ლექცია 1.

1.1 ვექტორული ოპერატორები მართკუთხა კოორდინატთა სისტემებში

ვექტორული ოპერატორი ნაბლა:

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) .$$

გრადიენტი: ნაბლა მოქმედებს სკალარზე ϕ და ვიღებთ ვექტორს grad(ϕ):

$$\mathrm{grad}(\phi) \equiv (\nabla\phi) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) .$$

დივერგენცია: ნაბლას A ვექტორზე სკალარული ნამრავლი გვაძლევს სკალარს $\mathbf{div}(\mathbf{A})$:

$$\mathbf{div}(\mathbf{A}) \equiv (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} .$$

როტორი: ნაბლას A ვექტორზე ვექტორული ნამრავლი გვაძლევს ვექტორს rot$(\mathbf{A})$:

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A}) \equiv [\nabla \times \mathbf{A}] .$$

$$A_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} ,$$

$$A_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} ,$$

$$A_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} ,$$

ლაპლასიანი:

$$\Delta \equiv (\nabla \cdot \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

ზოგიერთი თვისება:

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(\phi)) = \Delta(\phi) .$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\mathbf{A})) = 0 .$$

1.2 ვექტორული ოპერატორები არამართკუთხა კოორდინატთა სისტემებში

ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემა (r, φ, z):

$$x = r\cos(\varphi) ,\quad y = r\sin(\varphi) ,\quad z = z .$$

ვექტორული ოპერაციები ცილინდრულ კოორდინათა სისტემაში:

$$\mathrm{grad}(\phi) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) .$$

$$\mathbf{div}(\mathbf{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(A_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z) .$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} ,$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A})_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} ,$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} .$$

ლაპლასიანი:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} .$$

სფერულ კოორდინატთა სისტემა (r, φ, θ):

$$x = r\cos(\varphi)\sin(\theta) ,\quad y = r\sin(\varphi)\sin(\theta) ,\quad z = r\cos(\theta) .$$

ვექტორული ოპერაციები სფერულ კოორდინათა სისტემაში:

$$\mathrm{grad}(\phi) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}, \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}, \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) .$$

$$\mathbf{div}(\mathbf{A}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A_\varphi\right) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)A_\theta\right) .$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A})_r = \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin(\theta)A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right) ,$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A})_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} ,$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right) .$$

ლაპლასიანი:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) .$$

1.3 ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები

მეორე რანგის ტენზორი C_{ik}:

$$C_{ik} = \left(\begin{array}{c} C_{11}, C_{12}, C_{13} \\ C_{21}, C_{22}, C_{23} \\ C_{31}, C_{32}, C_{33} \end{array} \right) \ .$$

სკალარი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ნულოვანი რანგის ტენზორი, ხოლო ვექტორი $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ როგორც პირველი რანგის ტენზორი A_i $(i = 1, 2, 3)$.

ორი ტენზორის გამრავლებისას განმეორებადი ინდექსი (ე.წ. მუნჯი ინდექსი) იჯამება.

$$A_i B_i \equiv \sum_{i=1}^{3} A_i B_i \ .$$

ამიტომაც მომავალში ყველგან:

$$A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \ ,$$

სადაც, მაგალითად დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში $A_1 = A_x$, $A_2 = A_y$ და $A_3 = A_z$.

კრონეკერის სიმბოლო δ_{ik}:

$$\delta_{ik} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & : & i = k \\ 0 & : & i \neq k \end{array} \right.$$

ზოგიერთი თვისება:

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3 \ .$$

$$\delta_{ik} A_k = A_i \ .$$

სიმეტრიული ტენზორი: $a_{ik} = a_{ki}$. ანტისიმეტრიული ტენზორი: $a_{ik} = -a_{ki}$.

აბსოლუტურად ანტისიმეტრიული ერთეულოვანი ტენზორი ϵ_{ijk} (ლევი–ჩივიტას სიმბოლო):

$$\epsilon_{ijk} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & : & (i = j),\ (i = k),\ (j = k) \\ 1 & : & (i, j, k) = (1, 2, 3),\ (3, 1, 2),\ (2, 1, 1) \\ -1 & : & (i, j, k) = (1, 3, 2),\ (3, 2, 1),\ (2, 1, 3) \end{array} \right.$$

გამოთვლის წესი: $\epsilon_{123} = 1$, ხოლო ნებისმიერი ორი ინდექსის გადასმისას ტენზორი იცვლის ნიშანს. მაგალითად $\epsilon_{123} = -\epsilon_{213}$.

ϵ_{ijk} ტენზორის ზოგიერთი თვისება:

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{ikl} = 6 \ ,$$

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{klm} = 2\delta_{ik} \ ,$$

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{lmn} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km} \ ,$$

$$\delta_{ij}\epsilon_{ijk} = \delta_{jk}\epsilon_{ijk} = \delta_{ik}\epsilon_{ijk} = 0 \ .$$

ოპერაციები ვექტორებზე:

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha A_i \ ,$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = A_i B_i \ ,$$

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \epsilon_{ijk} A_j B_k \ .$$

ვექტორული ოპერატორების ტენზორული ფორმა:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \ ,$$

$$\mathrm{grad}(\phi) = \nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \ ,$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{A}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \ ,$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A}) = \nabla \times \mathbf{A} = \epsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j} \ ,$$

$$\Delta\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} \ .$$

მაგალითი 1.1. გამოითვალეთ div $(\alpha\mathbf{A})$.

$$\mathrm{div}\,(\alpha\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha A_i) = \alpha\frac{\partial A_i}{\partial x_i} + A_i\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = \alpha\,\mathrm{div}\,(\mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \mathrm{grad}\,(\alpha) \ .$$

მაგალითი 1.2. გამოითვალეთ div $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$.

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\epsilon_{ijk}A_jB_k = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}(A_jB_k) = \epsilon_{ijk}\left(A_j\frac{\partial}{\partial x_i}B_k + B_k\frac{\partial}{\partial x_i}A_j\right) =$$

$$= A_j\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}B_k + B_k\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_i}A_j = -A_j\epsilon_{jik}\frac{\partial}{\partial x_i}B_k + B_k\epsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial x_i}A_j = -A_j\mathrm{rot}(\mathbf{B})_j + B_k\mathrm{rot}(\mathbf{A})_k =$$

$$= \mathbf{B}\cdot\mathrm{rot}(\mathbf{A}) - \mathbf{A}\mathrm{rot}(\mathbf{B}) \ .$$

1.

$\vec{E}$ – ელექტრული ველი

$\vec{F}$ – მუხტზე მოქმედი ძალა

q – მუხტი.

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

კულონის კანონი $\quad |F| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$

ε_0 – ელექტრობამტარობის მუდმივა $\quad \left(= 8.85\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{ფარ}}{\text{მეტრ}}\right)$

ერთი წერტილოვანი მუხტის ელ. ველი

$q_1,\ \vec{x}_1.$

$$E(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^2}\,\frac{(\vec{x}-\vec{x}_1)}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}$$

$\vec{r} \equiv \vec{x}-\vec{x}_1$

$$E(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} \qquad \Big/\ \frac{\vec{r}}{r} \equiv \vec{e}_r$$

სუპერპოზიციის პრინციპი

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i\,\frac{\vec{x}-\vec{x}_i}{|\vec{x}-\vec{x}_i|^3} \qquad (\text{დისკრეტ. შემთხ.})$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\vec{x}')\,\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\,d^3\vec{x}'$$

$$\begin{cases} \vec{x}' \equiv (x', y', z') \\ d^3\vec{x}' \equiv dx\,dy\,dz \end{cases}$$

2.

გაუსის კანონი

ელექტრული ველის ნაკადი ელექტრული მუხტი.

ინტეგრალური ფორმა:

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{a} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

q – მუხტი S ზედაპირის შიგნით.

