, если ядро жестко закреплено в кристаллической решетке (эффект Мёссбауэра)?

646*. Покоящаяся частица a с массой m распадается по схеме $a \rightarrow a_1 + a_2 + a_3$ на три частицы с массами m_1, m_2, m_3 и кинетическими энергиями T_1, T_2, T_3 . Исследовать кинематику такого распада с помощью диаграммы Далица. Для этого ввести переменные $x = (T_2 - T_3)/\sqrt{3}$, $y = T_1$ и рассмотреть плоскость (x, y) . Каждому конкретному распаду отвечает определенная точка на этой плоскости.

а) Доказать, что закон сохранения энергии ограничивает на плоскости (x, y) область, имеющую форму равностороннего треугольника. Убедиться в том, что длины перпендикуляров, опущенных из точки, изображающей данный распад, на стороны треугольника, равны кинетическим энергиям образующихся частиц.

б) Убедиться в том, что двух введенных величин x и y достаточно для определения величин импульсов образующихся частиц и углов между импульсами в системе покоя распадающейся частицы.

в) Закон сохранения трехмерного импульса приводит к тому, что не все точки внутри треугольника отвечают истинным распадам. Найти на плоскости xy область, внутри которой распады кинематически возможны, для частного случая $m_2 = m_3 = 0$, $m_1 \neq 0$.

647. Построить диаграмму Далица (см. условие предыдущей задачи) для распадов μ - и K -мезонов:

$$\text{а) } \mu^\pm \rightarrow e^\pm + 2\nu, \quad \text{б) } K^\pm \rightarrow \pi^0 + e^\pm + \nu.$$

В последнем процессе электрон, как правило, рождается ультрарелятивистским, и его массой покоя можно пренебречь. Определить максимальные энергии частиц.

648. Построить диаграмму Далица (см. задачу 646*) для распада покоящегося K^+ -мезона по схеме

$$K^+ \rightarrow \pi^- + \pi^+ + \pi^+.$$

Энергия распада $Q = m_K - 3m_\pi \approx 75 \text{ Мэв} < m_\pi$ ($c = 1$), поэтому рождающиеся π -мезоны можно приближенно считать нерелятивистскими. Какова максимальная энергия каждой из частиц?

649. Построить диаграмму Далица (см. условие задачи 646*) для распада ω -мезона по схеме

$$\omega \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0.$$

Считать массы трех мезонов одинаковыми, энергия распада $Q = m_\omega - 3m_\pi \approx 360 \text{ Мэв} > m_\pi$, $m_\omega \approx 780 \text{ Мэв}$ ($c = 1$). Какова наибольшая энергия каждого из мезонов?

650*. В условии задачи 646* изложены правила построения диаграммы Далица для распада трех частиц. Вероятность dW распада имеет вид

$$dW = \rho d\Gamma.$$

Здесь ρ — величина, зависящая от сил взаимодействия, ответственных за распад, и от импульсов частиц, а $d\Gamma$ — элемент фазового объема Γ , определяемого интегралом

$$\Gamma = \int \frac{(d\mathbf{p}_1)}{\mathcal{E}_1} \frac{(d\mathbf{p}_2)}{\mathcal{E}_2} \frac{(d\mathbf{p}_3)}{\mathcal{E}_3} \delta(p_i - p_{1i} - p_{2i} - p_{3i}),$$

где p_i — 4-импульс распадающейся частицы ($p_i = (m, 0)$ при распаде из состояния покоя), $p_{\alpha i} = (\mathcal{E}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$ — 4-импульсы образующихся частиц, $(d\mathbf{p}_\alpha)$ — элемент объема импульсного пространства α -й частицы. Четырехмерная δ -функция выражает собой закон сохранения 4-импульса при распаде и показывает, что интегрирование производится только по тем значениям импульсов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$, которые совместимы с законами сохранения энергии и импульса.

Выразить $d\Gamma$ через dx, dy и показать, что фазовый объем Γ выражается в соответствующем масштабе площадью разрешенной области на диаграмме Далица. Доказательство произвести для общего случая $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq 0$.

651. Частица с массой m налетает на покоящуюся частицу с массой m_1 . Происходит реакция, в которой рождается ряд частиц с общей массой M . Если $m + m_1 < M$, то при малых кинетических энергиях налетающей частицы реакция не идет — она запрещена законом сохранения энергии. Найти минимальное значение кинетической энергии налетающей частицы (энергетический порог T_0 реакции), начиная с которого реакция становится энергетически возможной.

652. Найти энергетические пороги T_0 следующих реакций: а) рождение π -мезона при столкновении двух нуклонов ($N + N \rightarrow N + N + \pi$); б) фоторождение π -мезона на нуклоне ($N + \gamma \rightarrow N + \pi$); в) рождение K -мезона и Λ -гиперона при столкновении π -мезона с нуклоном ($\pi + N \rightarrow \Lambda + K$); г) рождение пары протон–антипротон при столкновении протона массы m_p с ядром массы m . Рассмотреть, в частности, столкновение с протоном. Оценить порог для рождения антипротона на ядре с массовым числом A , считая $m \approx m_p A$.

653. Найти приближенное выражение энергетического порога T_0 реакций, в которых изменение ΔM массы сталкивающихся частиц составляет малую часть их общей массы M («реакция между нерелятивистскими частицами»). Применить полученную формулу к нахождению энергетического порога T_0 реакций: а) фоторасщепление дейтерия (реакция $\gamma + \text{H}_1^2 \rightarrow p + n$); б) реакция $\text{He}_2^4 + \text{He}_2^4 \rightarrow \text{Li}_3^7 + p$. Сравнить полученные приближенные значения с точными (см. задачу 651).

654. Доказать, что рождение пары электрон–позитрон γ -квантом возможно только, если в реакции участвует частица с массой покоя $m_1 \neq 0$ (с этой частицей не происходит никаких изменений; ее роль состоит в том, что она принимает часть энергии и импульса, делая возможным выполнение законов сохранения). Найти порог T_0 реакции рождения пары.

655. Доказать, что законом сохранения энергии-импульса запрещена аннигиляция пары электрон–позитрон, сопровождаемая испусканием одного γ -кванта, но нет запрета на реакцию аннигиляции пары с испусканием двух фотонов.

656. Частица с энергией \mathcal{E} и массой m_1 налетает на покоящуюся частицу с массой m_2 . Найти скорость v центра инерции относительно лабораторной системы отсчета при таком столкновении.

657*. Частица с массой m_1 и энергией \mathcal{E}_0 испытывает упругое соударение с неподвижной частицей, масса которой m_2 . Выразить углы рассеяния ϑ_1, ϑ_2 частиц в лабораторной системе отсчета через их энергии $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ после столкновения.

658. Основываясь на решении предыдущей задачи, выразить энергию частиц, испытавших упругое рассеяние, через углы рассеяния в лабораторной системе отсчета.

659. Ультрарелятивистская частица с массой m и энергией \mathcal{E}_0 упруго рассеивается на неподвижном ядре с массой $M \gg m$. Определить зависимость конечной энергии \mathcal{E} частицы от угла ϑ ее рассеяния.

660. Решить предыдущую задачу для случая неупругого рассеяния частицы на ядре. Энергия возбуждения ядра ΔE в системе его покоя удовлетворяет неравенству $mc^2 \ll \Delta E \ll Mc^2$.

661. Частица с массой m испытывает упругое столкновение с неподвижной частицей такой же массы. Выразить кинетическую энергию T_1 рассеянной частицы через кинетическую энергию T_0 налетающей частицы и угол рассеяния ϑ_1 .

662. Используя результаты задачи 658, найти в нерелятивистском случае зависимость кинетических энергий T_1 и T_2 частиц, испытавших упругое соударение, от начальной кинетической энергии T_0 первой частицы и углов рассеяния ϑ_1 и ϑ_2 в лабораторной системе отсчета (вторая частица до столкновения покоилась).

663. Частицы с массами m_1 и m_2 испытывают упругое столкновение. Их скорости в системе ц. и. v'_1 и v'_2 угол рассеяния ϑ' , скорость системы ц. и. относительно лабораторной системы V . Определить угол χ разлета частиц в лабораторной системе. Рассмотреть, в частности, случай $m_1 = m_2$.

664. Квант света с частотой ω_0 рассеивается на равномерно движущемся свободном электроне. Вектор импульса электрона \mathbf{p}_0 составляет угол ϑ_0 с направлением движения кванта. Найти зависимость частоты ω рассеянного фотона от направления его движения. Рассмотреть, в частности, случай, когда электрон до столкновения покоился (эффект Комптона). Рассмотреть, в частности, случай, когда электрон до столкновения покоился.

665. Фотон с энергией $\hbar\omega_0$ рассеивается на ультрарелятивистском электроне с массой m и энергией $\mathcal{E}_0 \gg \hbar\omega_0$. Найти максимальную энергию $\hbar\omega$ рассеянного фотона.

666. Найти изменение энергии электрона при столкновении его с фотоном. Начальная энергия электрона \mathcal{E}_0 , фотона $\hbar\omega_0$, угол между их импульсами ϑ . Исследовать результат. При каких условиях электроны будут ускоряться под действием фотонных ударов?

667. Выразить инвариантные переменные s, t, u (XI.13) для случая упругого рассеяния одинаковых частиц через массу m , абсолютную величину импульса q и угол рассеяния ϑ в системе ц. и.

668. Пусть в лабораторной системе частица b покоится. Выразить энергию \mathcal{E}_a частицы a в лабораторной системе, а также энергии $\mathcal{E}'_a, \mathcal{E}'_b$ частиц в системе ц. и. через инвариантную переменную s (см. (XI.13)). Сделать то же самое для абсолютных величин трехмерных импульсов p_a, p'_a ($p'_a = p'_b = p'$). Использовать систему единиц, в которой скорость света $c = 1$.

669. Выразить энергии $\mathcal{E}_c, \mathcal{E}_d$ частиц, возникающих в результате двухчастичной реакции, через инвариантные переменные (XI.13). Энергии $\mathcal{E}_c, \mathcal{E}_d$ относятся к лабораторной системе отсчета.

670. Выразить угол θ между трехмерными импульсами p_a, p_c в лабораторной системе при двухчастичной реакции через инвариантные переменные s, t, u (XI.13). Выразить через эти же переменные угол θ' между импульсами p'_a, p'_c в системе ц. и.

671. Построить область допустимых значений переменных s и t (см. (I.13)) для реакции $\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$ (фоторождение π^0 -мезона на протоне). Какая точка этой области соответствует порогу реакции? Каково пороговое значение T_0 энергии γ -кванта в лабораторной системе отсчета? Какую кинетическую энергию T_π имеет в лабораторной системе π^0 -мезон при пороговой энергии γ -кванта?

672. Два γ -кванта превращаются в пару электрон–позитрон. Энергия одного из них задана и равна \mathcal{E}_0 . При каких значениях \mathcal{E}_2 энергии второго кванта и угла ϑ между их импульсами возможна эта реакция? Изобразить эти значения на плоскости переменных $\mathcal{E}_2, \cos \vartheta$. Найти также область допустимых значений переменных s, t (XI.13). Энергию записывать в единицах mc^2 , где m — масса электрона.

673. Построить на кинематической плоскости переменных s, t (XI.13) физические области, соответствующие следующим трем процессам:

- а) $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$ — упругое рассеяние,
- б) $\pi^- + \bar{p} \rightarrow \pi^- + \bar{p}$ — упругое рассеяние античастиц,
- в) $\pi^+ + \pi^- \rightarrow p + \bar{p}$ — рождение пары протон–антипротон.

Массы всех мезонов и всех нуклонов одинаковы (m и M соответственно).

674. Доказать, что излучение и поглощение света свободным электроном в вакууме невозможно. Исходить из закона сохранения энергии-импульса.

675. Доказать, что при равномерном движении заряженной свободной частицы в среде с показателем преломления $n(\omega)$ (масса частицы m , заряд e , скорость v) может происходить излучение электромагнитных волн (эффект Вавилова – Черенкова)¹. Выразить угол ϑ между направлением распространения волны и направлением скорости v частицы через v , ω , $n(\omega)$ (ср. с задачей 827*).

УКАЗАНИЕ. В покоящейся среде с показателем преломления $n(\omega)$ фотон обладает энергией $\mathcal{E} = \hbar\omega$ и импульсом $p = n(\omega)\frac{\hbar\omega}{c}$.

676. Доказать, что свободный электрон, движущийся в среде со скоростью v , может поглощать электромагнитные волны, частоты ω которых удовлетворяют неравенству $v > \frac{c}{n(\omega)}$, где $n(\omega)$ – показатель преломления среды.

677. Частица, имеющая, вообще говоря, сложную структуру и содержащая внутри себя электрические заряды (например, атом), движется равномерно со скоростью v в среде с показателем преломления $n(\omega)$ и находится в возбужденном состоянии. При переходе в нормальное состояние частица излучает квант с частотой ω_0 (в системе покоя). Этот квант наблюдается в лабораторной системе отсчета под углом ϑ к направлению движения частицы. Какая частота ω наблюдается в лабораторной системе (эффект Доплера в преломляющей среде)? Рассмотреть, в частности, случай $\omega \rightarrow 0$.

УКАЗАНИЕ. Члены второго порядка по \hbar не учитывать, считать, что $\hbar\omega_0 \ll \ll mc^2$, где m – масса частицы.

678. Частица, рассмотренная в задаче 677, движется равномерно через среду, находясь в своем нормальном состоянии (остальные условия задачи 677 сохраняются). Доказать, что при этом может происходить излучение, сопровождаемое возбуждением частицы. Выяснить, какие условия необходимы для возникновения такого излучения. Найти частоту ω этого излучения (сверхсветовой эффект Доплера).

679. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что черенковское излучение одного кванта частоты ω невозможно, если показатель преломления среды $n(\omega) \leq 1$ (см. задачу (676)). В частности, невозможно одноквантовое черенковское излучение достаточно жестких фотонов, так как при больших частотах $n(\omega) < 1$. Показать, что при равномерном движении быстрой заряженной частицы с энергией \mathcal{E}_0 через среду может

¹ Аналогичный эффект может иметь место также при прохождении через вещество нейтральной частицы, обладающей электрическим или магнитным моментом.

происходить излучение сразу двух фотонов, один из которых (с частотой ω_2) может быть жестким, так что для него $n(\omega_2) \rightarrow 1$. Выяснить, каким условиям должны удовлетворять частота ω_1 другого фотона и скорость v_0 частицы ($\hbar\omega_1 \ll cp_0$), чтобы был возможен такой процесс (жесткое излучение Вавилова – Черенкова). Какова наибольшая энергия жесткого кванта?

680. Рассмотреть кинематику жесткого излучения Вавилова – Черенкова (см. предыдущую задачу), считая электрон ультрарелятивистским, $\mathcal{E}_0 \gg mc^2$, а угол ϑ_2 вылета жесткого кванта малым. Определить максимальное значение $(\hbar\omega_2)_{\max}$ энергии жесткого кванта, которого можно достичь в этом случае; рассмотреть характерные частные случаи.

681. Кристаллическая решетка способна принимать импульс только дискретными порциями $\mathbf{q} = 2\pi\hbar\mathbf{g}$, где \mathbf{g} – вектор обратной решетки. В случае кристаллической решетки, элементарная ячейка которой имеет форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами a_1, a_2, a_3 , вектор $\mathbf{g} = \left(\frac{n_1}{a_1}, \frac{n_2}{a_2}, \frac{n_3}{a_3}\right)$, где n_1, n_2, n_3 – любые целые числа. Считая, что кристалл, имеющий очень большую массу, не может принимать от частицы энергию, выяснить, какой характер будет иметь угловое распределение частиц, рассеиваемых на монокристалле.

682. Учитывая связь $p_0 = 2\pi\hbar/\lambda_0$ между импульсом p_0 частицы и соответствующей длиной волны λ_0 , вывести условие Брэгга – Вульфа: $2a \sin \frac{\vartheta}{2} = n\lambda_0$, где a – расстояние между кристаллическими плоскостями, ϑ – угол рассеяния частицы.