მუხტის უწყვეტი განაწილება:

$$q = \int_V \rho(\vec{x})\,d^3x \qquad d^3x = dV = dx\,dy\,dz$$

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{a} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{x})\,d^3x$$

$$\int_V \operatorname{div}\vec{E}\,dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,dV$$

ელექტროსტატიკური ველის გაუსის კანონი:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

სტოქსის თეორემა

ელექტროსტატიკური ველის ცირკულაცია ნებისმიერ შეკრულ კონტურზე ნულია:

$$\oint_l \vec{E}\, d\vec{l} = 0$$

$$\oint_l \vec{E}\, d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\, \vec{E}\, d\vec{S} = 0$$

სტოქსის თეორემის დიფერენციალური ფორმა:

$$\boxed{\mathrm{rot}\, \vec{E} = 0}$$

ელექტრული ველის პოტენციალი

სკალარული პოტენციალი:

$$\boxed{\vec{E} \equiv -\nabla \Phi}$$

მუხტის უწყვეტი განაწილებისათვის:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\, d^3x'$$

წერტილოვანი მუხტისათვის:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \qquad (r = |\vec{x} - \vec{x}'|)$$

მუშაობა ელექტროსტატიკურ ველში

A წერტილიდან B წერტილში მუხტის გადაადგილებისას შესრულებული მუშაობა:

$$W = (L_A - L_B) \cdot F$$

მუდმივი ძალა, წრფივი გადაადგილება.

ზოგად შემთხვევაში:

$$W = -\int_A^B \vec{F}\, d\vec{l} \qquad \Big| \qquad \vec{F} = q\vec{E}$$

$$W = -q \int_A^B \vec{E}\, d\vec{l} \qquad \Big| \qquad \vec{E} = -\nabla\Phi$$

$$W = q \int_A^B \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{l} = q \int_A^B d\Phi$$

$$\boxed{W = q(\Phi_B - \Phi_A)}$$

ელექტრული ველის „პოტენციური ენერგია": $q\Phi$

პუასონის და ლაპლასის განტოლებები

[5.]

გაუსის კანონი: $\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\left(\operatorname{div}\vec E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)$

სტოქსის თეორემა: $\nabla\times\vec E = 0$ $\left(\operatorname{rot}\vec E = 0\right)$

სკალარული პოტენციალი: $\vec E = -\nabla\varphi$

$$\nabla\cdot\vec E = -\nabla\cdot\nabla\varphi = -\Delta\varphi$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{ან} \quad \Delta \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{(აინშტაინის ჯამი)}$$

$$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ პუასონის განტოლება.

ელექტრული ველის კონფიგურაცია ერთ მუხტის გარეშე:

$$\boxed{\Delta\varphi = 0}$$ ლაპლასის განტოლება.

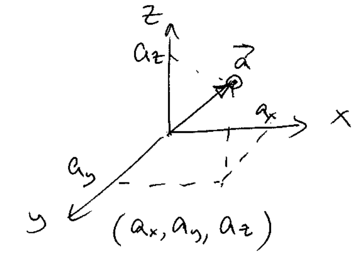
ორთოგონალური კოორდინატთა სისტემები

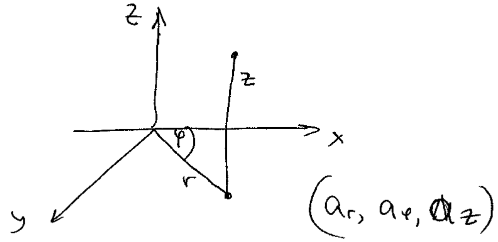
[2.1]

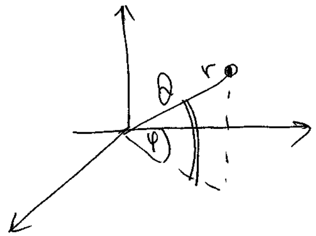
დეკარტის კოორდინატთა სისტემა: (x, y, z)

ცილინდრული კოორდინატთა სისტემა: (r, φ, z)

სფერული კოორდინატთა სისტემა: (r, φ, θ)







ცილინდრული:
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

სფერული:
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\,\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\,\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

2.2

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \text{(დეკარტი)}$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A_\varphi\right) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \text{(ცილინდრული)}$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot A_\theta\right) \qquad \text{(სფერული)}$$

სფერული ლაპლასიანი:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)\right);$$

ცილინდრული ლაპლასიანი:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

დეკარტის ლაპლასიანი:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

[სხვა ფორმულები იხ.
მაგ. Батыгин Топтыгин
გვ. 20]

2.3

მაგალითი:

იპოვეთ მუხტის სიმკვრივის განაწილება თუ ცენტრული პოტენციალი:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-\alpha r}}{r}\left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right)$$

მნიშვნელოვანია კოორდინატთა სისტემის არჩევა:
ამოცანის სიმეტრიის გათვალისწინებით.

დეკარტის სისტემაში: $\Phi(x, y, z)$ $\qquad r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$

სფერულ სისტემაში: $\Phi(r, \varphi, \theta) = \Phi(r)$

მუხტის განაწილების საპოვნელად გამოვიყენოთ პუასონის განტოლება:

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ამოცანას გააჩნია ცენტრალური სიმეტრია:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 0.$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r}\right) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$$

$\rho(r)$ — მუხტის განაწილების სიმკვრივე

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{e^{-\alpha r}}{r}\cdot\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{r}e^{-\alpha r}\left(1+\frac{\alpha r}{2}\right) - \frac{e^{-\alpha r}}{r^2}\left(1+\frac{\alpha r}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\cancel{\frac{\alpha}{2r}} - \frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{r^2} - \cancel{\frac{\alpha}{2r}}\right] e^{-\alpha r} = -\frac{q\, e^{-\alpha r}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

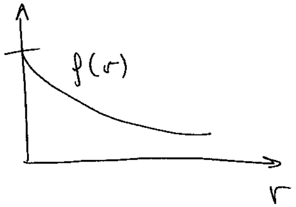
$$r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} e^{-\alpha r}\left(\cancel{1} + \cancel{\alpha r} + \frac{\alpha r^2}{2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[(\alpha + \alpha r)e^{-\alpha r} - \left(\alpha + \alpha r + \frac{\alpha^2 r^2}{2}\right)e^{-\alpha r}\right] =$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\cancel{\alpha} + \cancel{\alpha r} - \cancel{\alpha} - \cancel{\alpha r} - \frac{\alpha^2 r^2}{2}\right] e^{-\alpha r} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\cdot \alpha^2 r^2 e^{-\alpha r}$$

$$\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} = -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\cdot \alpha^2 e^{-\alpha r}$$

$$\rho(r) = -\frac{q}{8\pi}\cdot \alpha^2 e^{-\alpha r}$$



ანალოგიური გამოსახულება დეკარტის სისტემაში მოგვცემდნენ:

$$\rho(x,y,z) = -\frac{q}{8\pi}\cdot \alpha^2 \cdot \exp\left(-\alpha\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}\right)$$

ელექტრული ველის ენერგია

განვიხილოთ მუხტთა სისტემა: $q_1, q_2, q_3,$

სრული ელექტრული ენერგია ტოლია მუხტების წყვილ-წყვილად ურთიერთქმედების ენერგიების ჯამის:

$$W = W_{12} + W_{13} + W_{23}$$

რადგანაც ურთიერთქმედება სიმეტრიულია $W_{12} = W_{21}$

$$W = \frac{1}{2}\left(W_{12} + W_{21}\right) + \frac{1}{2}\left(W_{13} + W_{31}\right) + \frac{1}{2}\left(W_{23} + W_{32}\right)$$

$$W = \frac{1}{2}\left(\left(W_{12} + W_{13}\right) + \left(W_{21} + W_{23}\right) + \left(W_{31} + W_{32}\right)\right)$$

ან ზოგადად:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} W_{ij} \qquad i \neq j$$

პოტენციური ენერგია: $W_{ij} = q_i \Phi_j$

სკალარული პოტენციალი: $\Phi_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{|r_j|}$

$$W_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{|\vec{r_i} - \vec{r_j}|}$$

სრული ენერგია:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{|\vec{r_i} - \vec{r_j}|}$$

მუხტების უწყვეტი განაწილებისათვის:

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\rho(\vec r_1)\,\rho(\vec r_2)}{|\vec r_1 - \vec r_2|}\, d^3\vec r_1\, d^3\vec r_2$$

ან პოტენციალით:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int \rho(\vec r)\,\varphi(\vec r)\, dV}$$

ლაპლასის განტოლება $\rho(\vec r) = -\varepsilon_0 \Delta\varphi(\vec r)$

$$W = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int \varphi(\vec r)\,\Delta\varphi(\vec r)\, dV$$

$$\int \varphi \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\, dx = \int \varphi\, d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \left[\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot d\varphi$$

(ინტეგრების ბოლო საზღვრები)

$\varphi(\pm\infty) = 0$ მუხტების შემოსაზღვრული განაწილება (ენერგიის სასრულობა)

$$\int \varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\, dx = -\int \frac{\partial\varphi}{\partial x}\, d\varphi = -\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int (\nabla\varphi)^2\, dV$$

$\nabla\varphi = -\vec E$

$$\boxed{W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2\, dV}$$

$$\boxed{w \equiv \frac{\varepsilon_0}{2} E^2}$$

(ენერგიის სიმკვრივე)

ორი ელექტრული მუხტის ენერგია

ელექტრული ურთიერთქმედების ენერგიის ლოკალური წერტილოვანი მუხტების შემთხვევაში.

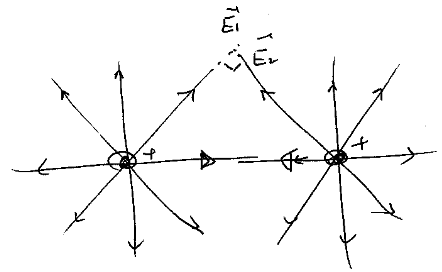
$$\vec E = \vec E_1 + \vec E_2$$

$$w = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E_1^2 + E_2^2 + 2\vec E_1\vec E_2\right)$$

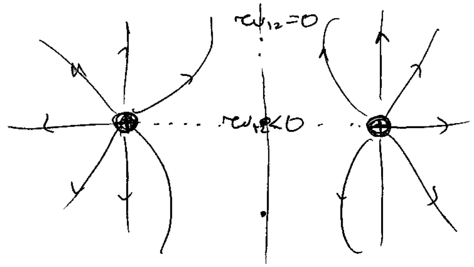
$$w \equiv w_1 + w_2 + w_{12}$$

$w_1 = \frac{\varepsilon_0}{2}E_1^2$, $w_2 = \frac{\varepsilon_0}{2}E_2^2$ – მუხტების საკუთარი ენერგიები

$w_{12} = \varepsilon_0 \vec E_1\cdot\vec E_2$ მუხტების ურთიერთქმედების ენერგია.

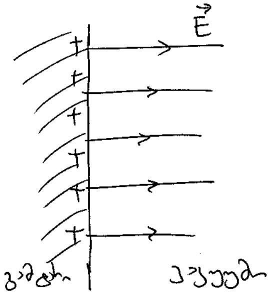


$w_{12}=0$: $\vec E_1 \perp \vec E_2$
ურთიერთქმედების ენერგიის სიმკვრივე ნულია ამ წერტილ. მუხტის ველები მართობულია



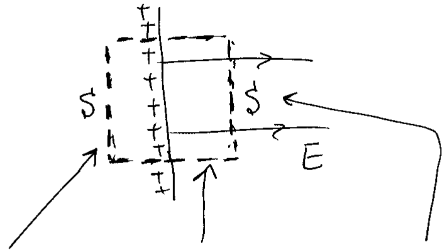
ზოგადი სურათი

ელექტრული ველის ენერგია გამტარის ზედაპირთან



ვიპოვოთ ველი ნებისმიერი დამუხტული გამტარის ზედაპირთან.

გამტარის ზედაპირთან ახლოს ელექტროსტატიკური ველი ზედაპირის მართობულია.



გაუსის თეორემა:

$$\oint \vec E\, d\vec S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

გამტარის შიგნით $E=0$, $\vec E \perp d\vec S$, $\vec E \parallel d\vec S$

$$E\cdot S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

σ – მუხტის ზედაპირული სიმკვრივე:

$$q = \int \sigma\, dS$$

$\sigma = const$: $E\cdot S = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\sigma\cdot S$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$ (გამტარის ზედაპირთან ელექტრული ველი)

ენერგიის სიმკვრივე: $w = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2$

$$\boxed{w = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$$

ელექტრული ველი დიელექტრიკებში

დიელექტრიკი – გარემო თავისუფალი ელექტრული მუხტების გარეშე. გარეშე ელექტრული ველი იწვევს მისი მუხტების წანაცვლებას.

ტიპიური მოლეკულა: ელექტრულად ნეიტრალური $q'=0$, მაგრამ გააჩნია არანულოვანი დიპოლური მომენტი $\vec p\,' \neq 0$.

ერთეული მოცულობის დიპოლური მომენტი: გარემოს პოლარიზაცია

$$\vec P = \langle \vec p_i \rangle$$

თუ გარემო შედგება სხვადასხვა ტიპის მოლეკულებისგან:

$$\vec P = \sum_{i=1}^{k} N_i \langle \vec p_i \rangle \qquad (i = 1..k)$$

k – ტიპის მოლეკულები

ერთეული მოცულობის ელექტრული მუხტის სიმკვრივე:

$$\rho(\vec r) = \sum_{i=1}^{k} N_i \langle e_i \rangle + \rho_{გარ}$$

თუ არ გვაქვს გარე მუხტი ($\rho_{გარ}=0$), $\langle e_i\rangle = 0$, ე.ი.

$$\rho(\vec r) = 0$$

ტიპიური დიელექტრიკული გარემო გარეშე ელექტრულ ველში ელექტრულად ნეიტრალურია, მაგრამ პოლარიზებულია:

$$\boxed{\vec P(\vec r) \neq 0, \quad \rho(\vec r) = 0}$$

მუხტი და მისი ველი. მიახლოებული ერთი ველი
$\vec{r}$ წერტილში დაკვირვება ΔV მოცულობის გასაშუალოებით.
$\vec{r}'$ – ვექტორი ΔV მოცულობის შიგნით.

ელექტროსტატიკური ველის პოტენციალი:

$$\Delta\varphi(\vec r,\vec r') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\underbrace{\frac{\rho(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}\Delta V}_{\text{წერტილოვანი წვლილი}} + \underbrace{\frac{\vec P(\vec r')(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|^3}\Delta V}_{\text{დიპოლური წვლილი}} + \underbrace{\text{მაღალი რიგის შესწორებები}}_{\text{სხვა და ასე შემდეგ...}}\right]$$

სრული ელექტროსტატიკური პოტენციალი: (ვაჯამებთ (ვაინტეგრებთ) $\vec r'$-ით)

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\left(\frac{\rho(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|} + \vec P(\vec r')\frac{(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|^3}\right)d^3\vec r'$$

$$\vec P(\vec r')\frac{(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|^3}d^3\vec r' = \vec P(\vec r')\,\nabla'\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\,d^3\vec r'$$

ნაწილობითი ინტეგრება:

$$\int\vec P(\vec r')\,\nabla\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}d^3\vec r' = \left[\frac{\vec P(\vec r)}{|\vec r-\vec r'|}\right]_{\text{საზღვრებზე}}^{\to 0} - \int\frac{\nabla\vec P(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}d^3\vec r'$$

ე.ი.