683. Выяснить, какой характер будет иметь энергетический спектр тормозных квантов, возникающих при рассеянии заряженных частиц на монокристалле (ср. с задачей 681). Угол между направлением распространения тормозного кванта и первоначальным импульсом частицы фиксирован и мал, $\vartheta \ll 1$. Частица ультрарелятивистская, $\mathcal{E}_0 \gg mc^2$.

§ 2. Движение заряженных частиц в электромагнитном поле

В электромагнитном поле \mathbf{E}, \mathbf{H} на точечную частицу с зарядом e , движущуюся со скоростью \mathbf{v} , действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{H}. \quad (\text{XI.16})$$

За единицу времени кинетическая энергия частицы меняется на величину

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \dot{\mathcal{E}} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \quad (\text{XI.17})$$

где \mathcal{E} — энергия частицы (см. § 1).

Магнитное поле не совершает работы над частицей, так как магнитная сила перпендикулярна скорости. Из величин \mathbf{F} и $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ можно составить 4-вектор (вектор силы Минковского):

$$F_i = \left(\frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, i \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \quad (\text{XI.18})$$

4-сила выражается через тензор электромагнитного поля F_{ik} : $F_i = \frac{e}{c} F_{ik} u_k$, где u_k — 4-скорость частицы.

Дифференциальное уравнение движения частицы в четырехмерной записи имеет вид:

$$\frac{dp_i}{d\tau} = eF_i \quad \text{или} \quad m \frac{du_i}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{ik} u_k. \quad (\text{XI.19})$$

Проектируя эти уравнения на пространственную и временную оси, получим уравнения движения в трехмерной форме и закон сохранения энергии:

$$\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}, \quad \dot{T} = e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \quad (\text{XI.20})$$

Здесь $T = \mathcal{E} - mc^2$ — кинетическая энергия частицы, \mathbf{p} — ее импульс, точкой обозначено дифференцирование по времени t . Формулы (XI.20) применимы при произвольной скорости частицы.

Функция Лагранжа заряженной частицы в электромагнитном поле с потенциалами φ , \mathbf{A} имеет вид:
в релятивистском случае

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U; \quad (\text{XI.21})$$

в нерелятивистском случае

$$L = \frac{mv^2}{2} - U, \quad (\text{XI.22})$$

где

$$U = -\frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + e\varphi. \quad (\text{XI.23})$$

Величина U играет роль потенциальной энергии взаимодействия частицы с внешним полем. Уравнения движения частицы могут быть записаны в лагранжевой форме:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (\text{XI.24})$$

где q_i, \dot{q}_i — обобщенные координаты и скорости.

Ток, возникающий при вращательном (орбитальном) движении точечной заряженной частицы вокруг некоторого центра, характеризуется магнитным моментом¹

$$\mathbf{m} = \kappa \mathbf{l}, \quad (\text{XI.25})$$

где $\kappa = \frac{e}{2mc}$ — гиромангнитное отношение, m — масса частицы, $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ — момент импульса. Во внешнем магнитном поле \mathbf{H} на частицу действует вращательный момент $\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{H}$, под действием которого момент импульса \mathbf{l} изменяется со временем по закону $\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{N}$. Согласно (XI.25), зависимость магнитного момента \mathbf{m} от времени определяется уравнением:

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \kappa \mathbf{m} \times \mathbf{H}. \quad (\text{XI.26})$$

Кроме механического и магнитного моментов, связанных с орбитальным движением, микрочастицы обладают также собственным (спиновым) механическим \mathbf{s} и магнитным \mathbf{m}_0 моментами, направленными параллельно или антипараллельно:

$$\mathbf{m}_0 = \kappa_0 \mathbf{s}. \quad (\text{XI.27})$$

Для электрона $\kappa_0 = \frac{e}{mc} < 0$, где e — заряд электрона, m — его масса. Изменение со временем момента \mathbf{m}_0 описывается уравнением (XI.26), в котором κ заменяется на κ_0 и \mathbf{m} на \mathbf{m}_0 .

Нейтрон не имеет электрического заряда, но обладает, тем не менее, спиновым моментом \mathbf{m}_0 . Этот момент благодаря квантовым эффектам может ориентироваться во внешнем магнитном поле $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ только двумя способами: по полю или против него, причем первоначальная ориентация сохра-

¹Классическая теория, излагаемая ниже, применима к микрочастицам лишь с оговорками. Последовательная теория движения элементарных магнитных моментов должна быть квантовой.

няется, если выполнено определенное условие¹. В этом случае движение нейтронов с магнитным моментом, ориентированным по полю (или против него), можно рассматривать как движение классических частиц в силовом поле с потенциальной энергией

$$U = \mp m_0 H, \quad (\text{XI.28})$$

где

$$H = |\mathbf{H}(\mathbf{r})|.$$

Энергия U обычно очень мала, поэтому магнитное поле оказывает влияние практически лишь на движение очень медленных («холодных») нейтронов.

684. Написать релятивистское уравнение движения частицы под действием силы \mathbf{F} , выразив импульс явным образом через скорость \mathbf{v} частицы. Рассмотреть, в частности, случай, когда скорость а) меняется только по величине; б) меняется только по направлению; в) $v \ll c$.

685. Выразить друг через друга вектор силы, действующей на частицу в лабораторной системе (\mathbf{F}) и в системе покоя (\mathbf{F}'). Скорость частицы v .

686. Какая сила F действует с точки зрения наблюдателя в мгновенно сопутствующей системе на тело массы m , находящееся в ракете и неподвижное относительно нее, если ракета движется с релятивистской скоростью v по круговой орбите радиуса R ?

687. Два заряда e и e' движутся параллельно оси x с равными постоянными скоростями v . Используя результаты задачи 610, показать, что электромагнитная сила, действующая между зарядами, может быть получена из так называемого конвекционного потенциала² $\psi = (1 - \beta^2) \frac{e}{R}$, где

$$R = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (1 - \beta^2)[(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]},$$

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ — радиусы-векторы зарядов, по формуле $\mathbf{F} = -e' \text{grad } \psi$. Что происходит с этой силой при $v \rightarrow c$?

¹Условие адиабатичности, состоящее в том, что угол поворота поля за единицу времени в той системе, где нейтрон покоится, мал по сравнению с частотой прецессии $\omega_L = \frac{2m_0 H}{\hbar}$ магнитного момента m_0 в поле \mathbf{H} .

²Конвекционным потенциалом движущейся как целое системы зарядов называется функция координат, дифференцирование которой дает компоненты лоренцовой силы, действующей в лабораторной системе на единичный пробный заряд, движущийся вместе с этой системой зарядов.

688. Найти конвекционный потенциал ψ бесконечно длинного прямого равномерно заряженного провода. Линейная плотность заряда равна κ в той системе отсчета, где провод покоится. Провод перемещается поступательно со скоростью v под углом α к своей длине (в лабораторной системе отсчета). Рассмотреть, в частности, случаи $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

689. Бесконечно длинная равномерно заряженная прямая с линейной плотностью заряда κ в системе, где прямая покоится, перемещается вдоль своей длины равномерно со скоростью v . На расстоянии r от нее находится точечный заряд, движущийся параллельно прямой с той же скоростью. Найти электромагнитную силу F , действующую на заряд; скорость v произвольна.

690. Распределение электронов в параллельном пучке обладает аксиальной симметрией и характеризуется объемной плотностью заряда ρ в системе отсчета, связанной с электронами. Электроны ускорены разностью потенциалов V . Полный ток в пучке равен \mathcal{I} . Найти величину электромагнитной силы F , приложенной к одному из электронов пучка в лабораторной системе отсчета.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться результатом задачи 689.

691. Найти уширение Δa пучка электронов, рассмотренного в предыдущей задаче, на пути L вследствие взаимного отгалкивания электронов. Сечение пучка — круг радиуса a . Считать уширение малым ($\Delta a \ll L$).

692*. Частица с зарядом e и массой m движется с произвольной скоростью в однородном постоянном электрическом поле \mathbf{E} . В начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в начале координат и имела импульс \mathbf{p}_0 . Определить трехмерные координаты и время t частицы в лабораторной системе, в функции ее собственного времени τ . Исключив τ , представить трехмерные координаты частицы в зависимости от t .¹ Рассмотреть, в частности, нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы.

693. Найти траекторию заряженной частицы с зарядом e и массой m в однородном постоянном электрическом поле \mathbf{E} , используя результаты задачи 692*. Рассмотреть, в частности, нерелятивистский случай.

694. Найти пробег l релятивистской заряженной частицы с зарядом e , массой m и начальной энергией \mathcal{E} в тормозящем однородном электрическом поле E , параллельном начальной скорости частицы.

¹Задача может быть решена также непосредственно путем интегрирования уравнений движения частицы в трехмерной форме.

695*. Релятивистская частица с зарядом e и массой m движется в однородном постоянном магнитном поле \mathbf{H} . В начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в точке с радиусом-вектором \mathbf{r}_0 , обладая импульсом \mathbf{p}_0 . Определить закон движения частицы.

696*. Нерелятивистская частица с зарядом e и массой m движется в скрещенных постоянных однородных электрическом $\mathbf{E} = (0, E_y, E_z)$ и магнитном $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ полях. В начальный момент $t = 0$ частица находилась в начале координат и имела скорость $\mathbf{v} = (v_{0x}, 0, v_{0z})$. Определить зависимости $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, начертить возможные траектории частицы.

УКАЗАНИЕ. Для упрощения интегрирования ввести $u = x + iy$.

697. Релятивистская частица движется в параллельных однородных постоянных электрическом \mathbf{E} и магнитном \mathbf{H} полях ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{H} \parallel z$). При $t = 0$ частица находилась в начале координат, обладая импульсом $\mathbf{p}_0 = (p_{0x}, 0, p_{0z})$. Определить зависимость x , y , z , t от собственного времени частицы τ .

698. Определить закон движения частицы во взаимно перпендикулярных однородных постоянных электрическом \mathbf{E} и магнитном \mathbf{H} полях. Сделать это двумя способами: а) используя преобразование Лоренца и считая известным движение частицы в чисто электрическом или чисто магнитном поле (см. задачи 692* и 695*) и б) интегрируя уравнения (XI.19).

699. Найти кинетическую энергию T частицы в функции собственного времени τ для случаев движения, рассмотренных в задачах 692*, 697, 698.

700. Частица, начальная скорость v_0 которой мала ($v_0 \ll c$), движется в скрещенных постоянных однородных электрическом и магнитном полях $\mathbf{E} = (0, E_y, E_z)$, $\mathbf{H} = (0, 0, H)$, $E \ll H$. Определить закон движения частицы, используя преобразования Лоренца и считая известным движение частицы в параллельных электрическом и магнитном полях (см. задачу 697). При решении использовать результаты задачи 603. Ответ сравнить с задачей 696*.

701. Определить закон движения частицы с зарядом e и массой m в поле плоской электромагнитной волны

$$\mathbf{E}(t'), \quad \mathbf{H}(t'),$$

где $t' = t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c}$, \mathbf{n} — орт распространения волны. В начальный момент частица покоилась в начале координат.

УКАЗАНИЕ. Обратит внимание на то, что собственное время τ частицы совпадает с аргументом t' плоской волны.

702. Нерелятивистская заряженная частица с зарядом e и массой m проходит через двумерное электростатическое поле с потенциалом $\varphi = k(x^2 - y^2)$, где $k = \text{const} > 0$ (линза с сильной фокусировкой). В момент времени $t = 0$ частица находится в точке с координатами x_0, y_0, z_0 ; начальная скорость v_0 параллельна оси z . Определить движение частицы.

703. Найти дифференциальные уравнения движения релятивистской частицы в электромагнитном поле исходя из функции Лагранжа в цилиндрических координатах.

УКАЗАНИЕ. При вычислении производной по времени в уравнениях Лагранжа нужно учитывать, что эта производная берется вдоль траектории частиц, так что r, α, z должны рассматриваться как функции времени.

704*. Между обкладками цилиндрического конденсатора с радиусами a и b ($a < b$) поддерживается разность потенциалов V . В пространстве между обкладками имеется аксиально симметричное магнитное поле, напряженность которого параллельна оси конденсатора. Из внутренней обкладки, играющей роль катода, вылетают электроны с нулевой начальной скоростью. Найти критическое значение тока магнитного поля $\Phi_{\text{кр}}$ между обкладками, при котором электроны перестанут попадать на анод вследствие искривления их траекторий в магнитном поле.

705. Длинный прямой цилиндрический катод радиуса a , по которому течет равномерно распределенный ток \mathcal{I} , испускает электроны с нулевой начальной скоростью. Эти электроны движутся под действием ускоряющего потенциала V к длинному коаксиальному аноду радиуса b . Каково должно быть минимальное значение разности потенциалов $V_{\text{кр}}$ между катодом и анодом, чтобы электроны достигали анода, несмотря на заворачивающее действие магнитного поля тока \mathcal{I} ?

706. По бесконечно длинному прямому цилиндрическому проводу радиуса a течет ток \mathcal{I} . С поверхности провода срывается электрон начальной скоростью v_0 которого направлена вдоль провода. Найти наибольшее расстояние b , на которое электрон может удалиться от оси проводника.

707. Решить задачу 705, используя преобразование Лоренца к системе отсчета, в которой имеется только одно поле (\mathbf{E} или \mathbf{H}).

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться результатами задач 606 и 706.

708*. Релятивистская частица с зарядом $-e$ и массой m движется в поле неподвижного точечного заряда Ze . Найти уравнение траектории частицы. Исследовать возможные траектории в случае, когда момент импульса $K > \frac{Ze^2}{c}$.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться законом сохранения энергии и уравнениями, полученными в задаче 703.

709. Исследовать возможные траектории частицы, рассмотренной в предыдущей задаче, в том случае, когда $K \leq \frac{Ze^2}{c}$.

710*. Релятивистская частица с зарядом e и массой m движется в поле тяжелого одноименного точечного заряда Ze . Найти траекторию частицы и исследовать решение.

711. Показать, что при движении частицы в кулоновом поле притяжения (см. задачу 708*) скорость частицы стремится к c при $r \rightarrow 0$ ($Ze^2 \geq Kc$).

712. Найти траекторию относительного движения нерелятивистских частиц с зарядами e, e' , массами m_1, m_2 и энергией \mathcal{E} . Исследовать решение.

713*. Найти дифференциальное сечение рассеяния $\sigma(\theta)$ нерелятивистских частиц с зарядом e в поле неподвижного точечного заряда e' . Скорость частиц вдали от рассеивающего центра равна v_0 .

714. Определить угол θ отклонения релятивистской заряженной частицы с зарядом e , энергией $\mathcal{E} > mc^2$ и моментом импульса $K > \frac{|ee'|}{c}$, пролетающей в кулоновом поле тяжелого неподвижного заряда e' (см. задачи 708* и 710*).

715. Релятивистская частица с зарядом e , массой m и скоростью на бесконечности v_0 рассеивается на малый угол кулоновым полем неподвижного заряда e' . Определить дифференциальное сечение рассеяния $\sigma(\theta)$.

716. Электрон с зарядом e и массой m пролетает в вакууме над плоской незаряженной поверхностью диэлектрика с проницаемостью ϵ . Вначале электрон двигался параллельно поверхности диэлектрика со скоростью v и находился от нее на расстоянии a . На каком расстоянии x от проекции начального положения электрона на поверхность диэлектрика электрон врежется в диэлектрик?

717*. В бетатроне во время ускорения электрона магнитное поле непрерывно нарастает, порождая разгоняющую электрон э. д. с. индукции, а орбита его остается неизменной. Доказать, что для ускорения электрона на орбите постоянного радиуса необходимо, чтобы полный магнитный поток Φ , пронизывающий орбиту, был вдвое больше потока Φ_0 , который получился бы, если бы поле внутри орбиты было однородно и равно полю на орбите (бетатронное правило «2: 1»).

718*. Показать, что с точностью до членов $\frac{v^2}{c^2}$ энергия запаздывающего взаимодействия двух заряженных частиц имеет вид:

$$U(t) = \frac{e_1 e_2}{R} \left\{ 1 - \frac{1}{2c^2} [\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n})] \right\},^1$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор относительного положения частиц, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$, \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 — скорости частиц. Все величины в правой части равенства берутся в момент t .