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{d^3\vec r'}{|\vec r-\vec r'|}\left(\rho(\vec r') - \nabla\vec P(\vec r')\right)$$

ჩვეულებრივი მუხტის ველის პოტენციალი:

$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\,d^3\vec r'}{|\vec r-\vec r'|}$$

ე.ი. დიელექტრიკის ΔV მოცულობა გასცემს ეფექტურ მუხტს სიმკვრივით:

$$\rho_{ეფ} = \rho - \nabla\vec P$$

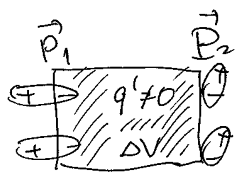
გაუსის კანონის ლოკალური ფორმა: $\vec\nabla\cdot\vec E = \dfrac{\rho_{ეფ}}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\nabla\vec E = \frac{1}{\varepsilon_0}\Big(\rho(\vec r) - \nabla\vec P(\vec r)\Big)}$$

$\rho(\vec r)$: დიელექტრიკის დაუბალანსებელი მუხტი

$\nabla\vec P(\vec r)$: „ბმული მუხტი"

დიელექტრიკში პოლარიზაციის არაერთგვაროვნება $(\nabla P\neq 0)$ იწვევს ბმული (ეფექტური) მუხტის გაჩენას:



$$\sum_i q_i \neq 0.\ \left(= q'\right)\ \text{(ბმული მუხტი)}$$

$$\nabla\vec E = \frac{\rho(\vec r)}{\varepsilon_0} - \frac{\nabla\vec P(\vec r)}{\varepsilon_0};\quad \rho(\vec r) = \underbrace{\varepsilon_0\nabla\vec E + \nabla\vec P}_{\equiv\vec D}$$

ელექტრული ინდუქციის ვექტორი:

$$\boxed{\vec D \equiv \varepsilon_0\vec E + \vec P}$$

შესაბამისად

$$\boxed{\nabla\vec D = \rho(\vec r)}$$

→ ვარიანტი ან არის დამატებული დიელექტრიკის საზღვრებზე ან ბმულ მუხტზე.

ერთგვაროვანი დიელექტრიკის ატრიბუტები

<u>ერთგვაროვანი</u> (ყველგან ერთი და იგივე დიელექტრიკული თვისებები)
<u>იზოტროპული</u> (ყველგან ერთი და იგივე დიელექტრიკული თვისება ველის მიმართულებაზე)
დიელექტრიკის პოლარიზაცია პროპორციულია გარე ველის:

$$\vec{P} \sim \vec{E}$$

χ — დიელექტრიკული ამთვისებლობა

$$\boxed{\vec{P}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \chi \vec{E}(\vec{r})}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0 (1+\chi) \vec{E}$$

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 (1+\chi)}$$ დიელექტრიკული შეღწევადობა

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}$$

$\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = (1+\chi)$ — ფარდობითი დიელექტრიკული შეღწევადობა
(ზოგჯერ: დიელექტრიკული მუდმივა)

ელექტროსტატიკური ველი დიელექტრიკულ გარემოში:

$$\boxed{\begin{cases} \vec{\nabla} \vec{D} = \rho \\ \nabla \vec{E} = \rho / \varepsilon \end{cases}}$$ ან

და

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}$$

ფარდობითი დიელექტრიკული შეღწევადობები:

$\varepsilon_r = 4$ ქაღალდი

$\varepsilon_r = 11.5$ სილიციუმი

$\varepsilon_r > 100{,}000$ ასიმეტრიული იზოლატორები

ბრტყელ-პარალელური კონდენსატორი ვაკუუმში.

S — ფირფიტის ფართი,
h — მანძილი ფირფიტებს შორის
C — ტევადობა.

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{h}$$

თუ ფირფიტებს შორის ვაკუუმს შევცვლით ε შეღწევადობის დიელექტრიკით, მაშინ (ყველა სხვა პარამეტრი უცვლელია)

$$C_e = \varepsilon \frac{S}{h}$$

$$\frac{C_e}{C_0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r$$

ანიზოტროპული დიელექტრიკები

$$\vec{P} \not\parallel \vec{E}$$

გარემოს თვისება (პოლარიზაცია) დამოკიდებულია გარეშე ველის მიმართულებაზე (მაგ. კრისტალები).

χ_{ij} — დიელექტრიკული ამთვისებლობის ტენზორი

$$\chi_{ij} = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix}$$

$$P_i = \chi_{ij} E_j$$

ან კომპონენტებში:

$$\begin{cases} P_x = \chi_{11} E_x + \chi_{12} E_y + \chi_{13} E_z \\ P_y = \chi_{21} E_x + \chi_{22} E_y + \chi_{23} E_z \\ P_z = \chi_{31} E_x + \chi_{32} E_y + \chi_{33} E_z \end{cases}$$

ანალოგიურად დიელექტრიკული შეღწევადობის ტენზორი:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 (1 + \chi_{ij})$$

ერთგვაროვანი იზოტროპული დიელექტრიკის შემთხვევაში მივიღებთ:

$$\chi_{ij} = \begin{pmatrix} \chi & 0 & 0 \\ 0 & \chi & 0 \\ 0 & 0 & \chi \end{pmatrix}$$

ელექტრეტები – დიელექტრიკები რომლებიც წარმოადგენენ მუდმივი ან თითქმის მუდმივი (კვაზიმუდმივი) ელექტრული ველის წყაროებს.

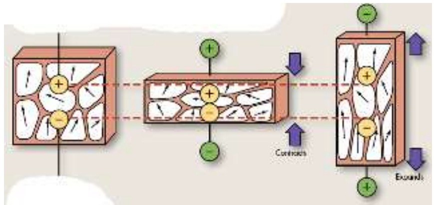
ელექტრული ველის წყარო: ჩაჭერილი (დაუბალანსებელი) ელექტრული მუხტები, ან ჩაყინული ელექტრული პოლარიზაცია.

დამუხტული ელექტრეტები: ზედაპირული ან მოცულობითი მუხტის განაწილება;

პოლარიზებული ელექტრეტები: უპირატესად ერთი მიმართულებით ორიენტირებული დიპოლური მომენტის მოლეკულები.

მაგალითად ელექტრონების ნაკადი შეიძლება ჩაიჭიროს ტეფლონის ზედაპირზე და მივიღოთ ტეფლონის ელექტრეტი.

პიეზოელექტრული ნივთიერება – ელექტრეტი, რომელიც იძენს ელექტრულ პოლარიზაციას და ქმნის ელექტრულ ველს მექანიკური ზემოქმედების შედეგად. (მაგალითად კვარცის კრისტალი).



პიროელექტრული ნივთიერება – ელექტრეტი, რომელიც იძენს ელექტრულ პოლარიზაციას და ქმნის ელექტრულ ველს სითბური ზემოქმედების შედეგად (მაგალითად გაცხელება).

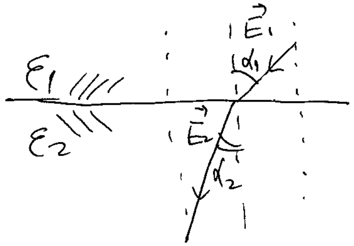
ელექტროსტრიქცია – პროცესი, როდესაც დიელექტრიკები იცვლიან ფორმას ელექტრული ველის ზემოქმედების შედეგად. ელექტრული ველის ზემოქმედება იწვევს მექანიკური ძალის გაჩენას (მაგალითად დიელექტრიკი იწელება ელექტრული ველის გასწვრივ).

ელექტრული ველი ორი დიელექტრიკის საზღვარზე

"ელექტროსტატიკური ველის პოტენციალობის პირობი"

სტოქსის თეორემის გამოყენებით:

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0$$



გაუსის თეორემის გამოყენებით:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

τ — ტანგენციალური მდგენელი

n — ნორმალური მდგენელი.

თუ ზედაპირული მუხტი ნულია: $\sigma = 0$

$$\begin{cases} E_{1\tau} = E_{2\tau} \\ D_{1n} = D_{2n} \quad : \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{E_{1\tau}}{E_{1n}} \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}}$$

$$\boxed{\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

— ელექტროსტატიკური ველი

— არ გვაქვს ზედაპირული მუხტი

ელექტრული ველის ენერგია დიელექტრიკში

წერტილოვანი მუხტის გადაადგილებისას შესრულებული მუშაობა:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad \varphi \text{ — ელ. ველის პოტენციალი}$$

დიელექტრიკში მუხტების განაწილების შეცვლისას შესრულებული მუშაობა:

$$\delta A = \int \delta\rho(\vec r)\,\varphi(\vec r)\, d^3\vec r$$

$\delta\rho(\vec r)$ — მუხტის განაწილების სიმკვრივის ცვლილება.

გაუსის თეორემა დიელექტრიკული გარემოსათვის: $\nabla\vec D = \rho$

$$\nabla(\delta\vec D) = \delta\rho$$

ე.ი. $$\delta A = \int \nabla(\delta\vec D)\,\varphi\, d^3\vec r$$

ნაწილობითი ინტეგრება:

$$\delta A = \underbrace{\left[\delta\vec D\cdot\varphi\right]_{\text{საზღვარზე}}}_{0} - \int \delta\vec D\cdot\nabla\varphi\cdot d^3\vec r$$

ელექტროსტატიკური ველისათვის: $\vec E = -\nabla\varphi$

ლოკალიზებული ველი: $\delta\rho = 0$ — საზღვარზე; ე.ი. $\delta D_{\text{საზ.}} = 0$

ე.ი. $$\delta A = \int \delta\vec D\cdot\vec E\cdot d^3\vec r$$

[4.2.]

თუკი სისტემაზე სხვა ძალები არ მოქმედებს:

$$\delta A = \delta W$$ – ელექტროსტატიკური ველის ენერგიის ცვლილება

წრფივი იზოტროპული დიელექტრიკებისათვის: $\vec{D} \sim \vec{E}$ და $\vec{D} \sim \vec{E}$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\delta \vec{D} \cdot \vec{E} = \varepsilon\, \delta \vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{\varepsilon}{2}\, \delta(\vec{E} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{2}\, \delta(\vec{D} \cdot \vec{E})$$

ელექტროსტატიკური ველის ენერგიის ცვლილება დიელექტრიკში:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \delta(\vec{D} \cdot \vec{E})\, d^3\vec{r}$$

ან სრული ენერგიისათვის:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} \cdot d^3\vec{r}}$$

ენერგიის სიმკვრივე: $\boxed{w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}}$

ან $$w = \frac{\varepsilon}{2} E^2 \qquad \left(\text{ვაკუუმში: } w = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2\right)$$

დიელექტრიკში ველის სრული ენერგია ნაწილობრივ შეიცავს ორ წევრს: ელექტროსტატიკური ველის ენერგია და დიელექტრიკის პოლარიზაციის ენერგია. ურთ-ურთიერთ დაკავშირებულია მხოლოდ ველის ენერგია.

ელექტროსტატიკური მუხტების წონასწორობის მდგრადობა [4.9.]

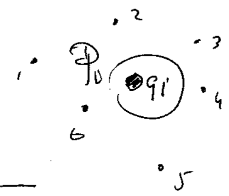
შეიძლება თუ არა უძრავი ელექტრული მუხტების განაწილება $(q_1, q_2, \dots)$ იყოს მდგრადი სისტემა?

სისტემის ენერგია: $$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \sum_j \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \qquad i \neq j$$

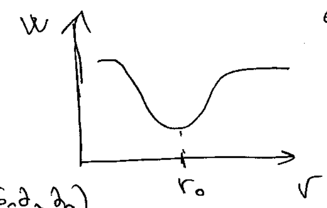
ან $$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$$

სადაც φ_i არის სისტემის ყველა მუხტების მიერ შექმნილი პოტენციალი q_i მუხტის მდებარეობის წერტილში q_i მუხტის გამოკლებით.

(მუხტი საკუთარ თავზე არ მოქმედებს)



მდგრადი წონასწორობის პირობა:



1) ექსტრემუმის არსებობა (მინიმუმი)
$$\frac{\partial W}{\partial r} = 0$$

2) მინიმუმი (ჩაზნექილი ფუნქცია) $$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} > 0.$$

მდგრადობა x მიმართულებით: $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} > 0$

y მიმართულებით: $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} > 0$

z მიმართულებით: $\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} > 0$

$$\Delta W = \frac{1}{2}\sum_i q_i \,\Delta\Phi_i$$

$\Delta\Phi_i = 0$, ანუ:

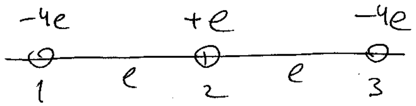
$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0$$

რაც ეწინააღმდეგება მდგრადობის პირობას $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} > 0\right)$

> ირნშოუს თეორემა: ელექტრული მუხტების სტატიკური განაწილება არ არსებობს (არამდგრადია)

რატომ გვხვდება სისტემები მდგრადი? ე.ი. არა ელექტროსტატიკური ძალები, მაგ. კვანტომექანიკური ძალა. (ქვანტური ბუნების გამომწვევი)

მაგალითი:



$$\begin{cases} F_1 = F_{12} + F_{13} = 0 \\ F_2 = F_{21} + F_{23} = 0 \\ F_3 = F_{31} + F_{32} = 0 \end{cases}$$

F_i — i მუხტზე მოქმედი ჯამური ძალა

F_{ik} — i-ზე k-მუხტიდან მოქმედი ძალა

სადაა სტაბ?

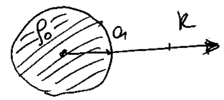
წონასწორობის პირობები

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} > 0$$

ელექტრული ველი $\vec{P}$ ნიმუშისთვის დიელექტრიკში.

დავალება: ამოცანა: რადიუსის a სფეროს

დამუხტული სფეროს დიელექტრიკის ელ. ველი მუდმივი სიმკვრივით დიელექტრიკში: $\rho_0 = const.$



ამოვხსნათ ამოცანა პოტენციალისთვის Φ სფერულ კოორდინატებში:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\Phi\right) = \frac{\rho(\vec r)}{\varepsilon}, \quad \text{სადაც } \rho(r) = \begin{cases} \rho_0 : r<a \\ 0 : r>a \end{cases}$$

(ნაწილობრივი φ და θ ცვლადებით ნული)

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\Phi\right) = \frac{1}{\varepsilon} r^2 \rho(r)$$

$$r^2 \frac{\partial}{\partial r}\Phi = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^r r^2 \rho(r)\,dr$$

1) $r>a$:

$$r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^a r^2 \rho_0\,dr + \frac{1}{\varepsilon}\int_a^r r^2 \cdot 0 \cdot dr = \frac{\rho_0}{\varepsilon}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon}\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$\Phi(r) = \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon}\int \frac{dr}{r^2} = -\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon}\left[\frac{1}{r}\right]$$

$$\Phi(r>a) = -\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}$$

სფეროს მოცულობა: $V_0 = \frac{4}{3}\pi a^3$

სფეროს ჯამური მუხტი: $q = \rho_0 V_0$

$$\rho_0 = \frac{q}{V_0} = \frac{3q}{4\pi a^3}$$

$$\Phi(r>a) = -\frac{\cancel{3}q}{4\pi \cancel{a^3}} \cdot \frac{\cancel{a^3}}{\cancel{3}\varepsilon} \cdot \frac{1}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r}$$

2) $\underline{\underline{r<a}}$

$$r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^r r^2 \rho_0 \, dr = \frac{\rho_0}{\varepsilon} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^r = \frac{\rho_0}{3\varepsilon} \cdot r^3$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon} \cdot r$$

$$\Phi(r<a) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon} \int r \, dr = \frac{\rho_0}{6\varepsilon} r^2 + \text{const.}$$

$$\Phi = \begin{cases} -\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon} \frac{1}{r} & : r \geq a \\ \frac{\rho_0}{6\varepsilon} \cdot r^2 + C_0 & : r \leq a \end{cases}$$

$$\Phi(r=a) = -\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon} \cdot \frac{1}{a}$$

$$\|$$

$$\Phi(r=a) = \frac{\rho_0}{6\varepsilon} \cdot a^2 + C_0$$

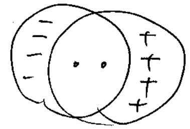
$$-\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\rho_0}{6\varepsilon} a^2 + C_0$$

$$C_0 = -\frac{\rho_0 a^2}{3\varepsilon} \left(+1 + \frac{1}{2} \right) = -\frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon}$$

ე.ი. $$\Phi(r) = \begin{cases} -\frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon} \frac{1}{r} & : r \geq a \\ \frac{\rho_0}{2\varepsilon} \left(\frac{r^2}{3} - a^2 \right) & : r \leq a \end{cases}$$

ამოცანა ასე [illegible] ელექტროსტატიკის შექმნილი წარმოსახვითი დამუხტული ბირთვის მიერ.

წარმოვიდგინოთ, რომ დადებითი მუხტები [illegible] უარყოფითი მუხტების [illegible] [illegible] და შექმნის დამუხტულ ბირთვს.