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться разложениями потенциалов Лиенара–Вихерта, найденными ниже в задаче 757*, оставив в них только те члены, которые не зависят от ускорений и их производных. Произвести градиентное преобразование потенциалов таким образом, чтобы скалярный потенциал принял форму кулонова потенциала.

719. Найти приближенное выражение функции Лагранжа двух взаимодействующих частиц с зарядами e_1 , e_2 и массами m_1 , m_2 , учитывая эффект запаздывания с точностью до поправочных членов порядка $\frac{v^2}{c^2}$.

720. Частица с магнитным моментом \mathbf{m} и гиромагнитным отношением κ находится во внешнем однородном магнитном поле \mathbf{H} . Определить характер движения магнитного момента частицы.

721*. Частица с зарядом e и массой m , имеющая внутренние (спиновые) механический \mathbf{s} и магнитный

$$\mathbf{m} = \frac{e}{mc} \mathbf{s}$$

моменты, совершает нерелятивистское движение во внешнем электростатическом центрально-симметричном электростатическом поле $\varphi(r)$. Вычислить энергию взаимодействия U спина с внешним полем в первом неисчезающем приближении по v/c , приняв во внимание томасовскую прецессию мгновенно сопутствующей системы с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}_T = \frac{\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}}{2c^2}.$$

Происхождение прецессии Томаса поясняется в задаче 567.

¹Это выражение носит название формулы Брейта. Аналогичное выражение используется при приближенном квантовом описании запаздывающего взаимодействия.

УКАЗАНИЕ. Скорости изменения произвольного вектора \mathbf{A} в неподвижной и вращающейся системах координат связаны соотношением

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{\text{неподв}} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{\text{вращ}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A},$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость вращения (см. [64]).

722. Решить предыдущую задачу в предположении, что частица движется в потенциальном поле $V(r)$, но поле не электрическое. В связи с этим в сопутствующей системе отсчета магнитное поле отсутствует.

723. Нейтрон с магнитным моментом m_0 и кинетической энергией \mathcal{E}_0 влетает из пустоты в магнитное поле с напряженностью $H = \text{const}$, имеющее плоскую границу. При каком условии нейтрон отражается от поля?

724. Рассмотреть возможные траектории холодного нейтрона (масса m , магнитный момент m_0) в поле бесконечного прямого провода с током \mathcal{I} .

725. Поток холодных нейтронов (скорость v_0 , магнитный момент m_0 , масса m) рассеивается на магнитном поле бесконечного прямого провода с током \mathcal{I} .

Определить дифференциальную поперечную длину рассеяния

$$l(\alpha) = \left| \frac{ds}{d\alpha} \right|,$$

где $s(\alpha)$ — прицельное расстояние, при котором нейтрон рассеивается на угол α .

УКАЗАНИЕ. Использовать схему решения задачи 713*.

ЛИТЕРАТУРА

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. [64, 65], Фок В. А. [107], Френкель Я. И. [111], Гуревич Л. Э. [49], Бергман П. Г. [13], Паули В. [87], Беккер Р. [12], Спитцер Л. [98], Джексон Дж. [52], Челлен Г. [114], Окунь Л. Б. [83], Балдин А. М., Гольданский В. И., Розенталь И. Л. [8], Зоммерфельд А. [56], Ливингстон М. С. [73], Гринберг А. П. [45], Кельман В. М., Явор С. Я. [58], Моррисон Ф. [80], Скачков С. В. и др. [92], Тамм И. Е. [102], Франк И. М. [108], Гинзбург В. Л., Франк И. М. [37], Компанец А. С. [60], Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. [6], Голдстейн Г. [41].

ГЛАВА XII

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 1. Вектор Герца и разложение по мультиполям

Задача нахождения переменного электромагнитного поля в вакууме по заданному распределению зарядов $\rho(\mathbf{r}', t)$ и токов $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)$ может быть решена путем вычисления запаздывающих потенциалов:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV', \quad (\text{XII.1})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV', \quad (\text{XII.2})$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, \mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения поля, \mathbf{r}' — радиус-вектор источника поля, dV' — элемент объема источника поля. Эти потенциалы удовлетворяют уравнениям Даламбера:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad (\text{XII.3})$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \quad (\text{XII.4})$$

и связаны между собой условием Лоренца:

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \quad (\text{XII.5})$$

Количество неизвестных функций может быть уменьшено, если вместо потенциалов $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, t)$, связанных между собой уравнением (XII.5),

вести одну векторную функцию $\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t)$ (вектор Герца, и поляризационный потенциал), через которую \mathbf{A} и φ выражаются формулами:

$$\varphi = -\operatorname{div} \mathbf{Z}, \quad (\text{XII.6})$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}. \quad (\text{XII.7})$$

Распределение зарядов и токов при этом целесообразно описывать с помощью одной векторной функции $\mathbf{P}(\mathbf{r}', t)$, связанной с ρ и \mathbf{j} соотношениями:

$$\rho = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \quad (\text{XII.8})$$

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (\text{XII.9})$$

Такое определение величины \mathbf{P} обеспечивает выполнение уравнения непрерывности $\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Величина \mathbf{P} называется поляризацией (не следует смешивать эту величину с поляризацией диэлектрика).

Вектор Герца \mathbf{Z} удовлетворяет уравнению Даламбера:

$$\Delta \mathbf{Z} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = -4\pi \mathbf{P}. \quad (\text{XII.10})$$

Векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} выражаются через \mathbf{Z} формулами:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Z} - 4\pi \mathbf{P}, \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{Z}}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.11})$$

Чтобы найти электромагнитное поле по заданным ρ и \mathbf{j} , используя вектор Герца, нужно сначала определить с помощью формул (XII.8) и (XII.9) вектор поляризации \mathbf{P} . Вследствие аналогии между уравнениями (XII.3)–(XII.4) и (XII.10) вектор Герца выражается затем через \mathbf{P} так же, как запаздывающие потенциалы φ и \mathbf{A} через ρ и \mathbf{j} :

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{P}\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} dV'. \quad (\text{XII.12})$$

Если система зарядов и токов заключена в ограниченной области, размеры которой имеют порядок a , а порядок величины длин волн, существенных в спектральных разложениях потенциалов, составляет λ , то при

$$\frac{a}{\lambda} \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{a}{r} \ll 1 \quad (\text{XII.13})$$

можно произвести разложение подынтегральных функций по степеням $\frac{a}{\lambda}$ и $\frac{a}{r}$.

Если ограничиться первым членом такого разложения, то

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{p}(t')}{r}, \quad (\text{XII.14})$$

где $t' = t - \frac{r}{c}$ — ретардированное время центра системы.

Величина

$$\mathbf{p}(t') = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t') dV' \quad (\text{XII.15})$$

представляет собой электрический дипольный момент распределения зарядов (ср. с задачами 741, 742). Соответствующие выражения для \mathbf{A} и φ будут тогда следовать из (XII.6) и (XII.7).

Особый интерес представляет рассмотрение поля на таких больших расстояниях r от системы зарядов, что наряду с (XII.13) выполняется неравенство

$$r' \ll \lambda \ll r \quad (\text{XII.16})$$

(волновая зона). В этом случае для нахождения поля можно воспользоваться разложением векторного потенциала по степеням $\frac{A}{\lambda}$, которое с точностью до $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$ имеет вид:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{p}}(t')}{cr} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}(t')}{2c^2r} + \frac{\dot{\mathbf{m}}(t') \times \mathbf{n}}{cr}. \quad (\text{XII.17})$$

Здесь $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ — орт в направлении распространения электромагнитных волн,

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') dV' \quad (\text{XII.18})$$

— магнитный дипольный момент,

$$Q_\alpha = \sum_\beta Q_{\alpha\beta} n_\beta, \quad Q_{\alpha\beta} = \int \rho(\mathbf{r}', t') x'_\alpha x'_\beta dV' \quad (\text{XII.19})$$

— составляющие квадрупольного момента, точкой обозначается дифференцирование по t' .

Характерна зависимость векторного потенциала в волновой зоне от расстояния r до системы. Она обеспечивает (см. ниже) существование не исчезающего на бесконечности потока энергии в направлении от системы. Это значит, что таким векторным потенциалом описывается излучение электромагнитной энергии.

Второй (электрический квадрупольный) и третий (магнитный дипольный) члены в этом выражении меньше в $\frac{a}{\lambda}$ раз¹ первого (электрического дипольного) по порядку величины и могут быть отброшены, если только нет каких-либо особых причин, сильно уменьшающих первый член.

В волновой зоне поле в достаточно малых областях пространства имеет характер бегущей от источника плоской волны. Напряженности этого поля могут быть вычислены по формулам:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{H} \times \mathbf{n}. \quad (\text{XII.20})$$

Угловое распределение излучения характеризуется количеством энергии, протекающей в единицу времени через единицу телесного угла:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2. \quad (\text{XII.21})$$

Полная интенсивность I излучения получается интегрированием (XII.21) по всем направлениям.

При использовании разложения (XII.17), получаем

$$I = \frac{2}{3c^3} (\ddot{\mathbf{p}})^2 + \frac{1}{60c^5} \left[3 \sum_{\alpha\beta} \ddot{Q}_{\alpha\beta}^2 - \left(\sum_{\beta} \ddot{Q}_{\beta\beta} \right)^2 \right] + \frac{2}{3c^3} (\ddot{\mathbf{m}})^2. \quad (\text{XII.22})$$

В случае периодического движения зарядов обычно представляют основной интерес средние по времени за период величины \bar{I} и $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$.

726. Непосредственной подстановкой убедиться в том, что запаздывающие потенциалы удовлетворяют уравнению Даламбера и условию Лоренца.

727. Используя результаты задачи 32*, получить формулу (XII.22).

728. Записать уравнения, которым удовлетворяют электромагнитные потенциалы φ и \mathbf{A} , если вместо условия Лоренца (XII.5) наложить на них условие $\text{div } \mathbf{A} = 0$ (так называемая кулонова калибровка).

¹Если излучающей системой является частица, движущаяся в ограниченной области со скоростью v , то $\frac{a}{\lambda} \approx \frac{v}{c}$.

729. Показать, что в волновой зоне при выполнении условия Лоренца скалярный потенциал ограниченной излучающей системы может быть выражен через векторный потенциал формулой $\varphi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{A}$.

730. Используя результаты задачи 620* (формулы (2) и (3)), найти выражение для потери момента импульса в единицу времени $-\frac{dK}{dt}$ системой, излучающей как электрический диполь.

731. Найти уравнения силовых линий электрического и магнитного полей точечного электрического дипольного осциллятора с моментом $\mathbf{p} = p_0 \cos \omega t$. Проследить за качественным изменением картины поля в зоне, прилегающей к осциллятору, и в волновой зоне.

УКАЗАНИЕ. Если полярная ось направлена вдоль \mathbf{p}_0 , то электромагнитное поле осциллятора имеет вид:

$$E_r = \frac{2p_0 \cos \vartheta}{r^2} \left[\frac{\cos(kr - \omega t)}{r} + k \sin(kr - \omega t) \right],$$

$$E_\vartheta = \frac{p_0 \sin \vartheta}{r} \left[\left(\frac{1}{r^2} - k^2 \right) \cos(kr - \omega t) + \frac{k}{r} \sin(kr - \omega t) \right],$$

$$E_\alpha = H_r = H_\vartheta = 0;$$

$$H_\alpha = -\frac{p_0 k^2}{r} \sin \left[\cos(kr - \omega t) + \frac{p_0 k}{r^2} \sin(kr - \omega t) \right].$$

732. Найти электромагнитное поле \mathbf{H} , \mathbf{E} заряда e , движущегося равномерно по окружности радиуса a . Движение нерелятивистское, угловая скорость ω . Расстояние до точки наблюдения $r \gg a$. Найти средние по времени угловое распределение $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$ и полную интенсивность \bar{I} излучения, а также исследовать его поляризацию.

733. Исследовать влияние интерференции на излучение электромагнитных волн системой зарядов в следующем примере: два одинаковых электрических заряда e движутся равномерно с нерелятивистской скоростью и с частотой ω по круговой орбите радиуса a , оставаясь при этом на противоположных концах диаметра. Найти поляризацию, угловое распределение $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$ и интенсивность \bar{I} излучения. Как изменится интенсивность излучения, если убрать один из зарядов (ср. с результатом задачи 732).

734. Насколько расположение зарядов в предыдущей задаче должно отличаться от диаметрального, чтобы интенсивности электрического дипольного и квадрупольного излучений были равны?

735. Колебания двух электрических дипольных осцилляторов имеют одинаковую частоту ω , но сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Амплитуды дипольных моментов равны по величине p_0 и направлены под углом φ друг к другу. Расстояние между осцилляторами мало по сравнению с длиной волны. Найти поле \mathbf{H} в волновой зоне, угловое распределение $\frac{dI}{d\Omega}$ и полную интенсивность \bar{I} излучения.

736. Исследовать состояние поляризации поля излучения системы осцилляторов, рассмотренных в предыдущей задаче, используя методику, изложенную в решении задачи 399.

737*. Найти среднюю по времени плотность $\bar{\gamma}$ потока энергии на больших расстояниях от заряда, рассмотренного в задаче 732, учитывая члены порядка $\frac{1}{r^3}$. Найти вращательный момент \mathbf{N} , приложенный к полностью поглощающему сферическому экрану большого радиуса, около центра которого движется этот заряд.

738. Равномерно намагниченный шар радиуса a с намагниченностью \mathbf{M} вращается с постоянной частотой ω вокруг оси, проходящей через центр шара и составляющей угол φ с направлением \mathbf{M} . Найти электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} и исследовать характер поляризации. Определить угловое распределение $\frac{dI}{d\Omega}$ и полную интенсивность \bar{I} излучения.

739. Равномерно заряженная по объему капля пульсирует с неизменной плотностью. Поверхность капли при этом описывается уравнением

$$R(\vartheta) = R_0[1 + aP_2(\cos \vartheta) \cos \omega t],$$

где $a \ll 1$. Заряд капли q . Найти угловое распределение $\frac{dI}{d\Omega}$ и полную интенсивность \bar{I} излучения.

740. Электрический заряд q распределен сферически симметричным образом в ограниченной области и совершает радиальные пульсации. Найти электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} вне распределения зарядов.

741. Найти выражения электрических дипольного \mathbf{Z}_p и квадрупольного \mathbf{Z}_Q , а также магнитного дипольного \mathbf{Z}_m членов разложения вектора Герца, справедливые при произвольной зависимости токов и зарядов от времени, на расстояниях $r \gg a$, $\lambda \gg a$ (выполнение условия $r \gg \lambda$ не обязательно).

742. Найти в векторной форме выражения для напряженностей электромагнитных полей электрического \mathbf{p} и магнитного \mathbf{m} дипольных осцилляторов на расстояниях от них, больших по сравнению с их размерами.

УКАЗАНИЕ. При дифференцировании по r учитывать, что моменты \mathbf{p} и \mathbf{m} должны быть взяты в ретардированный момент $t' = t - \frac{r}{c}$ и, следовательно, зависят от r .

743. Найти угловое распределение $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$ и полную интенсивность \bar{I} излучения от открытого резонатора, рассмотренного: а) в задаче 532; б) в задаче 533.

УКАЗАНИЕ. Эти резонаторы можно рассматривать как совокупность электрического и магнитного диполей, колеблющихся с резонансной частотой ω_0 .

744. Моменты двух одинаковых электрических диполей направлены по одной прямой и осциллируют в противофазе с частотой ω (амплитуда p_0). Расстояние между центрами a , $\lambda \gg a$. Найти электромагнитное поле на расстояниях $r \gg a$. Найти угловое распределение излучения $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$ и его полную интенсивность \bar{I} .

745*. В линейной антенне длиной l возбуждена стоячая волна тока \mathcal{I} с амплитудой \mathcal{I}_0 , частотой ω и узлами на концах антенны. Число полуволн тока, укладывающихся на длине антенны, равно m . Найти угловое распределение излучения $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$.

746. Найти полное излучение \bar{I} и сопротивление излучения $R = \frac{2\bar{I}}{\mathcal{I}_0^2}$ антенны, рассмотренной в предыдущей задаче.

УКАЗАНИЕ. Результат выражается через интегральный косинус

$$\text{Ci}(x) = C + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt,$$

где $C = 0,577$ — постоянная Эйлера (см. справочник [90], 8.230).

747. В линейной антенне длиной l распространяется бегущая волна¹ тока $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 e^{i(k\xi - \omega t)}$, где $k = \frac{\omega}{c}$, ξ — координата точки на антенне. Найти угловое распределение $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$ и полную интенсивность \bar{I} излучения.

748*. В круглой проволочной петле радиуса a возбуждена стоячая волна тока вида $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \sin n\alpha' e^{-i\omega t}$. Найти электромагнитное поле \mathbf{H} , \mathbf{E} в волновой зоне.

749*. Центры двух электрических дипольных осцилляторов с частотой ω и одинаковой амплитудой $\mathbf{p}_0 \parallel x$ находятся на оси z , на равных расстояниях от начала координат и на расстоянии $a = \frac{\lambda}{4}$ друг от друга. Колебания в осцилляторах сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Найти угловое распределение излучения $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$.

750. Отражение системы B зарядов $\rho(\mathbf{r}, t)$ и токов $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ в плоскости $z = 0$ состоит в том, что а) каждая точка $\mathbf{r} = (x, y, z)$ переходит в положение $\mathbf{r}' = (x, y, -z)$; б) плотность заряда меняет знак: $\rho(\mathbf{r}, t) = -\rho'(\mathbf{r}', t)$, где ρ' — плотность заряда в отраженной системе B' . Выяснить, как при отражении преобразуются плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, электрические \mathbf{p} , \mathbf{Q} и магнитный \mathbf{m} моменты системы, а также электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} .

751. Доказать, что электромагнитное поле произвольной системы B зарядов вблизи идеально проводящей плоскости может быть получено как суперпозиция полей системы B и системы B' , отраженной в этой плоскости (см. предыдущую задачу). Рассмотреть, в частности, излучение электрического дипольного осциллятора с моментом $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 f(t)$ ($|\mathbf{p}_0| = 1$, $f(t)$ — произвольная функция), находящегося на расстоянии $b \ll \lambda$ от такой плоскости и образующего с ней угол $\varphi_0 = \text{const}$ (ограничиться электрическим дипольным приближением).

752. Электрический диполь с амплитудой момента \mathbf{p}_0 и частотой ω находится на расстоянии $\frac{a}{2}$ от идеально проводящей плоскости ($a \ll \lambda$, вектор \mathbf{p}_0 параллелен плоскости). Найти электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} на расстояниях $r \gg \lambda$ и угловое распределение излучения $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$.

¹ Нагрузки на концах антенны должны быть подобраны таким образом, чтобы отраженной волны не возникало.

753. а) Показать, что если функция $u(r, \vartheta, \alpha)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$, то потенциал Герца для монохроматического поля электрического типа ($H_r = 0$) с частотой $\omega = kc$ в свободном от источников поля пространстве может быть представлен в форме: $\mathbf{Z} = u\mathbf{r} + \text{grad } \chi$, $\chi = \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial r}(ru)$; б) найти выражения составляющих напряженности электромагнитного поля \mathbf{H} , \mathbf{E} по осям сферической системы координат через $u(r, \vartheta, \alpha)$ (функция u называется потенциалом Дебая).

УКАЗАНИЕ. Доказывая, что $\Delta \mathbf{Z} + k^2 \mathbf{Z} = 0$, обратить внимание на то, что существует соотношение $\Delta \chi + k^2 \chi + 2u = 0$.

754. Показать, что поле точечного электрического дипольного осциллятора с моментом $p_0 e^{-i\omega t}$, находящегося в точке \mathbf{r}_0 ($\mathbf{r}_0 \parallel \mathbf{p}_0$), может быть описано потенциалом Дебая (см. задачу 654) вида $u = \frac{p_0}{r_0} \cdot \frac{e^{ikR}}{R}$, где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$.

УКАЗАНИЕ. Вектор Герца $\mathbf{Z} = u\mathbf{r} + \text{grad } \chi$, соответствующий потенциалу u , отличается от выражения $\frac{p_0}{R} e^{ikR}$ (см. (XII.14)), но приводит к тем же выражениям \mathbf{E} и \mathbf{H} .

755. Точечный электрический дипольный осциллятор с моментом $p_0 e^{-i\omega t}$ находится на расстоянии b от центра идеально проводящего шара радиуса a . Момент направлен вдоль линии, соединяющей диполь с центром шара. Воспользовавшись потенциалом Дебая u (см. задачу 753), найти электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} . Найти угловое распределение излучения $\frac{dI}{d\Omega}$.

§ 2. Электромагнитное поле точечного заряда, движущегося произвольным образом

Точечный заряд e , движущийся со скоростью $\mathbf{v}(t')$ и находящийся в момент времени t' в точке $\mathbf{r}_0(t')$, возбуждает электромагнитное поле, потенциалы которого в точке \mathbf{r} в момент времени t определяются формулами Лиенара – Вихерта:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}/c} \Big|_{t'}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\mathbf{v}}{c(R - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}/c)} \Big|_{t'}, \quad (\text{XII.23})$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$.

Ретардированное время t' определяется уравнением

$$c(t - t') = |\mathbf{R}|. \quad (\text{XII.24})$$

Из потенциалов Лиенара – Вихерта можно получить напряженности поля:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e \frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c)}{(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3 R^2} + \frac{e \mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c) \times \dot{\mathbf{v}}]}{c^2 (1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3 R} \Big|_{t'}, \quad (\text{XII.25})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E} \Big|_{t'},$$

где

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Первый член \mathbf{E} и соответствующий ему член \mathbf{H} описывают поле, убывающее с расстоянием по закону $\frac{1}{R^2}$ (квазистационарное поле), которое движется вместе с зарядом, не отрываясь от него. Второй член в \mathbf{E} и соответствующий ему член в \mathbf{H} описывают поле, убывающее с расстоянием по закону $\frac{1}{R}$ (поле излучения); поток энергии этого поля не зависит от R . Это означает, что поле излучения отрывается от породившего его заряда. На большом расстоянии от заряда (в волновой зоне) квазистационарное поле пренебрежимо мало по сравнению с полем излучения. Как видно из (XII.25), условием возникновения поля излучения является наличие ускорения $\dot{\mathbf{v}} \neq 0$.

Интенсивность излучения в направлении $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$ выражается через напряженность электрического поля \mathbf{E} в волновой зоне:

$$\frac{dI_{\mathbf{n}}(t)}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} E^2(t) R^2 = \frac{e^2}{4\pi c^3} \left[\frac{2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^5} + \frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{c(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^4} - \frac{(1 - v^2/c^2)(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{c(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^6} \right]. \quad (\text{XII.26})$$

Если скорость v заряда мала по сравнению со скоростью света, то поле излучения может быть разложено по мультиполям, и для его вычисления можно воспользоваться формулами (XII.17)–(XII.22).

В результате излучения ускоренно движущаяся частица теряет свою энергию \mathcal{E} и импульс \mathbf{p} , передавая их электромагнитному полю. Потерю i -й составляющей 4-вектора энергии-импульса частицы $p_i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right)$ в единицу

собственного времени τ можно выразить через 4-скорость u_i и 4-ускорение ω_i частицы:

$$-\frac{dp_i}{d\tau} = \frac{2e^2}{3c^3} \omega_k^2 u_i. \quad (\text{XII.27})$$

Потеря энергии частицей в единицу времени в лабораторной системе отсчета $-\frac{d\mathcal{E}}{dt'}$ (скорость потери энергии) отличается от четвертой составляющей (XII.27) множителем $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, так как $dt' = \gamma d\tau$. Интенсив-

ность излучения, определяемая с помощью (XII.26), не совпадает, в свою очередь, со скоростью потери энергии (см. задачи 762*-768).

Поле $\mathbf{A}(\mathbf{R}_0, t)$ заряда, совершающего периодическое движение по замкнутой орбите $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t')$ с периодом $\frac{2\pi}{\omega_0}$, может быть разложено в ряд Фурье $\mathbf{A}(\mathbf{R}_0, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{A}_l e^{-i\omega_0 l t}$. Компонента Фурье \mathbf{A}_l , поля на больших расстояниях от орбиты выражается формулой:

$$\mathbf{A}_l = e^{\frac{eikR_0}{cR_0T}} \oint e^{i[l\omega_0 t' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0(t')] } \mathbf{v}(t') dt', \quad (\text{XII.28})$$

где

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad \mathbf{k} = \frac{l\omega_0}{c} \mathbf{n}.$$

Интеграл распространен по всей траектории заряда.

Заряженные частицы при столкновении движутся с ускорением и, вследствие этого, излучают электромагнитную энергию. Закон движения сталкивающихся частиц и, следовательно, излучаемая ими при столкновении энергия определяется видом взаимодействия и прицельным расстоянием s (если потенциальная энергия взаимодействия сталкивающихся частиц зависит только от расстояния между ними). Энергию, излучаемую во всех направлениях при рассеянии потока частиц, удобно характеризовать полным эффективным излучением

$$\kappa = 2\pi \int_0^{\infty} \Delta W(s) s ds, \quad (\text{XII.29})$$

где $\Delta W(s)$ — энергия, излучаемая при одиночном столкновении двух частиц, s — прицельное расстояние.

Распределение излучения по направлениям характеризуется дифференциальным эффективным излучением $d\kappa_n$, которое определяется выражением:

$$\frac{d\kappa_n}{d\Omega} = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{d[\Delta W_n(s)]}{d\Omega} s ds. \quad (\text{XII.30})$$

Здесь $\frac{d[\Delta W_n(s)]}{d\Omega}$ — энергия, излучаемая в направлении n в единицу телесного угла при одиночном столкновении с прицельным расстоянием s , усредненная по азимуту в плоскости, перпендикулярной потоку частиц. Аналогичной формулой определяется дифференциальное эффективное излучение на единичный интервал частот $\frac{d\kappa_\omega}{d\omega}$. Если главную роль при столкновении играет дипольное излучение, то (XII.30) принимает вид:

$$\frac{d\kappa_n}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3} [A + B P_2(\cos \vartheta)]. \quad (\text{XII.31})$$

где $P_2(\cos \vartheta) = \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2}$ — полином Лежандра (см. приложение 2), ϑ — полярный угол между направлением n излучения и направлением z потока падающих частиц,

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{2}{3} \int_0^{\infty} 2\pi s ds \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\mathbf{p}}^2 dt, \\ B &= \frac{1}{3} \int_0^{\infty} 2\pi s ds \int_{-\infty}^{+\infty} (\dot{\mathbf{p}}^2 - 3\dot{p}_z^2) dt. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.32})$$

Спектральное разложение излучения при столкновении, продолжительность которого τ , в области малых частот $\omega\tau \ll 1$ может быть найдено по формуле

$$\frac{d\Delta W_\omega}{d\omega} = \frac{2}{3\pi c^3} \left[\sum e(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)^2 \right], \quad (\text{XII.33})$$

где сумма берется по всем сталкивающимся частицам, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ — скорости частиц до и после столкновения ($v_1, v_2 \ll c$).

756*. Получить потенциалы Лиенара – Вихерта (см. (XII.23)) из общих формул для запаздывающих потенциалов.

УКАЗАНИЕ. Распределение заряда в точечной частице характеризуется объемной плотностью $\rho(\mathbf{r}', t) = e\delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t)]$, где $\mathbf{r}_0(t)$ — радиус-вектор частицы в момент времени t , e — ее заряд. При вычислении объемного интеграла по $dV' = dx' dy' dz'$ нужно перейти к новой переменной $\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}' - \mathbf{r}_0$.

757*. Произведя разложение по степеням R/c в общих формулах записывающих потенциалов ((XII.1), (XII.2)), найти разложение потенциалов Лиенара–Вихерта по степеням $1/c$.

758. Получить потенциалы поля равномерно движущегося точечного заряда из потенциалов Лиенара–Вихерта, выразив в последних ретардированное время t' через время t наблюдения поля (ср. с задачами 610 и 811*).

759. Найти напряженности поля равномерно движущегося точечного заряда, воспользовавшись для этого общими формулами (XII.25). Выразить поле через время t его наблюдения, исключив ретардированное время t' (ср. с задачей 610).

760. Заряд e движется с малой скоростью v и ускорением \dot{v} ограниченной области. Найти приближенные выражения электромагнитного поля \mathbf{E}, \mathbf{H} частицы в точках, расстояние r до которых частицы велико по сравнению с размерами области движения заряда. Определить положение границы квазистационарной и волновой зон.

761. Определить угловое распределение $\frac{dI}{d\Omega}$ излучения заряда, рассмотренного в предыдущей задаче. Найти полное излучение I .

762*. Частица теряет в единицу времени за счет излучения в некотором направлении энергию $\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dt' d\Omega}\right)$ (скорость потерь энергии на единицу телесного угла в данном направлении). Выразить эту величину через интенсивность излучения $\frac{dI}{d\Omega}$ в данном направлении определяемую вектором Пойнтинга. Решить задачу двумя способами: а) аналитическим — рассмотреть связь ретардированного времени t' с временем наблюдения t ; б) геометрическим — рассмотреть форму области пространства, в которой локализована электромагнитная энергия, излученная частицей за время dt' .

763. Доказать, что если частица совершает периодическое движение, то средняя за период скорость потерь энергии совпадает со средней интенсивностью излучения.

764. Доказать формулу (XII.26).

765. Найти суммарную по всем направлениям скорость потерь энергии $\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dt'}\right)$ излучающей заряженной частицей, выразив ее а) через скорость $v(t')$ и ускорение $\dot{v}(t')$, б) через скорость $v(t')$ и напряженности \mathbf{E} , \mathbf{H} внешнего электромагнитного поля, вызывающего ускоренное движение частицы. Масса частицы m , заряд e .

766. Выразить скорость потери импульса $\left(-\frac{d\mathbf{p}}{dt'}\right)$ излучающей заряженной частицей через суммарную по всем направлениям скорость потери энергии.

767. Излучающую частицу наблюдают из двух систем отсчета, движущихся равномерно друг относительно друга. Сравнить суммарные по всем направлениям скорости потери энергии частицей в этих системах отсчета.

768. Скорость v релятивистской частицы в некоторый момент ретардированного времени t' параллельна ее ускорению \dot{v} . Найти мгновенное угловое распределение интенсивности излучения $\frac{dI}{d\Omega}$, полную мгновенную интенсивность излучения I , а также суммарную по всем направлениям скорость потери энергии $\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dt'}\right)$. Какой характер имеет угловое распределение интенсивности излучения в ультрарелятивистском случае?

769. Скорость частицы убывает от v_0 до 0 в течение промежутка времени τ . Найти угловое распределение тормозного излучения, испущенного за все время движения частицы, считая ускорение постоянным. Какая длительность Δt импульса будет зарегистрирована покоящимся прибором?

770. Релятивистская частица с зарядом e , массой m и импульсом p движется по круговой орбите в постоянном однородном магнитном поле \mathbf{H} . Радиус орбиты $a = \frac{cp}{eH}$. Найти суммарную по всем направлениям скорость потери энергии частицей $\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dt'}\right)$.

771. Ультрарелятивистский электрон движется в однородном магнитном поле с напряженностью \mathbf{H} по винтовой линии. Его скорость v составляет угол θ с вектором \mathbf{H} . Найти энергию $-\frac{d\mathcal{E}}{dt'}$, теряемую электроном в единицу времени. Найти также поток энергии излучения I через неподвижную сферу большого радиуса, окружающую электрон.

772. Найти мгновенное угловое распределение интенсивности излучения $\frac{dI}{d\Omega}$ релятивистской частицы, скорость которой в ретардированный

момент времени перпендикулярна ее ускорению. Начертить полярную диаграмму для случаев $v \ll c$ и $v \sim c$. Определить направления, в которые не происходит излучения.