უარყოფითად დამუხტული სფეროს პოტენციალი:
(გამოვიყენოთ პირველი ამოხსნა $r<a$ შემთხვევაში)

$$\Phi_- = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon} \left(\frac{R_-^2}{3} - a^2 \right)$$

დადებითი მუხტის სფეროს პოტენციალი:

$$\Phi_+ = +\frac{\rho_0}{2\varepsilon} \left(\frac{R_+^2}{3} - a^2 \right)$$

ჯამური პოტენციალი: $\Phi = \Phi_+ + \Phi_- = \frac{\rho_0}{3\varepsilon} \left(R_+^2 - R_-^2 \right)$

დადებითი და უარყოფითი მუხტების ცენტრების მიმართ წანაცვლების ვექტორი: $\vec{e}$

სფეროების საწყისი ცენტრიდან გავზომოთ რადიუს-ვექტორი: $\vec{R}$

$$\begin{cases} \vec{R}_+ = \vec{R} + \vec{e} \\ \vec{R}_- = \vec{R} - \vec{e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_+^2 = R^2 + e^2 + 2\vec{R}\vec{e} \\ R_-^2 = R^2 + e^2 - 2\vec{R}\vec{e} \end{cases}$$

მივიღებთ: $$R_+^2 - R_-^2 = 4\vec{R}\cdot\vec{e}$$

ანუ: $$\varphi = \frac{\rho_0}{3\varepsilon} \cdot 4\vec{R}\vec{e}$$

ელექტრული ველი: $$\vec{E}' = -\nabla\varphi = -\nabla \frac{\rho_0}{3\varepsilon} 4\vec{R}\vec{e}$$

მუხტების მუდმივი განაწილების შემთხვევაში ($\rho_0 = const$)

$$\nabla \frac{\rho_0}{3\varepsilon} 4\vec{R}\vec{e} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon} \cdot 4 \underbrace{(\nabla\vec{R})}_{\to 1}\vec{e} = \frac{4}{3\varepsilon}\rho_0\vec{e} = \frac{4}{3\varepsilon}\vec{P}$$

სადაც $\vec{P} = \rho_0\vec{e}$ – ელექტრული პოლარიზაციის ვექტორი

ანუ: $$\boxed{\vec{E}' = \frac{4}{3\varepsilon}\cdot\vec{P}}$$ ელექტრული ველი დიელექტრიკის პოლარიზაციის გამო

ჯამური ველი: $$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{4}{3\varepsilon}\vec{P}}$$

გარეშე ველისა და დიელექტრიკის პოლარიზაციით გამოწვეული ველების ჯამი.

ცვლადი დიელექტრიკული შეღწევადობის გარემო

$$\varepsilon = \varepsilon(r) \neq const.$$

იზოტროპული, მაგრამ არაერთგვაროვანი დიელექტრიკი:

$$\vec{P} \parallel \vec{E}, \qquad \varepsilon(r) \neq const.$$

გაუსის თეორემა $\vec{D}$ ვექტორისთვის ლოკალური ფორმით:

$$\nabla\vec{D} = \rho(\vec{r})$$

და ველის პოტენციალი $\vec{E} = -\nabla\varphi$

$$\vec{D} = \varepsilon(r)\vec{E}$$

$$\nabla\left(\varepsilon(r)\cdot\vec{E}\right) = \rho(\vec{r})$$

$$\nabla\left(\varepsilon(r)\nabla\varphi\right) = -\rho(\vec{r})$$

$$\nabla^2\varphi + \nabla\varphi\cdot\frac{\nabla\varepsilon(r)}{\varepsilon(r)} = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon(r)}$$

პუასონის განტოლების ანალოგი არაერთგვაროვანი დიელექტრიკისთვის:

$$\boxed{\Delta\varphi + \frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\nabla\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

ერთგვაროვანი გარემოში $\varepsilon = const$, $\nabla\varepsilon = 0$, და $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$.

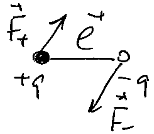
დიელექტრიკზე მოქმედი პონდერომოტორული ძალები

დიელექტრიკის ყოველ მოცულობაზე მოქმედებს ძალა ელ. ველში. ელექტრული ველის გარემოზე მექანიკური ზემოქმედებას პონდერომოტორული ზემოქმედება ეწოდება.

მაკროსკოპული პონდერომოტორული ძალა უდრის მოცულობაზე მოქმედი მიკროსკოპული ძალების ჯამს.

ვთქვათ დიელექტრიკი შედგება მოლეკულური დიპოლებისგან.

დიპოლზე მოქმედი ძალა:



$$\vec F_i = \vec F_1 + \vec F_2 = q\vec E_1 - q\vec E_2$$

მცირე ზომის დიპოლისთვის: $\vec E_1 - \vec E_2 = \frac{\partial \vec E}{\partial \vec e} \cdot \vec e \approx \vec e \, \nabla \vec E'$

$$\vec F_i = q\vec e \, \nabla \vec E' = \vec p_i \nabla \vec E'$$

$\vec p_i$ – ინდივიდუალური დიპოლის ელ. მომენტი.

ჯამური პონდერომოტორული ძალა $\vec F = \langle \vec F_i \rangle = N \langle \vec p_i \nabla \vec E' \rangle$

$$\vec F \approx N \langle \vec p_i \rangle \cdot \langle \nabla \vec E \rangle = \vec P \cdot \nabla \vec E$$

$\vec E'$ – მიკროსკოპული ველი, $\vec E$ – გასაშუალოებული მიკროსკოპული ველი

$$\vec P = \varepsilon_0 \chi \vec E = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec E$$

$$\vec F_3 = (\varepsilon - \varepsilon_0)\, \vec E \cdot \nabla \vec E$$

a b c

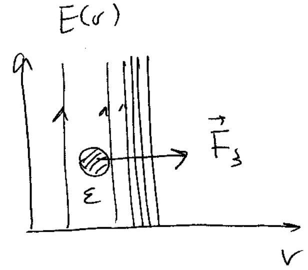
$$[\vec E \times [\vec\nabla \times \vec E]] = \nabla \cdot (\vec E \cdot \vec E) - \vec E \cdot (\vec\nabla \cdot \vec E)$$

$$E(\nabla \vec E) = \nabla E^2 - [\vec E \times [\nabla \times \vec E]]$$

სტატიკის ამოცანა: $\nabla \times \vec E = 0$

ე.ი. $\vec E (\nabla \vec E) = \nabla E^2$

$$\boxed{\vec F_3 = (\varepsilon - \varepsilon_0)\, \nabla E^2}$$



ვთქვათ $E(r) = \alpha r$

$$\frac{\partial E(r)}{\partial r} > 0$$

$$\vec F_3 = \alpha(\varepsilon - \varepsilon_0) > 0 \quad \Big| \quad \varepsilon > \varepsilon_0$$

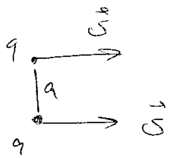
დიელექტრიკზე მოქმედების ძალა ხდება მიმართული ელ. ველის გრადიენტის მიმართულებით.

მაგნიტური ველის კანონზომიერებები

ლორენცის ძალა: $\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}]$

მოძრავი წერტილოვანი მუხტი:

$$\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q\vec{r}}{r^3} \\ \vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{q[\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3} \end{cases}$$



ორი წერტილოვანი მუხტის ურთიერთქმედება:

$$F_e = qE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{a^2}$$

$$F_m = qvB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2 v^2}{a^2}$$

$$\frac{F_m}{F_e} = \mu_0 \varepsilon_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2} \qquad \left(\mu_0 \varepsilon_0 \equiv \frac{1}{c^2}\right)$$ სინათლის სიჩქარე ვაკუუმში.

მაგნიტური ველი "რელატივისტური" მოვლენაა. $c \to \infty$, $F_m \to 0$.

შეკითხვა: რატომ ვაკვირდებით მაგნიტური ველის ეფექტს მუხტების არარელატივისტური ($v \ll c$) მოძრაობისას?

მაგნიტური ველის კანონზომიერებები (2)

მუხტის უწყვეტი განაწილება: ρ – მოცულობითი სიმკვრივე.