773*. Частица с зарядом e и массой m движется со скоростью v по окружности в постоянном однородном магнитном поле \mathbf{H} . Найти угловое распределение $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$ интенсивности излучения, усредненное по периоду обращения частицы в магнитном поле. Какой характер принимает это угловое распределение в ультррелятивистском случае $v \sim c$?

УКАЗАНИЕ. Использовать результаты предыдущей задачи. Перейти к сферическим координатам с полюсом в центре круговой траектории и полярной осью вдоль \mathbf{H} . При вычислении интеграла по азимутальному углу воспользоваться формулами 3.428 из справочника [90].

774*. Найти компоненты Фурье поля излучения $\mathbf{A}_n, \mathbf{H}_n$ заряда e , движущегося по круговой орбите радиуса a с релятивистской скоростью v . Исследовать характер поляризации компонент Фурье.

УКАЗАНИЕ. Использовать формулы (П3.11) и (П3.9).

775. Объяснить наличие высших гармоник в спектре поля заряда, движущегося с постоянной скоростью по круговой орбите (см. предыдущую задачу). Как будут меняться интенсивности этих гармоник, когда $\beta = \frac{v}{c} \rightarrow 0$? Какой вид будет иметь поле излучения в этом случае?

776*. Заряд e движется по окружности радиуса a со скоростью $v = \beta c$. Найти спектральное разложение интенсивности излучения $\frac{dI_n}{d\Omega}$ в данном направлении.

777*. На круговой орбите одновременно находится N электронов (см. задачу 774*). Рассмотреть влияние интерференции полей, создаваемых этими электронами, на интенсивность излучения n -й гармоники Фурье. Рассмотреть частные случаи: а) совершенно беспорядочного расположения электронов; б) правильного расположения электронов на угловом расстоянии $\frac{2\pi}{N}$ друг от друга; в) расположения электронов в виде сгустка, размеры которого малы по сравнению с радиусом орбиты (результат в этом случае существенно зависит от отношения длины волны к размерам сгустка).

778*. Две частицы с зарядами e_1, e_2 и массами m_1, m_2 ($\frac{e_1}{m_1} \neq \frac{e_2}{m_2}$) совершают эллиптическое движение (см. задачу 712). Найти полную, усредненную по времени, интенсивность излучения \bar{I} .

779. Найти среднюю за период потерю момента импульса $\overline{\frac{dK}{dt}}$ системой двух частиц, совершающих эллиптическое движение (см. предыдущую задачу).

УКАЗАНИЕ. Общая формула для потери момента импульса была получена в задаче 730.

780*. Найти дифференциальное эффективное излучение $\frac{d\mathcal{K}_n}{d\Omega}$ при рассеянии потока частиц с зарядами e_1 , массами m_1 и скоростью v_0 на одноименно заряженной частице с зарядом e_2 и массой m_2 .

УКАЗАНИЕ. При вычислении интегралов A и B , входящих в формулу (XII.31), перейти от интегрирования по dt к интегрированию по dr , $dt = \frac{dr}{\dot{r}}$, где $\dot{r} = \sqrt{1 - \frac{2a}{r} - \frac{s^2}{r^2}}$, s — прицельное расстояние, $2a$ — минимальное расстояние, на которое могут сближаться частицы (оно достигается при $s = 0$). Интегрировать сначала по ds , затем по dr . При вычислении B необходимо использовать уравнение траектории относительного движения, которое можно найти в ответе к задаче 712.

781*. Частица с зарядом e_1 и массой m сталкивается с другой частицей, масса которой много больше m , а заряд e_2 ; прицельное расстояние s . Кинетическая энергия налетающей частицы велика по сравнению с потенциальной энергией взаимодействия частиц $\frac{e_1 e_2}{r}$. Вследствие этого скорость v налетающей частицы может считаться постоянной в течение всего столкновения; она не обязательно мала по сравнению со скоростью света. Найти угловое распределение полного излучения $\frac{d\Delta W_n}{d\Omega}$. Рассмотреть, в частности, случай $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться общей формулой для углового распределения полного излучения (XII.26). Ускорение частицы \dot{v} выразить через действующую на нее кулонову силу и скорость v частицы с помощью формул $v = \frac{c^2 \mathbf{p}}{\mathcal{E}}$ и $\dot{\mathbf{p}} = e_1 e_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}$.

782. Определить полное излучение энергии ΔW и импульса $\Delta \mathbf{p}$ частицей, рассмотренной в предыдущей задаче, за все время ее движения. Сделать это как непосредственно — путем интегрирования углового, распределения, найденного в предыдущей задаче, так и с помощью формул, полученных в задачах 765, 766.

783*. Частица с зарядом e_1 и массой m сталкивается с тяжелой частицей, заряд которой e_2 . Прицельное расстояние s велико, так что мистическая энергия частицы в течение всего времени движения велика сравнению с ее потенциальной энергией. Скорость частицы $v \ll c$. Найти спектр тормозного излучения частицы $\frac{d\Delta W_\omega}{d\omega}$.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться формулой (П3.15).

784. Поток частиц с зарядом e и скоростью $v \ll c$ рассеивается на абсолютно твердой сфере радиуса a . Найти эффективное излучение $d\kappa_\omega$ в интервале частот $d\omega$. Чему равно полное эффективное излучение κ ?

785*. Поток частиц с зарядами e_1 и массами m_1 рассеивается на частице с зарядом e_2 и массой m_2 $\left(\frac{e_1}{m_1} = \frac{e_2}{m_2}\right)$. Выразить дифференциальное эффективное излучение $\frac{d\kappa_n}{d\Omega}$ через компоненты $Q_{\alpha\beta}$ квадрупольного момента системы. Результат представить в форме, аналогичной (XII.31), (XII.32).

786*. Найти полное эффективное излучение κ при рассеянии потока заряженных частиц (заряд e , масса m , скорость v_0) одинаковой с ними частицей.

§ 3. Взаимодействие заряженных частиц с излучением

Излучающая система частиц, передавая энергию и импульс полю излучения, испытывает со стороны этого поля обратное воздействие (реакция излучения). Если излучение имеет электрический дипольный характер, то на каждую частицу с зарядом e действует сила лучистого торможения (лучистого трения):

$$\mathbf{f} = \frac{2e}{3c^3} \ddot{\mathbf{p}}, \quad (\text{XII.34})$$

где \mathbf{p} — электрический дипольный момент всей системы.

В частном случае одного заряда, скорость которого $v \ll c$,

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}. \quad (\text{XII.35})$$

В ультррелятивистском случае $v \approx c$ сила лучистого трения может быть представлена в виде

$$f_x = -\frac{2e^4}{3(mc^2)^4} [(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2] \mathcal{E}^2; \quad (\text{XII.36})$$

ось x выбрана вдоль направления скорости частицы, \mathbf{E} , \mathbf{H} — компоненты внешнего поля, в котором движется излучающая частица $\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ — энергия частицы.

Сила лучистого трения, определяемая формулами (XII.34)–(XII.36), не вполне корректным образом учитывает реакцию излучения. Понятием силы лучистого трения можно пользоваться только тогда, когда эта сила мала по сравнению с другими силами, действующими на частицу в ее системе покоя. Это условие выполняется при движении частицы с зарядом e и массой m в заданном электромагнитном поле \mathbf{E} , \mathbf{H} , если

$$\lambda \gg r_0, \quad (\text{XII.37})$$

$$H \ll \frac{m^2 c^4}{e^3} = \frac{e}{r_0^2}, \quad (\text{XII.38})$$

где λ — длина волны, излучаемая частицей, $r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2,8 \cdot 10^{-13}$ см — классический радиус электрона. Условия (XII.37) и (XII.38) означают, что классическая электродинамика становится внутренне противоречивой на очень малых расстояниях (больших частотах) и в слишком сильных полях¹.

Электромагнитная волна, падающая на систему зарядов, вызывает ускоренное их движение. Вследствие этого, система становится источником вторичных волн — рассеивает падающую волну. Процесс рассеяния характеризуется дифференциальным и полным сечениями рассеяния, определение которых дано в § 2 гл. VIII.

Электромагнитное поле движущейся заряженной частицы обладает энергией, импульсом и, следовательно, массой (электромагнитная масса частицы). Вопрос об электромагнитной массе элементарных частиц не может быть решен на основе классической электродинамики. Однако классическая теория хорошо поясняет саму идею электромагнитной массы. Задачи 787*–790* иллюстрируют основные положения этой теории, а также возникающие в ней трудности.

787*. Найти импульс электромагнитного поля частицы с зарядом e , движущейся равномерно со скоростью v . Частицу рассматривать в ее системе покоя S' как твердый шарик с радиусом r_0 (в системе, где скорость

¹Следует отметить, что благодаря квантовым эффектам классическая электродинамика становится неприменимой раньше, чем обнаруживается ее внутренняя противоречивость. Это происходит на расстояниях порядка $\lambda_0 = \frac{\hbar}{mc} = 137r_0$ и в полях $H \sim \frac{e}{\lambda_0 r_0} = \frac{m^2 c^4}{137e^3}$.

частицы равна v , имеет место лоренцово сокращение). Ввести электромагнитную массу m_0 покоя частицы, связанную соотношением Эйнштейна с энергией ее поля в состоянии покоя. Какие при этом возникают трудности?

788. Найти энергию W_m магнитного поля, а также полную электромагнитную энергию W частицы, рассмотренной в предыдущей задаче.

789*. Найти силу F , с которой заряженная сферически симметричная частица действует сама на себя (сила самодействия) при ускоренном поступательном движении с малой скоростью $v \ll c$. Запаздывание и лоренцово сокращение не учитывать.

УКАЗАНИЕ. Вычислить равнодействующую сил, приложенных к малым элементам de заряда частицы, воспользовавшись выражением для напряженности поля точечного заряда (XII.25).

790*. Найти уточненное выражение для силы F самодействия заряженной сферически симметричной частицы (см. предыдущую задачу). При решении учитывать эффект конечной скорости распространения взаимодействия с точностью до первого порядка по времени $t' - t$ распространения взаимодействия между элементами частицы. Рассмотреть, в частности, предельный случай точечной частицы. Оценить вклад отбрасываемых членов более высокого порядка по $t' - t$ в этом предельном случае.

791. Какое время T прожил бы Резерфордский атом водорода, если бы электрон в атоме двигался и излучал как классическая частица? Считать, что электрон, теряя энергию, движется к протону по пологой спирали, так что в каждый момент времени он излучает как заряд на круговой орбите (радиус орбиты медленно меняется со временем). При каком условии справедливо это предположение? Начальный радиус атома $a = 0,5 \cdot 10^{-8}$ см.

792. Релятивистская частица с зарядом e и массой m движется по круговой орбите в постоянном однородном магнитном поле H , теряя энергию на излучение. Найти закон изменения энергии и радиуса орбиты со временем $\mathcal{E}(t)$ и $r(t)$. В начальный момент времени $t = 0$ энергия частицы равна \mathcal{E}_0 (ср. с задачей 791).

793. Электрон в бетатроне разгоняется на орбите постоянного радиуса a вихревым электрическим полем. Последнее индуцируется временным магнитным полем частоты ω . Найти критическое значение энергии электрона $\mathcal{E}_{кр}$, при котором потери на излучение равняются с энергией, приобретаемой электроном за счет работы вихревого электрического поля.

794*. Частица с зарядом e и массой m притягивается к некоторому центру квазиупругой силой $-m\omega_0^2 r$. В некоторый момент времени $t = 0$

в этом гармоническом осцилляторе возникают свободные колебания. Учитывая реакцию излучения, но считая ее малой, найти закон затухания этих колебаний. Определить форму спектра такого осциллятора и ширину спектральной линии («естественная ширина»). Как связаны между собой неопределенность энергии $\hbar\omega$ излучаемых фотонов и время жизни осциллятора?

795. Газ состоит из атомов с массой m . Неподвижный атом этого газа излучает свет с частотой ω_0 (естественной шириной линии испускания пренебрегаем). Из-за теплового движения атомов и эффекта Доплера наблюдатель, неподвижный относительно сосуда с газом, регистрирует частоту, отличающуюся от ω_0 . Найти форму $\frac{dI_\omega}{d\omega}$ спектра излучения газа, нагретого до температуры T .

УКАЗАНИЕ. Скорости атомов газа распределены по закону Максвелла

$$\frac{dN}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z,$$

где $\frac{dN}{N}$ — доля молекул, скорость v которых заключена в промежутке $dv_x dv_y dv_z$, $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град — постоянная Больцмана. Так как выполняется условие $v \ll c$, можно в формуле, выражающей доплеровское изменение частоты (см. задачу 574), отбросить все члены, порядок которых выше $\frac{v}{c}$.

796. Излучающий атом, описываемый моделью гармонического осциллятора, движется в газе; при этом атом испытывает столкновения с другими атомами, скачком меняющие характер его колебаний. Вероятность того, что время свободного движения атома имеет продолжительность от τ до $\tau + d\tau$ выражается формулой $dW(\tau) = \frac{\Gamma}{2} e^{-\frac{\Gamma\tau}{2}} d\tau$ (среднее значение промежутка времени между столкновениями $\bar{\tau} = \frac{2}{\Gamma}$). Найти, пренебрегая естественной шириной линии, форму спектра излучения такого осциллятора $\frac{dI_\omega}{d\omega}$.

797*. На трехмерный изотропный осциллятор падает группа волн, характеризующая спектральным распределением интенсивности S_ω и полной интенсивностью $S = \int_0^\infty S_\omega d\omega$ (S — количество энергии, протекающее через 1 см^2 за все время прохождения группы). Ширина спектрального распределения группы велика по сравнению с естественной шириной спектральной

линии осциллятора γ . Скорость электрона $v \ll c$. Найти энергию, поглощенную осциллятором из световой волны, учитывая торможение излучением. Как сказывается на результате характер поляризации и направление распространения волн, входящих в группу?

798. Найти полное количество энергии ΔW , поглощенной одномерным осциллятором с собственной частотой ω_0 из группы волн со спектральным распределением S_ω , в следующих трех случаях: а) линейно поляризованная плоская группа волн, у которой направление колебаний вектора \mathbf{E} составляет угол ϑ с осью осциллятора; б) неполяризованная плоская группа волн, распространяющаяся под углом θ к оси осциллятора; в) изотропное поле излучения (на осциллятор с равной вероятностью падают плоские волны с любым направлением поляризации и любым направлением распространения).

799*. Линейно поляризованная волна падает на изотропный гармонический осциллятор. Скорость электрона $v \ll c$. Найти дифференциальное $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ и полное σ сечения рассеяния волны с учетом силы лучистого трения. Рассмотреть, в частности, случаи сильно связанного и слабо связанного электрона.

800. Плоская электромагнитная волна, поляризованная по кругу, рассеивается свободным зарядом. Определить рассеянное поле \mathbf{H} , исследовать характер его поляризации. Найти дифференциальное $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ и полное σ сечения рассеяния.

801. Неполяризованная плоская волна рассеивается свободным зарядом. Найти степень ρ деполяризации рассеянной волны в зависимости от угла ϑ рассеяния.

802*. Линейно поляризованная волна рассеивается свободным зарядом. Заряд движется с релятивистской скоростью v в направлении распространения волны. Найти дифференциальное сечение рассеяния. Рассмотреть также случай рассеяния неполяризованной волны.

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться формулой (XII.26) и выразить \dot{v} через \mathbf{E} , \mathbf{H} .

803*. Изотропный гармонический осциллятор с частотой ω_0 , зарядом e и массой m помещен в слабое однородное постоянное магнитное поле \mathbf{H} . Определить движение осциллятора. Исследовать характер поляризации излучения осциллятора¹.

¹Такой гармонический осциллятор представляет собой модель атома во внешнем магнитном поле. В задаче, таким образом, предлагается развить классическую теорию эффекта Зеемана.