$dq = \rho\, dV$ მუხტი,

$\vec{j} = \rho \vec{v}$ მუხტის ნაკადი.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \rho \frac{[\vec{v} \times \vec{r}]}{r^3} dV$$ ბიო-სავარის კანონი.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j} \times \vec{r}]}{r^3} dV$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}$$

$$\vec{j}\, dV = I\, d\vec{l}$$
↓
წრფივი დენი

მაგნიტური ველის ცირკულაცია:

$$\oint_S \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{j}\, dS$$

დიფერენციალური ფორმა: $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

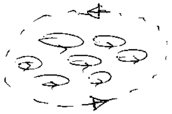
მაგნიტური ველის ნაკადი ჩაკეტილ ზედაპირზე:

$$\oint_V \vec{B}\, dS = 0$$ მაგნიტური მუხტი (მონოპოლი) არ არსებობს. ($q_B = 0$)

დიფ. ფორმა: $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

მაგნიტური ველი ნივთიერებაში

მოლეკულური დენები მაგნიტური მომენტის წყარო:



მოლეკულური დენი I'. $(\vec{j}\,')$

მაგნიტური ველი: გარე ველი + მოლეკულური ველი

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 (I + I')$$

$$\oint \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}'\right) d\vec{l} = I$$

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}' \equiv \vec{H}$$

$$\oint \vec{H}\, d\vec{l} = I$$

$\vec{J}' \sim \vec{B}$ – იზოტროპული მაგნეტი

$$\boxed{\vec{J}' = \chi \vec{H}}$$

χ – მაგნიტური ამთვისებლობა

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H} = \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H}$$

$\mu \equiv \mu_0 (1 + \chi)$ მაგნიტური შეღწევადობა

$\mu_r = \mu / \mu_0$ – ფარდობითი მაგნიტური შეღწევადობა

$\mu_r > 1$ – პარამაგნეტიკები

$\mu_r < 1$ – დიამაგნეტიკები

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\, \vec{H} = \vec{J} \\ \mathrm{div}\, \vec{H} = 0 \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases}$$

მაგნიტური ველი ნივთიერებაში (2)

$$\oint \vec{H}\, d\vec{l} = \vec{J}$$

$$\oint \vec{H}\, d\vec{s} = 0.$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

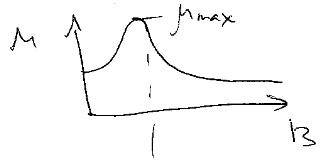
ანიზოტროპული გარემო:

$$\begin{cases} \varepsilon_{ijk} \dfrac{\partial}{\partial x_j} H_k = J_i \\ \dfrac{\partial H_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases}$$

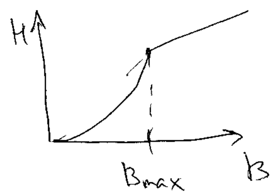
$$B_i = \mu_{ij} H_j \qquad \mu_{ij} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix}$$

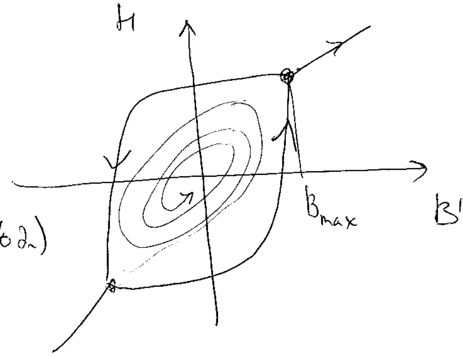
იზოტროპული ერთგვაროვანი გარემო: $\mu_{ij} = \begin{pmatrix} \mu & & 0 \\ & \mu & \\ 0 & & \mu \end{pmatrix}$.

$\vec{H} = \mu \vec{B}$ – μ-ცვლადია!

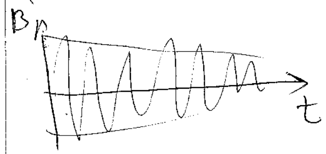


$\mu = \mu(B)$





ჰისტერეზისი: სიმეტრიის დარღვევა მეხსიერება. (ფერომაგნეტიკებში)



– განმაგნიტების გზა

ელექტრომაგნიტური ველი წყაროს გარეშე

$$\begin{cases}\vec D = \varepsilon \vec E \\ \vec B = \mu \vec H\end{cases} \qquad \begin{cases}\nabla \vec D = \rho \\ \nabla \vec B = 0\end{cases} \qquad \begin{aligned}[\nabla \times \vec E] &= -\frac{\partial \vec B}{\partial t} \\ [\nabla \times \vec H] &= \vec J + \frac{\partial \vec D}{\partial t}\end{aligned}$$

წყაროები: ელექტრული ველის: $\rho = 0$
მაგნიტური ველის: $\vec J = 0$

$$\begin{cases}\nabla \vec D = 0 \\ \nabla \vec B = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}\nabla \times \vec E = -\dfrac{\partial \vec B}{\partial t} \\ \nabla \times \vec H = \dfrac{\partial \vec D}{\partial t}\end{cases}$$

$\downarrow (\vec E, \vec B)$

ვთქვათ $\varepsilon, \mu = \text{const}$

$$\begin{cases}\nabla \vec E = 0 \\ \nabla \vec B = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}\nabla \times \vec E = -\dfrac{\partial \vec B}{\partial t} \\ \nabla \times \vec B = \varepsilon\mu \cdot \dfrac{\partial \vec E}{\partial t}\end{cases}$$

$$[\nabla \times [\nabla \times \vec E]] = -\nabla \times \frac{\partial \vec B}{\partial t}$$

$$\nabla(\overbrace{\nabla \vec E}^{0}) - \nabla^2 \vec E = -\frac{\partial}{\partial t}[\nabla \times \vec B] = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\mu \frac{\partial \vec E}{\partial t}\right) = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec E}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \vec E}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon\mu}\nabla^2 \vec E = 0$$

ვაკუუმში:

$$\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = c^2$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2\right)\begin{pmatrix}\vec E \\ \vec B\end{pmatrix} = 0$$

ელ. მაგ. ტალღის განტოლება

ელ. მაგ. ტალღა გარემოში.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu\varepsilon}\Delta\right)\begin{pmatrix}\vec E \\ \vec B\end{pmatrix} = 0 \qquad \bar c^2 = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\mu\varepsilon} c^2$$

$\bar c$ — სიჩქარე გარემოში. c — სიჩქარე ვაკუუმში

ან $$\boxed{\bar c^2 = \frac{1}{\mu_r \varepsilon_r}}$$ (ფარდობითი დიელ. და მაგ. შეღწევადობები)

ტალღის სპექტრული გაშლა სიხშირეებად (ფურიე გარდაქმნა)

$$\vec E(\vec r, t) = \int \tilde{\vec E}(\vec k, \omega)\, e^{i(\vec k \vec r - \omega t)}\, d^3\vec k\, d\omega$$

$$\frac{\partial \vec E}{\partial t} \to -i\omega \tilde{\vec E} \qquad \frac{\partial \vec E}{\partial \vec r} \to i\vec k \tilde{\vec E}$$

$$(-i\omega)^2 \tilde{\vec E} - \frac{1}{\mu\varepsilon}(i\vec k)^2 = 0$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{k^2}{\mu\varepsilon}}$$ — ელ. მაგ. ტალღის დისპერსია $\omega = \omega(k)$

$$\bar c = \frac{c}{n}$$

n — გარდატეხის მაჩვენებელი (გარემოში)

$n = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$ (იზოტროპული გარემო!)