§ 4. Разложение электромагнитного поля на плоские волны

Электромагнитное поле есть функция независимых переменных \mathbf{r} , t . При рассмотрении многих вопросов удобно пользоваться разложениями Фурье для поля. Встречаются разложения следующих типов:

1. Разложение на монохроматические волны:

$$f(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (\text{XII.39})$$

$$f_{\omega}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} dt. \quad (\text{XII.39}')$$

2. Разложение на плоские волны:

$$f(\mathbf{r}, t) = \int f_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (d\mathbf{k}), \quad (\text{XII.40})$$

$$f_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (d\mathbf{r}). \quad (\text{XII.40}')$$

Здесь f — какая-либо из компонент поля, $(d\mathbf{k}) = dk_x dk_y dk_z$.

3. Разложение на плоские монохроматические волны:

$$f(\mathbf{r}, t) = \int f_{\mathbf{k}\omega} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} (d\mathbf{k}) d\omega, \quad (\text{XII.41})$$

$$f_{\mathbf{k}\omega} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int f(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} (d\mathbf{r}) dt. \quad (\text{XII.41}')$$

Из уравнений Максвелла следует, что частота ω является функцией волнового вектора \mathbf{k} . Уравнение, выражающее зависимость $\omega = \omega(\mathbf{k})$, называется дисперсионным уравнением. Вещественность компонент поля $f(\mathbf{r}, t)$ приводит к соотношениям:

$$f_{\omega} = f_{-\omega}^*, \quad f_{\mathbf{k}} = f_{-\mathbf{k}}^*, \quad f_{\mathbf{k}\omega} = f_{-\mathbf{k}, -\omega}^*. \quad (\text{XII.42})$$

Формулами (XII.40), (XII.41) описывается поле во всем бесконечном пространстве. Соответственно этому, интегралы в этих формулах распространяются на все пространство волновых векторов и на все координатное

пространство. Другая употребительная форма разложения на плоские волны, при которой рассматривается поле в ограниченном объеме V , излагается во многих руководствах, например, в [65], стр. 167 или в [29], гл. 1.

При использовании разложений Фурье весьма полезны бывают соотношения (П 1.15) и (П 1.14) из теории δ -функции. В частности, с помощью соотношения (П 1.15) и формул (XII.42) могут быть доказаны формулы:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt &= 4\pi \int_0^{\infty} |f_{\omega}|^2 d\omega, \\ \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\mathbf{r}, t) (d\mathbf{r}) &= (2\pi)^3 \iiint |f_{\mathbf{k}}|^2 (d\mathbf{k}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII.43})$$

Разложение на плоские монохроматические волны играет большую роль в квантовой электродинамике. Каждой такой волне в квантовой теории сопоставляются фотоны — частицы, движущиеся со скоростью света c . Энергия \mathcal{E} и импульс \mathbf{p} фотонов связаны с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} соотношениями:

$$\mathcal{E} = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \quad (\text{XII.44})$$

804. Доказать формулы (XII.43).

805. Найти связь между компонентами Фурье полей \mathbf{E} , \mathbf{H} и потенциалов \mathbf{A} , φ (рассмотреть все три варианта разложений Фурье).

806. Записать уравнения Максвелла относительно компонент Фурье для трех вариантов разложения Фурье. Пространство заполнено однородной изотропной диспергирующей средой с параметрами $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\varepsilon)$, вообще говоря, зависящими от частоты.

807. Записать уравнения Даламбера и условие Лоренца относительно компонент Фурье для потенциалов $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, t)$. Рассмотреть все три варианта разложений Фурье. Пространство заполнено однородной изотропной средой с параметрами $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$.

808*. Разложить по плоским волнам потенциал φ кулонова поля неподвижного точечного заряда.

809. Разложить по плоским волнам напряженность электрического поля \mathbf{E} неподвижного точечного заряда e .

810. Точечный заряд движется в вакууме со скоростью $\mathbf{v} = \text{const.}$ Разложить поле φ , \mathbf{A} , \mathbf{E} , \mathbf{H} заряда на плоские монохроматические волны.

811*. Найти потенциалы $\varphi(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ поля равномерно движущегося точечного заряда e (см. ответ к задаче 610), используя разложения этих потенциалов по плоским волнам, полученные в предыдущей задаче.

УКАЗАНИЕ. Для вычисления интеграла по $(d\mathbf{k})$ сделать замену переменных $k_x \rightarrow \frac{k_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, $k_y \rightarrow k_y$, $k_z \rightarrow k_z$ (ось $x \parallel v$) и воспользоваться разложением поля неподвижного точечного заряда на плоские волны (см. задачу 808*).

812*. Нейтральная точечная система зарядов движется в вакууме равномерно со скоростью v . Найти электромагнитное поле $\varphi(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, воспользовавшись разложением Фурье по плоским монохроматическим волнам, если электрический \mathbf{p} и магнитный \mathbf{m} дипольные моменты в лабораторной системе отсчета заданы.

УКАЗАНИЕ. Плотности электрического заряда и тока системы выражаются формулами:

$$\mathbf{j} = c \operatorname{rot}[\mathbf{m}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)] + \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{p}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)],$$

$$\rho = -\operatorname{div}[\mathbf{p}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)].$$

813. Получить потенциалы поля равномерно движущегося магнитного диполя (момент \mathbf{m}_0 в системе покоя диполя). Скорость диполя v . Ограничиться двумя частными случаями: а) когда $\mathbf{m}_0 \parallel v$, б) когда $\mathbf{m}_0 \perp v$. Воспользоваться формулами преобразования моментов, полученными в задаче 613.

814. Получить поле равномерно движущегося электрического диполя (момент \mathbf{p}_0 в системе покоя) с помощью результатов задачи 812* (см. ответ к задаче 612).

815. Показать, что компоненты Фурье разложения безвихревого вектора на плоские волны параллельны \mathbf{k} (продольны), а компоненты Фурье соленоидального вектора — перпендикулярны \mathbf{k} (поперечны).

816*. Записать уравнения, которым удовлетворяют в вакууме безвихревая и соленоидальная части векторов электромагнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{H} . Показать, что безвихревая часть электрического поля $\mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t)$ описывает мгновенное (незапаздывающее) кулоново поле, определяемое распределением зарядов в тот же момент времени, для которого определяется \mathbf{E}_{\parallel} .

817*. Разложить свободное ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$) электромагнитное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ в вакууме на плоские волны (в этом случае $\varphi = 0$). Поле занимает неограниченное пространство. Представить амплитуды Фурье этих

волн в виде $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(t) = \frac{c}{\pi\sqrt{2}}q_{\mathbf{k}\lambda}(t)\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$, где $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$ — орт, характеризующий направление поляризации данной поперечной волны, так что $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} = 0$ (см. начало § 1 гл. VIII). При этом каждому \mathbf{k} , очевидно, соответствуют два независимых орта поляризации ($\lambda = 1, 2$). Орты $\mathbf{e}_{\mathbf{k}_1}$ и $\mathbf{e}_{\mathbf{k}_2}$, взаимно ортогональны: $\mathbf{e}_{\mathbf{k}_1} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}_2}^* = \mathbf{e}_{\mathbf{k}_1}^* \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}_2} = 0$. Найти уравнения, которым в общем случае удовлетворяют комплексные «координаты» $q_{\mathbf{k}\lambda}(t)$. Выразить напряженности \mathbf{E} , \mathbf{H} , энергию W и импульс \mathbf{G} поля через $q_{\mathbf{k}\lambda}$ и $\dot{q}_{\mathbf{k}\lambda}$.

818*. Используя результаты предыдущей задачи, ввести вещественные осцилляторные координаты

$$Q_{\mathbf{k}\lambda} = a_{\mathbf{k}\lambda}e^{-i\omega t} + a_{\mathbf{k}\lambda}^*e^{i\omega t}$$

и выразить векторы поля \mathbf{A} , \mathbf{E} , \mathbf{H} через эти координаты. Найти также энергию W и импульс \mathbf{G} поля в координатах $Q_{\mathbf{k}\lambda}$.

819*. Электромагнитное поле излучения описывается осцилляторными координатами $q_{\mathbf{k}\lambda}$ (см. задачу 817*). Написать дифференциальные уравнения, которыми описывается взаимодействие поля излучения в переменных $q_{\mathbf{k}\lambda}$ с заряженной нерелятивистской частицей.

820*. Найти изменение в единицу времени энергии $\frac{dW}{dt}$ поля излучения в результате взаимодействия частицы с полем. Выразить эту величину через осцилляторные координаты $q_{\mathbf{k}\lambda}$ и силы $F_{\mathbf{k}\lambda}(t)$ (см. решение предыдущей задачи).

821*. Частица с зарядом e совершает простое гармоническое колебание по заданному закону $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \sin \omega_0 t$, где $\mathbf{r}_0 = \text{const}$. Используя метод осцилляторов поля (см. задачу 819*), найти угловое распределение и полную интенсивность I излучения¹.

822. Заряд e движется с постоянной угловой скоростью ω_0 по окружности радиуса a_0 . Используя метод осцилляторов поля, исследовать характер поляризации поля излучения заряда, найти угловое распределение и полную интенсивность излучения (ср. с задачей 732).

823*. Линейно поляризованная волна с частотой ω падает на гармонический осциллятор, собственная частота которого ω_0 . Используя метод осцилляторов поля, найти дифференциальное $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ и полное σ сечения рассеяния (лучистое трение не учитывать). Исследовать поляризацию рассеянного излучения.

¹Задача, конечно, может быть решена значительно проще (см. § 1 этой главы). Предлагаемый метод решения интересен своей тесной связью с методом решения аналогичной задачи в квантовой электродинамике.

824. Найти дифференциальное $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ и полное σ сечения рассеяния линейно поляризованной, поляризованной по кругу и неполяризованной монохроматических волн на свободном заряде, используя метод осцилляторов поля (ср. с задачами 799* и 800).

825. На свободном заряде рассеивается: а) неполяризованная волна с частотой ω ; б) волна, поляризованная по кругу. Исследовать характер поляризации поля излучения, используя метод осцилляторов поля (см. задачи 799* и 800).

ЛИТЕРАТУРА

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. [65], Стрэттон Дж. А. [100], Джек-сон Дж. [52], Гуревич Л. Э. [49], Френкель Я. И. [111], Пановский В., Филипс М. [86], Смайт В. [93], Иваненко Д. Д., Соколов А. А. [57], Власов А. А. [25], Беккер Р. [12], Гринберг Г. А. [46], Вайнштейн Л. А. [23], Компанец А. С. [60], Зоммерфельд А. [54], Тихонов А. Н., Самарский А. А. [104], Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. [20], Горелик Г. С. [43], Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. [6], Гайтлер В. [29], Паули В. [87]. Гинзбург В. Л., Сазонов В. Н., Сыроватский С. И. [35], Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И. [36].

ГЛАВА XIII

ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С ВЕЩЕСТВОМ

В этой главе методами классической макроскопической электродинамики рассматриваются различные процессы потерь энергии быстрых частиц в веществе.

Макроскопическая теория, не учитывающая пространственной дисперсии электрической и магнитной проницаемостей, применима, если вещество можно рассматривать как сплошную среду, т. е. если пролетающая частица взаимодействует одновременно со многими атомами. Это означает, что с помощью макроскопических уравнений можно правильно определить энергию, передаваемую частицей только тем электронам вещества, которые находятся на достаточно больших расстояниях r от ее траектории, $r \gg a$, где a — величина порядка межатомного расстояния; в конденсированных средах a совпадает с линейным размером атома ($\approx 10^{-8}$ см).

Скорость частицы v должна удовлетворять условию $v \gg v_{am}$, где v_{am} — средняя скорость атомных электронов. При меньших скоростях частица в основном передает энергию электронам, находящимся вблизи ее траектории, где макроскопическое рассмотрение неприменимо.

Потери энергии, вызванные ионизацией и возбуждением атомов среды, называются ионизационными потерями. Если частица движется через плазму, то значительная часть теряемой ею энергии идет на возбуждение колебаний электронного газа как целого (продольные плазменные волны, см. задачу 443).

Вещество существенно влияет и на излучение поперечных электромагнитных волн частицами. Если заряженная частица движется в непоглощающем диэлектрике с постоянной скоростью, превышающей фазовую скорость света, то она излучает поперечные электромагнитные волны (излучение Вавилова–Черенкова; теория этого явления была дана И. Е. Таммом и И. М. Франком [103]).

Электромагнитное поле, создаваемое в среде движущейся частицей, определяется из уравнений Максвелла; плотности заряда и тока в этих

уравнениях удобно записывать в виде $\rho = e\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)]$, $\mathbf{j} = e\dot{\mathbf{r}}_0\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)]$, где e — заряд частицы, $\mathbf{r}_0(t)$ — ее радиус-вектор. Интегрирование уравнений Максвелла в общем случае диспергирующей среды производится путем разложения искомых величин (векторов поля) в интеграл Фурье по координатам и времени. При этом для определения компонент Фурье получается система алгебраических уравнений (см., например, задачу 826*).

Чтобы найти энергию излучения Вавилова – Черенкова на единице пути частицы, нужно определить электромагнитное поле, создаваемое частицей в среде, и подсчитать поток энергии через цилиндрическую поверхность единичной длины и бесконечного радиуса, окружающую траекторию частицы. Интеграл по времени от указанного потока энергии и даст полную энергию, излучаемую частицей на единице пути в виде электромагнитных волн.

Если радиус цилиндрической поверхности будет конечным (a), то интеграл по времени от потока энергии будет включать не только энергию излучения Вавилова – Черенкова, но и ту энергию, которая передается электронам среды, находящимся на расстояниях $r > a$ от траектории частицы.

826*. Частица с зарядом e движется со скоростью $\mathbf{v} = \text{const}$ в однородной и изотропной среде. Диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon(\omega)$, магнитная проницаемость $\mu = 1$. Определить составляющие электромагнитного поля, создаваемого движущейся частицей.

827*. Частица движется в непоглощающем диэлектрике с постоянной скоростью $v = \beta c$. Используя результаты предыдущей задачи, исследовать создаваемое частицей поле на больших расстояниях от ее траектории. Показать, что достаточно быстрая частица будет излучать поперечные электромагнитные волны (эффект Вавилова – Черенкова). Найти условия возникновения этого излучения и полную величину черенковских потерь $\omega_{\text{В-Ч}}$ на единице пути.

828. Частица с зарядом e движется с постоянной скоростью через вещество, диэлектрическую проницаемость которого можно приближенно описать формулой

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Определить энергию излучения Вавилова – Черенкова на единице пути $\omega_{\text{В-Ч}}$, если скорость частицы удовлетворяет условию $v^2\varepsilon_0 > c^2$, где ε_0 — статическое значение диэлектрической проницаемости. В каком интервале углов сконцентрировано излучение? Сделать численную оценку, положив

$$\omega_0 = 6 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}, \quad \varepsilon_0 = 2, \quad v = c.$$

829. Получить условие $\cos \theta = \frac{1}{\beta n}$, определяющее направление излучения Вавилова–Черенкова, из рассмотрения интерференции отдельных волн, испускаемых частицей в разных точках ее траектории.

830. Черенковское излучение частицы можно рассматривать как следствие резонанса между собственными колебаниями среды и вынуждающей силой, связанной с движущейся частицей. Получить условие, возникновения эффекта Вавилова–Черенкова из сравнения частот собственных колебаний среды и вынуждающей силы.

831. Релятивистская частица, имеющая скорость v , проходит через диэлектрическую пластинку толщиной l перпендикулярно ее плоскости. Показатель преломления пластинки n , дисперсию не учитывать. Найти длительность τ вспышки черенковского излучения, которую зарегистрирует неподвижный относительно пластинки наблюдатель. Определить поток энергии I черенковского излучения через поверхность пластинки во время вспышки. Краевым эффектом пренебречь.

832. Показать, что минимальная скорость движения частицы v_{\min} , при которой возникает излучение Вавилова–Черенкова в данном направлении, удовлетворяет условию

$$v_{\min} \cos \theta = v_g(\omega_m),$$

где v_g — групповая скорость электромагнитных волн в диэлектрике, ω_m — частота, при которой показатель преломления имеет максимум, θ — угол между направлениями излучения и скорости частицы. Диэлектрик считается непоглощающим.

833*. Частица движется с постоянной скоростью $v = \beta c$ в недиспергирующей среде с проницаемостями ϵ , μ . Определить электромагнитные потенциалы φ и A . Рассмотреть два случая $v < v_\varphi$ и $v > v_\varphi$, где v_φ — фазовая скорость электромагнитных волн в рассматриваемой среде.

834. Прямолинейный провод, параллельный оси x , перемещается вдоль оси y со скоростью $v = \text{const}$ в непоглощающей среде с проницаемостями $\epsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$. В лабораторной системе отсчета провод электронейтрален, по нему течет ток \mathcal{I} в направлении оси x .¹ Найти условие, при котором возникает излучение Вавилова–Черенкова. Определить полную энергию излучения $\omega_{B-ч}$ с единицы длины провода на единице пути. Подсчитать тормозящую силу f , действующую на единицу длины провода со стороны созданного им поля.

¹Быстро перемещающиеся токнесущие пучки частиц могут существовать в ускорителях и при некоторых видах разряда.

УКАЗАНИЕ. Векторный потенциал имеет одну компоненту $A_x(y, z, t)$. При выполнении обратного преобразования Фурье использовать правило обхода полюсов, сформулированное в задаче 833*.

835. Два точечных заряда e_1 и e_2 движутся с одинаковыми постоянными скоростями v вдоль одной прямой на расстоянии l друг от друга в среде с проницаемостями $\epsilon(\omega)$, $\mu = 1$ (l измерено в лабораторной системе отсчета). Найти энергию излучения Вавилова – Черенкова $\omega_{В-ч}$ на единице пути. Рассмотреть два случая: а) $e_1 = e_2 = e$; б) $e_1 = -e_2 = e$. Путем предельного перехода получить черепковские потери энергии точечного электрического диполя, ориентированного вдоль направления движения.

836*. Два точечных заряда $+e$ и $-e$ движутся с одинаковыми постоянными скоростями v на расстоянии l друг от друга в среде с проницаемостями $\epsilon(\omega)$, $\mu = 1$. Линия, соединяющая заряды, составляет угол α с направлением скорости (l и α измерены в лабораторной системе). Методом, использованным в предыдущей задаче, найти энергию излучения Вавилова – Черенкова $\omega_{В-ч}$ на единице пути, считая l весьма малым.

837*. Магнитный диполь¹ движется с постоянной скоростью $v = \beta c$ в непоглощающей среде, проницаемости которой $\epsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$. Магнитный момент, измеренный в лабораторной системе, имеет величину m и ориентирован вдоль скорости. Определить потери энергии на излучение Вавилова – Черенкова $\omega_{В-ч}$ на единице пути.

УКАЗАНИЕ. С помощью преобразования Фурье проинтегрировать уравнения для потенциалов. Движущийся магнитный момент создает ток $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = c \operatorname{rot} m \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$.

838*. Быстрая частица с зарядом e движется через непоглощающий диэлектрик с проницаемостью

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

где $\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}$. Определить потери энергии $\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dl}\right)$ в расчете на единицу пути на расстояниях от траектории частицы, превышающих межатомные расстояния a (параметр a должен быть выбран так, чтобы в области $r > a$ было справедливо макроскопическое рассмотрение). Выяснить физический смысл отдельных членов в выражении потерь энергии.

¹ Нейтральная система (сгусток) частиц, имеющая магнитный момент, излучает как магнитный диполь, если длина волны в среде много больше размеров сгустка.

839*. Заряженная частица движется со скоростью $v = \beta c$ через плазму, диэлектрическая проницаемость которой (см. задачу 312*)

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

где $\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}$. Найти потери энергии $\left(-\frac{d\mathcal{E}}{dl}\right)$ на единице пути за счет «далеких» столкновений. Под далекими нужно понимать столкновения с параметром удара $r > a$, где a — расстояние, на котором становится справедливым макроскопическое рассмотрение.

840*. Точечный заряд e движется в вакууме нормально к границе идеального проводника. Определить спектральное и угловое распределение излучения, возникающего при переходе заряда из вакуума в проводник, пренебрегая ускорением заряда под действием силы электрического изображения. Скорость заряда $v = \beta c$.

УКАЗАНИЕ. Поле в вакууме создается зарядом и его изображением, движущимися навстречу друг другу с равными постоянными скоростями. Когда частица пересекает границу проводника, ее заряд мгновенно экранируется свободными электронами проводника, что эквивалентно внезапной остановке заряда и его изображения в одной и той же точке на границе проводника.

841*. Точечный заряд e имеет скорость $v = \beta c$ и движется в вакууме нормально к границе непоглощающего диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ ($\mu = 1$). При переходе заряда из вакуума в диэлектрик возникает излучение. Пренебрегая ускорением заряда под действием силы электрического изображения, определить спектральное и угловое распределение излучения в вакуум (т. е. в область $z > 0$, см. рис. 133).

УКАЗАНИЕ. Плотности заряда и тока, создаваемые движущейся частицей, заменить эквивалентным набором гармонических осцилляторов. Для определения поля в волновой зоне использовать теорему взаимности (см. [66], § 69): $\mathbf{p}_B \cdot \mathbf{E}_A(B) = \mathbf{p}_A \cdot \mathbf{E}_B(A)$. Здесь $\mathbf{E}_B(A)$ — поле, создаваемое в точке A дипольным гармоническим осциллятором \mathbf{p}_B , находящимся в точке B ; $\mathbf{E}_A(B)$ — поле, создаваемое в точке B осциллятором \mathbf{p}_A , находящимся в точке A . Так как точка наблюдения A находится на большом расстоянии от точки встречи заряда с диэлектриком (в волновой зоне), то при вычислении $\mathbf{E}_A(B)$ можно воспользоваться формулами Френеля.

ЛИТЕРАТУРА

Тамм И. Е., Франк И. М. [103], Ферми Э. [105], Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. [66], Болотовский Б. М. [14], Гинзбург В. Л. [32], Гинзбург В. Л., Франк И. М. [37], Силин В. П., Рухадзе А. А. [91], Джелли Дж. [53], Маркс Г., Дьёрдьи Г. [77], Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И. [36].

ГЛАВА XIV

ФИЗИКА ПЛАЗМЫ

§ 1. Движение отдельных частиц в плазме

На движение заряженных частиц в плазме большое влияние оказывают электрические и магнитные поля. Они создаются электронами и ионами плазмы, а также внешними источниками. Если столкновения частиц в плазме происходят редко, то в течение промежутков времени, много меньших времени между столкновениями, каждая отдельная частица движется под действием существующих в плазме макроскопических полей E и H , и ее движение описывается уравнениями механики (XI.20) и (XI.1). В случае неоднородных и переменных полей интегрирование точных уравнений движения является, как правило, сложной математической задачей.

Картина движения частиц существенно упрощается, если магнитное поле велико и медленно меняется в пространстве и во времени, а электрическое поле мало (см. неравенства (XIV.6)–(XIV.6'')). При этом действие электрического поля, а также пространственных и временных неоднородностей магнитного поля можно учесть по методу возмущений. Движение частицы происходит следующим образом: в каждый момент времени частица быстро вращается вокруг направления магнитных силовых линий с циклотронной частотой ceH/\mathcal{E} , где e — заряд частицы, \mathcal{E} — ее энергия. Центр, вокруг которого вращается частица (ведущий центр), движется вдоль магнитной силовой линии, а также медленно перемещается в поперечном направлении под действием электрического поля и неоднородностей магнитного поля. Наряду с этим происходит медленное изменение по абсолютной величине поперечного и продольного импульсов частицы.

Приближение, соответствующее такой картине движения частицы, называется приближением ведущего центра или дрейфовым приближением, а движение ведущего центра поперек магнитных силовых линий называется дрейфом. Уравнения движения в дрейфовом приближении выводятся путем усреднения точных уравнений движения по быстрому вращению частицы вокруг магнитной силовой линии с учетом неравенств (XIV.6)–(XIV.6'').

Система дрейфовых уравнений движения имеет вид

$$\dot{\mathbf{r}} = v_{\parallel} \mathbf{h} + \frac{c}{H^2} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] + \frac{1}{2} v_{\perp} R_{\perp} \left[\mathbf{h} \times \frac{\nabla H}{H} \right] + v_{\parallel} R_{\parallel} [\mathbf{h} \times (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}], \quad (\text{XIV.1})$$

$$\dot{p}_{\parallel} = +\frac{1}{2} p_{\perp} v_{\perp} \operatorname{div} \mathbf{h} + e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{h}), \quad (\text{XIV.2})$$

$$\dot{p}_{\perp} = -\frac{1}{2} p_{\parallel} v_{\perp} \operatorname{div} \mathbf{h}. \quad (\text{XIV.3})$$

Здесь p_{\parallel} проекция импульса частицы на направление магнитного поля \mathbf{H} , p_{\perp} — абсолютная величина поперечной относительно \mathbf{H} составляющей импульса, $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$ — единичный вектор в направлении магнитного поля,

$$R_{\perp} = \frac{cp_{\perp}}{eH}, \quad R_{\parallel} = \frac{cp_{\parallel}}{eH},$$

$$v_{\perp} = \frac{p_{\perp}}{m}, \quad v_{\parallel} = \frac{p_{\parallel}}{m}, \quad m = m_0 / \sqrt{1 - (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)/c^2};$$

m_0 и e — масса и заряд частицы. Все напряженности поля в правых частях уравнений (XIV.1)–(XIV.3) берутся в точке, в которой находится ведущий центр, $\dot{\mathbf{r}}$ — скорость ведущего центра.

Первый член $v_{\parallel} \mathbf{h}$ в правой части уравнения (XIV.1) описывает движение ведущего центра вдоль магнитной силовой линии, второй член — поперечное движение под действием электрического поля (электрический дрейф). Третье и четвертое слагаемые дают соответственно поперечные дрейфы за счет изменения магнитного поля по величине и по направлению. Если на частицу, кроме электрического и магнитного полей, действует неэлектромагнитная сила \mathbf{F} , то в правую часть уравнения (XIV.1) следует добавить слагаемое $\frac{c}{eH^2} [\mathbf{F} \times \mathbf{H}]$, а в правую часть (XIV.2) — член $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{h})$.

Уравнения (XIV.2) и (XIV.3) позволяют найти изменение полной энергии частицы во времени:

$$\frac{d}{dt}(mc^2) = e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{h})v_{\parallel}. \quad (\text{XIV.4})$$

Из них следует также, что

$$p_{\perp}^2/H = \text{const}, \quad (\text{XIV.5})$$

т. е. величина $I = p_{\perp}^2 / H$ является интегралом движения. Но это не точный, а приближенный интеграл движения, обусловленный малостью электрического поля и медленностью изменения магнитного поля. Такие приближенные интегралы движения называются адиабатическими инвариантами.

Уравнения (XIV.1)–(XIV.3) являются приближенными уравнениями движения частицы, справедливыми при медленном изменении E и H в пространстве:

$$\left| R_{\parallel} \frac{\partial H}{\partial x} \right| \ll H, \quad \left| R_{\perp} \frac{\partial H}{\partial x} \right| \ll H, \quad \left| R_{\parallel} \frac{\partial E}{\partial x} \right| \ll E, \quad \left| R_{\perp} \frac{\partial E}{\partial x} \right| \ll E, \quad (\text{XIV.6})$$

где координата x может отсчитываться вдоль любого направления. Кроме того, должно выполняться условие малости электрического поля

$$cE/H \ll v \quad (\text{XIV.6}')$$

и условие медленности изменения электрического и магнитного полей во времени

$$\omega \ll ceH/\mathcal{E}, \quad (\text{XIV.6}'')$$

где ω — характерная частота изменения поля.

842. На нерелятивистскую частицу с зарядом e и массой m действуют однородное магнитное поле \mathbf{H} и постоянная сила \mathbf{F} , ориентированная произвольным образом. Показать, что составляющая силы \mathbf{F} , перпендикулярная \mathbf{H} , вызывает равномерное движение (дрейф) частицы с постоянной скоростью

$$\mathbf{v}_d = \frac{c}{eH^2} [\mathbf{F} \times \mathbf{H}]$$

поперек магнитных силовых линий.

Пояснить качественно происхождение дрейфа, рассмотрев траекторию движения частицы и силы, действующие на нее в разных точках траектории.

843. Прямым расчетом доказать адиабатическую инвариантность величины p_{\perp}^2 / H для случая однородного и постоянного по направлению, но медленно меняющегося по абсолютной величине магнитного поля $H(t)$. Для этого вычислить электрическое поле и проинтегрировать уравнение, описывающее изменение поперечного импульса частицы p_{\perp} во времени, считая, что в течение одного циклотронного периода траекторию частицы можно считать окружностью, совпадающей с силовой линией электрического поля.

844. Система одинаковых невзаимодействующих частиц находится в однородном магнитном поле H и имеет изотропное распределение по импульсам. Все частицы имеют одинаковую энергию \mathcal{E}_0 . Затем магнитное поле адиабатически возрастает до величины nH . Найти угловое распределение $d\omega(\vartheta)$ и среднее значение квадрата энергии частиц $\overline{\mathcal{E}^2}$ в конечном состоянии.

845*. Пусть магнитное поле, оставаясь постоянным по направлению, слабо меняется в пространстве по абсолютной величине. Показать, что эта неоднородность поля в первом приближении приводит к дрейфу частицы поперек поля со скоростью

$$\mathbf{v}_d = \frac{v_{\perp} R_{\perp}}{2H^2} [\mathbf{H} \times \nabla H],$$

где v_{\perp} — составляющая скорости частицы, перпендикулярная направлению поля, $R_{\perp} = \frac{cp_{\perp}}{eH}$ — ларморов радиус частицы (ср. с общей формулой (XIV.1)).

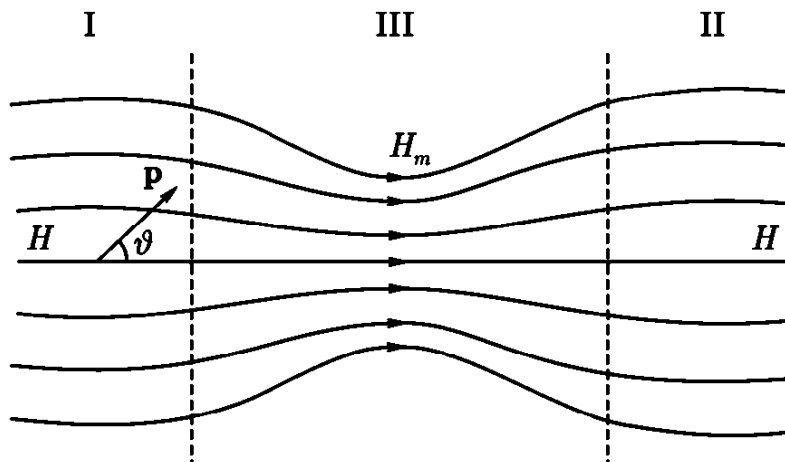


Рис. 43

846. Исходя из инвариантности величины $I = p_{\perp}^2/H$ показать, что в дрейфовом приближении сохраняются магнитный поток через орбиту циклотронного вращения частицы и магнитный момент нерелятивистской частицы, создаваемый ее циклотронным вращением. При каких дополнительных условиях сохраняется магнитный момент релятивистской частицы?

847. Частица движется в слабо неоднородном постоянном магнитном поле. Пользуясь инвариантностью величины $I = p_{\perp}^2/H$ и законом сохранения энергии, показать, что в дрейфовом приближении на частицу действует

сила F , направленная вдоль магнитной силовой линии, и найти величину этой силы. Выразить ее через магнитный момент циклотронного вращения частицы.

848. Между областями I и II, в которых статическое магнитное поле однородно и равно H , находится область III, в которой поле усилено («магнитная пробка»). Максимальное значение поля равно H_m , схематический вид силовых линий показан на рис. 43. В области I движется частица, импульс p которой в некоторый момент времени составляет угол ϑ с направлением силовой линии. Считая изменение поля медленным, найти соотношение между ϑ , H и H_m , при котором частица отразится от области с сильным полем.

849. Структура магнитного поля в адиабатической ловушке с аксиально-симметричным полем имеет вид, схематически изображенный на рис. 44. В среднюю часть ловушки, где напряженность поля равна H , впрыснута порция частиц с изотропно распределенными скоростями. Какая доля частиц R удержится в ловушке в течение длительного времени?

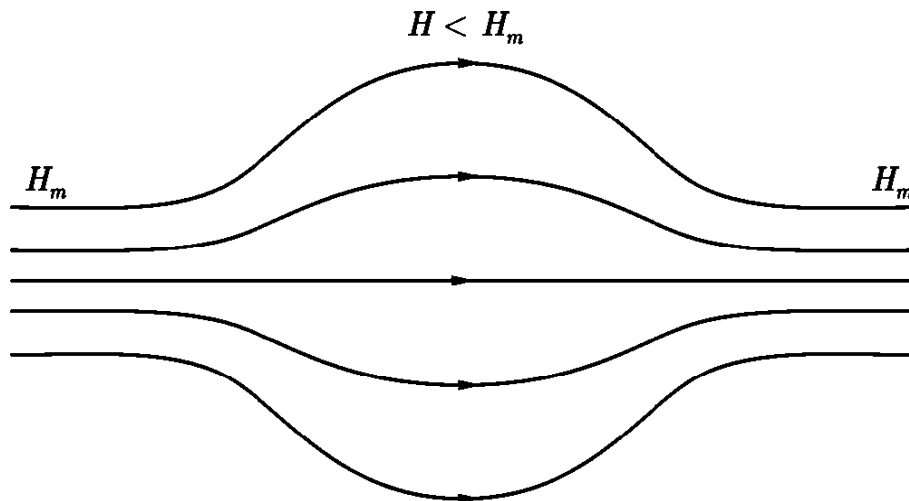


Рис. 44

850. В ловушку с аксиально-симметричным полем, изображенную на рис. 44, захвачена порция частиц. Частицы проводят большую часть времени в средней части ловушки, где поле почти однородно. Пусть поле ловушки медленно нарастает во времени таким образом, что форма магнитных силовых линий не меняется. Найти, как изменяется расстояние ведущего центра каждой из частиц до оси ловушки.

851. В однородном магнитном поле с напряженностью H находится неподвижный точечный заряд q . Частица с зарядом e и массой m , имеющая

на бесконечности продольную составляющую скорости $v_{||}$, рассеивается на заряде q . Считая применимым дрейфовое приближение и пренебрегая изменением продольной скорости при рассеянии, найти, по какой силовой линии будет двигаться ведущий центр частицы после рассеяния. До рассеяния он двигался по силовой линии, уравнение которой в цилиндрических координатах с осью z , проходящей через заряд q и ориентированной вдоль поля, имеет вид $r = l, \varphi = 0$.

852. Магнитное поле Земли можно представить приближенно как поле точечного диполя с магнитным моментом $\mu = 8,1 \cdot 10^{25}$ гаусс \cdot см³. Протон с энергией $\mathcal{E} = 50$ Мэв в некоторый момент времени находится в плоскости магнитного экватора на расстоянии двух земных радиусов от центра Земли и движется поперек магнитных силовых линий. Найти в дрейфовом приближении закон движения ведущего центра протона. За какое время T он совершит полный оборот вокруг земного шара? Каков ларморов радиус R протона? Радиус земного шара $r_* = 6380$ км, его масса $M = 6 \cdot 10^{27}$ г.

853*. Протон находится в плоскости геомагнитного экватора (см. условие предыдущей задачи) на расстоянии r от центра Земли, его импульс составляет угол α с направлением магнитной силовой линии. а) Пренебрегая гравитационным полем, показать, что ведущий центр протона, наряду с движением вдоль магнитных силовых линий, будет испытывать азимутальный дрейф, и найти угловую скорость дрейфа ω_d , выразив ее через r и геомагнитную широту λ . б) Указать значения λ_m , соответствующие точкам отражения частиц в земном магнитном поле. в) Найти условия, при которых протон может достичь поверхности Земли.

854. На неподвижную частицу с зарядом e' налетает ограниченный стационарный поток одинаковых нерелятивистских частиц с зарядами e , массами m и скоростями v (рис. 45). Концентрация частиц в потоке n . Вычислить силу, действующую на неподвижную частицу, пренебрегая взаимодействием налетающих частиц друг с другом. Объяснить причину того, что при радиусе пучка $s_m \rightarrow \infty$ эта сила обращается в бесконечность. Сохраняется ли для силы бесконечное значение, если заряд e' является одним из зарядов нейтральной плазмы?

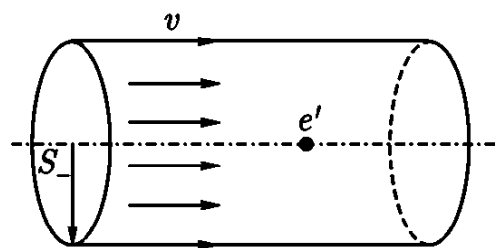


Рис. 45

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться результатом задачи 713*.

855. «Пробная» частица с зарядом e и массой m движется со скоростью v в газе, состоящем из одинаковых заряженных частиц. Их массы m' ,

заряды e' , концентрация n' , распределение по скоростям описывается функцией $f(\mathbf{v})$ ($\int f(\mathbf{v})(d\mathbf{v}) = n'$). Записать выражение для средней силы $\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{v})$, действующей на «пробную» частицу.

УКАЗАНИЕ. Использовать результат, полученный при решении предыдущей задачи. Зависимостью кулонова логарифма от скорости пренебречь.

856. Пробная частица с зарядом e и массой m движется в среде, состоящей из беспорядочно распределенных неподвижных бесконечно тяжелых одинаковых частиц с зарядом e' и концентрацией n . Как меняется во времени энергия и импульс пробной частицы под действием средней силы со стороны среды?

857. Частицы среды имеют одинаковые по абсолютной величине скорости v_0 , распределенные сферически симметрично, заряды e и массы m . Вычислить среднюю силу $\bar{\mathbf{F}}$, действующую на пробную частицу с зарядом e' и массой m' , которая движется со скоростью \mathbf{v} .

858. Решить предыдущую задачу для случая, когда частицы среды движутся с одинаковой по величине и направлению скоростью v_0 .

859*. Электроны в плазме совершают беспорядочное тепловое движение и, кроме того, имеют упорядоченную составляющую скорости, которая возникает под действием однородного электрического поля \mathbf{E} , созданного внешним источником. Произвести порядковую оценку зависимости средней силы трения \bar{F} от упорядоченной скорости u , считая, что трение вызвано столкновениями с неподвижными ионами. Показать, что \bar{F} как функция u имеет максимум, и оценить величину \bar{F}_{\max} . Как будет вести себя электронный газ под действием электрического поля E при $E < \bar{f}_{\max}/e$ и $E > \bar{f}_{\max}/e$.

§ 2. Коллективные движения в плазме

Плазма, т. е. ионизованный газ или проводящая жидкость, состоит из свободных зарядов. При наложении на такую систему электрического и магнитного полей могут возникать макроскопические движения вещества. В свою очередь макроскопические движения приводят к возникновению электромагнитного поля. Поэтому плазма, как правило, представляет собой систему сильно взаимодействующих между собой вещества и электромагнитного поля. Анализ поведения такой системы очень сложен, цельная и законченная теория поведения реальной плазмы в настоящее время отсутствует.

Если свободный пробег частиц плазмы много меньше характерных размеров области, в которой плазма движется, то ее движение можно описывать с помощью уравнений гидродинамики, в которых учтены электромагнитные силы. Электромагнитное поле описывается уравнениями Максвелла в пренебрежении током смещения по сравнению с током проводимости, что справедливо при достаточно медленном изменении поля во времени. Такое приближение называется магнитогидродинамическим. Оно применимо для достаточно плотной среды, в которой малость свободного пробега обеспечивается частыми столкновениями частиц друг с другом. Но гидродинамическое приближение можно применять и для описания движения бесстолкновительной (разреженной) плазмы поперек сильного магнитного поля. Роль длины свободного пробега в этом случае играет радиус циклотронного вращения частиц вокруг магнитных силовых линий.

Уравнения магнитной гидродинамики для несжимаемой проводящей жидкости можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}, \quad (\text{XIV.7})$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] + \frac{c^2}{4\pi\rho} \Delta \mathbf{H}, \quad (\text{XIV.8})$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (\text{XIV.9})$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (\text{XIV.10})$$

Здесь $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ — гидродинамическая (усредненная) скорость движения вещества; $\rho = \text{const}$ — его плотность; p — давление; σ — проводимость; η — коэффициент вязкости.

Плотность тока и электрическое поле в движущейся жидкости могут быть найдены из уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ и закона Ома, который в движущейся среде принимает вид

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right). \quad (\text{XIV.11})$$

При очень высокой проводимости ($\sigma \rightarrow \infty$) последний член в уравнении (XIV.8) играет малую роль, и оно принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]. \quad (\text{XIV.12})$$

Силовые линии магнитного поля в этом случае «вморожены» в вещество: при движении вещества они движутся вместе с находящимися на них частицами вещества. Поэтому магнитный поток через любой контур, перемещающийся вместе с жидкостью, остается постоянным.

Если проводимость низкая или скорость v мала, то в уравнении (XIV.8) можно пренебречь членом $\text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}]$, и оно примет вид (VII.12).

При больших частотах изменения поля становятся существенными процессы разделения зарядов в плазме и токи смещения. Диэлектрическая проницаемость плазмы в пренебрежении потерями электромагнитной энергии имеет вид

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2, \quad (\text{XIV.13})$$

где величина

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}} \quad (\text{XIV.14})$$

(n — концентрация электронов, e и m — их заряд и масса) называется ленгмюровской частотой, или частотой плазменных колебаний. Она характеризует частоту колебаний электронов относительно ионов. Такие колебания возникают при любом разделении зарядов в плазме (см. задачу 871). Корректное описание плазмы в случае быстропеременных полей производится с помощью уравнений Максвелла и кинетического уравнения Больцмана, рассмотрение которого, однако, выходит за рамки этой книги.

860*. Вязкая несжимаемая проводящая жидкость движется между двумя неподвижными параллельными плоскостями в направлении оси z под действием постоянного градиента давления $\frac{dp}{dz} = \text{const}$. Проводимость жидкости σ , коэффициент вязкости η , расстояние между плоскостями $2a$. Перпендикулярно плоскостям в направлении оси x приложено постоянное и однородное внешнее магнитное поле \mathbf{H}_0 . Вычислить зависимость скорости жидкости от x и добавочное магнитное поле, возникающее в движущейся жидкости. Проанализировать результат для больших и малых значений H_0 .

861. Вязкая несжимаемая жидкость находится между параллельными плоскостями $x = \pm a$. Плоскость $x = -a$ движется со скоростью $-v_0$, а плоскость $x = a$ — со скоростью v_0 в направлении оси z . Градиент давления отсутствует, электропроводность жидкости σ и коэффициент вязкости η заданы. Перпендикулярно плоскостям приложено однородное магнитное поле H_0 . Вычислить скорость жидкости и добавочное магнитное поле в ней.

862. Вдоль цилиндрического столба горячей плазмы, радиус которого a , течет ток \mathcal{I} , распределенный по сечению с плотностью $j(r)$. Как зависит от r давление плазмы, если оно уравнивается магнитным давлением, создаваемым текущим вдоль столба током?

Пусть плазма является изотермической и удовлетворяет уравнению состояния идеального газа. Выразить силу тока \mathcal{I} через температуру T плазмы

и полное число N частиц одного знака, приходящихся на единицу длины столба плазмы. Вязкостью пренебречь, рассмотреть стационарное состояние плазмы с $v = 0$.

863. Как должен быть распределен ток по сечению плазменного столба (см. условие предыдущей задачи), чтобы давление плазмы было постоянным по сечению?

864. Плазма испускается изотропно во все стороны с поверхности шара радиуса a , вращающегося вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью Ω . Скорость плазмы v постоянна по величине и направлена по радиусу. Вблизи поверхности шара существует магнитное поле, которое в системе, вращающейся вместе с шаром, имеет значение $\mathbf{H}(a, \vartheta, \alpha) = \mathbf{H}_0(\vartheta, \alpha)$, где α отсчитывается в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Плотность энергии плазмы велика по сравнению с плотностью энергии магнитного поля, так что влиянием поля на движение плазмы можно пренебречь. Предполагая магнитное поле замороженным в плазму, найти его зависимость от координат и времени в области $r > a$ в неподвижной системе отсчета¹.

865. Найти вид силовых линий межпланетного магнитного поля в модели Паркера, рассмотренной в предыдущей задаче. Определить величину магнитного поля и угол θ между силовой линией и радиальным направлением на орбите Земли, задавшись следующими значениями параметров: радиус Солнца $a = 0,7 \cdot 10^6$ км; среднее магнитное поле на поверхности Солнца $H_0 \approx 1$ э; радиус орбиты Земли $r_0 \approx 1,5 \cdot 10^8$ км; угловая скорость вращения Солнца $\Omega = 2,7 \cdot 10^{-6}$ рад/сек; скорость солнечного ветра $v = 300$ км/сек.

866. На плазменный цилиндр действует однородное магнитное поле \mathbf{H} , направленное вдоль оси цилиндра, и радиальное электрическое поле \mathbf{E} . Вычислить ту часть энергии системы, которая связана с электрическим полем, приняв во внимание электрический дрейф плазмы. С помощью полученного выражения для энергии определить поперечную диэлектрическую проницаемость ϵ_{\perp} плазмы, находящейся в магнитном поле.

867. Квазинейтральная плазма находится между плоскостями $x = \pm d$. Пусть в некоторый момент времени произошло разделение зарядов, в результате которого все электроны оказались в плоскости $x = d$, а все ионы — в плоскости $x = -d$. Из-за электростатических сил заряды станут совершать колебания. Пренебрегая столкновениями частиц, найти частоту ω этих колебаний, если средняя концентрация частиц одного знака равна n .

¹ Модель, рассматриваемая в этой задаче, использовалась Паркером для описания межпланетного магнитного поля, создаваемого потоками солнечной плазмы (солнечным ветром).

868. Найти глубину проникновения электромагнитного поля в плазму при разных частотах. Для этого рассмотреть нормальное падение электромагнитной волны на плоскую границу плазмы, вычислить коэффициент отражения R и поперечное электрическое поле в плазме $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$.

Диэлектрическую проницаемость взять в виде (XIV.13).

869*. Найти диэлектрическую проницаемость бесстолкновительной плазмы с учетом теплового движения электронов. Для этого проинтегрировать уравнение движения электрона во внешнем поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$, вычислить плотность тока, создаваемого одной частицей, и произвести усреднение по начальному равновесному распределению координат и скоростей, считая его максвелловским. Ограничиться линейным приближением по напряженности электрического поля \mathbf{E} , движения ионов не учитывать. Заданы средняя концентрация электронов n и температура плазмы T (температура измеряется в энергетических единицах).

870. Диэлектрическая проницаемость плазмы для продольного поля при учете теплового движения частиц имеет вид

$$\epsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k^2}{\omega^2} v_{\parallel}^2 \right),$$

где $v_{\parallel}^2 = T/m$, второй член в скобках мал по сравнению с единицей. Вычислить фазовую и групповую скорости продольных плазменных волн.

871. В момент $t = 0$ в плазме нарушилась нейтральность заряда, в результате чего возник объемный заряд с плотностью $\rho(\mathbf{r}, 0)$.

а) Вычислить плотность $\rho(\mathbf{r}, t)$ для $t > 0$, используя значение диэлектрической проницаемости плазмы (XIV.13).

б) Как изменится качественно результат, если учесть тепловое движение частиц плазмы? Провести конкретный расчет для ϵ_{\parallel} , приведенной в условии предыдущей задачи, выбрав

$$\rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0 \frac{x}{x_0} \exp\left[-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right], \quad \text{где } \rho_0 = \text{const}, \quad x_0 = \text{const}.$$

ЛИТЕРАТУРА

Джексон Дж. [52], Лонгмайр К. [74], Франк-Каменецкий Д. А. [109], Нортроп Т. [82], Вопросы теории плазмы [28], Силин В. П., Рухадзе А. А. [91], Альвен Г., Фельтхаммар К. Г. [2].