ელ. მაგ. ტალღა ვაკუუმში (2)

$$[i\vec{k}\times\vec{B}] = \varepsilon\mu(-i\omega\vec{E})$$ (მაქსველის განტოლება სპექტრული ფორმით)

$$B = -\varepsilon\mu\frac{\omega}{k}E = \mp\frac{\mu\varepsilon}{\sqrt{\mu\varepsilon}}E = \mp\sqrt{\mu\varepsilon}\,E$$

$$W = \frac{1}{4}\left(\varepsilon E^2 + \frac{1}{\mu}B^2\right) = \frac{1}{4}\left(\varepsilon E_0^2 + \frac{\mu\varepsilon E_0^2}{\mu}\right) = \frac{\varepsilon E_0^2}{2}$$

ენერგიის ნაკადი (პოინტინგის ვექტორი)

$$\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{E}\times\vec{H}] = \frac{1}{2\mu}[\vec{E}\times\vec{B}] = \mp\frac{1}{2\mu}E_0\sqrt{\mu\varepsilon}\,E_0$$

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,E_0^2\,\frac{\vec{k}}{k}}$$

ელ. მაგ. ტალღები არაერთგვაროვან გარემოში

16-1

მაქსველის განტოლებები როდესაც $\rho=0$ და $\vec{J}=0$.

$$\begin{cases}[\nabla\times\vec{E}] = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\[2mm] [\nabla\times\vec{B}] = \varepsilon\mu\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases}$$

აქ გავითვალისწინეთ რომ: $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$, $\vec{B}=\mu\vec{H}$

მაქსველის განტოლებები ელექტრული და მაგნიტური ველების დაძაბულობისათვის.

$$\begin{cases}[\nabla\times\vec{E}] = -\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}\\[2mm] [\nabla\times\vec{H}] = \varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases}$$

განვიხილოთ არაერთგვაროვანი გარემო, სადაც: $\begin{cases}\mu=\text{const.}\\ \varepsilon\neq\text{const.}\end{cases}$

$$\varepsilon=\varepsilon(\vec{r})$$

ფურიე გაშლა დროით: $\vec{E} = \int\tilde{\vec{E}}(\omega,\vec{r})\exp(i\omega t)\,dt$

ან მოკლედ: $\vec{E}\sim\exp(i\omega t)$

მაშინ $\dfrac{\partial\vec{E}(t)}{\partial t}\sim i\omega\vec{E}(\omega)$

ასე მაქსველის განტოლებები ელ. მაგ. ველის დაძაბულობის სპექტრული ფორმით:

$$\begin{cases}[\nabla\times\vec{E}] = -i\omega\mu\vec{H}\\ [\nabla\times\vec{H}] = i\omega\varepsilon\vec{E}\end{cases}$$

გარდაქმნები:

$$\begin{cases} \vec{H} = -\dfrac{[\nabla\times\vec{E}]}{i\omega\mu} \\ \vec{E} = \dfrac{[\nabla\times\vec{H}]}{i\omega\varepsilon} \end{cases}$$

ჩვენ სისტემაში ხსნა:

$$[\nabla\times\vec{H}] = \left[\vec{\nabla}\times\left(+\frac{[\nabla\times\vec{H}]}{i\omega\varepsilon}\right)\right] = -i\omega\mu\vec{H}$$

$\omega = const$:
$$\left[\nabla\times\frac{[\nabla\times\vec{H}]}{\varepsilon}\right] = \omega^2\mu\vec{H}$$

$$-\frac{(\nabla\varepsilon)}{\varepsilon^2}[\nabla\times\vec{H}] + \frac{1}{\varepsilon}[\nabla\times[\nabla\times\vec{H}]] = \omega^2\mu\vec{H}$$

გავიხსენოთ:
$$[\overset{a}{\nabla}\times[\overset{b}{\nabla}\times\overset{c}{\vec{H}}]] = \vec{\nabla}\cdot(\nabla H) - \nabla^2\vec{H}$$

$$\nabla\vec{H} = 0 \quad (\text{რადგანაც } \nabla\vec{B} = 0)$$

$$-\frac{(\nabla\varepsilon)}{\varepsilon^2}[\nabla\times\vec{H}] - \frac{\nabla^2\vec{H}}{\varepsilon} = \omega^2\mu\vec{H}, \quad (\nabla^2 \equiv \Delta)$$

$$\boxed{\Delta\vec{H} + \frac{(\nabla\varepsilon)}{\varepsilon}\cdot[\nabla\times\vec{H}] + \mu\varepsilon\cdot\omega^2\vec{H} = 0}$$

ანალოგიური გამოყვანა $\vec{E}$ -სთვის:

$$\left[\nabla\times\left(-\frac{[\nabla\times\vec{E}]}{i\omega\mu}\right)\right] = +i\omega\varepsilon\vec{E} \qquad \omega, \mu = const$$

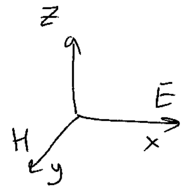
$$-[\nabla\times[\nabla\times\vec{E}]] = -\omega^2\mu\varepsilon\vec{E}$$

გავიხსენოთ, რომ რადგანაც $\rho = 0$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$.

ანუ $[\nabla\times[\nabla\times\vec{E}]] = -\Delta\vec{E}$

$$\boxed{\Delta\vec{E} + \mu\varepsilon\omega^2\vec{E} = 0}$$

ავიღოთ კოორდინატთა სისტემა,



z - ღერძის გასწვრივ მიმართულება.

რადგანაც ვიცით რომ $\vec{E}\perp\vec{H}$, დავუშვათ რომ $\left(\begin{matrix}\vec{E}\parallel\hat{e}_x, \\ \vec{H}\parallel\hat{e}_y\end{matrix}\right)$

ამ სისტემაში:
$$\vec{E} = (E, 0, 0)$$
$$\vec{H} = (0, H, 0)$$

$$\nabla\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}, \frac{\partial\varepsilon}{\partial y}, \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\right)$$ დავუშვათ $\boxed{\varepsilon = \varepsilon(z)}$

მაშინ: $\nabla\varepsilon = (0, 0, \varepsilon'(z))$, $\left(\varepsilon'(z) \equiv \dfrac{d\varepsilon(z)}{dz}\right)$

ჩავწეროთ მეორე განტოლების X მდგენელი

$$(\Delta\vec{E})_x + (\mu\varepsilon\omega^2\vec{E})_x = 0$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E + \mu\varepsilon\omega^2 E = 0}$$

მივიღებთ პირველი გამოყვანილი განტოლების y მდგენელი:

$$(\Delta\vec{H})_y + \left(\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}\cdot[\nabla\times\vec{H}]\right)_y + (\mu\varepsilon\omega^2\vec{H})_y = 0$$

11-4

$$\Delta H + \frac{\varepsilon'(z)}{\varepsilon}\frac{\partial H}{\partial z} + \mu\varepsilon\omega^2 H = 0$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) H + \frac{\varepsilon'(z)}{\varepsilon}\frac{\partial H}{\partial z} + \mu\varepsilon\omega^2 H = 0}$$

საცდელი ამოხ.: $\begin{cases} E \sim \exp(-i\varkappa x) \\ H \sim \exp(-i\varkappa y) \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial x} = -i\varkappa E \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} = -i\varkappa H \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d^2E}{dz^2} + \left(\mu\varepsilon\omega^2 - \varkappa^2\right)E = 0 \\ &\frac{d^2H}{dz^2} + \frac{\varepsilon'(z)}{\varepsilon}\frac{dH}{dz} + \left(\mu\varepsilon\omega^2 - \varkappa^2\right)H = 0 \end{aligned}}$$

სისტემა, რომელიც აღწერს ელ.მაგ. ტალღის განტოლებას გარემოში, სადაც $\mu = const$, $\varepsilon = \varepsilon(z)$.

დავალება:

გამოიყვანეთ ელ.მაგ. ტალღის განტოლებები გარემოში, სადაც:

1) $\varepsilon = \varepsilon(z)$, $\mu = \mu(z)$

2) $\varepsilon = \varepsilon(z)$, $\mu = \mu(x)$

11-5

ამოვხსნათ განტოლება ელექტრული კომპონენტისათვის:

$$\frac{d^2E}{dz^2} + \left(\mu\varepsilon\omega^2 - \varkappa^2\right)E = 0$$

$$\Omega^2 \equiv \mu\varepsilon\omega^2 - \varkappa^2, \quad \frac{d^2E}{dz^2} + \Omega^2 E = 0$$

WKB ამონახსნი: სამართლიანია, როდესაც $\left(\Omega'(z) \ll \Omega^2\right)$

ადიაბატური მიახლოება. (ელ.მაგ. ტალღ) = (გეომეტრიული ოპტიკის მიახლოება)

ამონახსნები: $E = \dfrac{A_e}{\sqrt{\Omega}} \exp\left(\pm i \int \Omega\, dz\right)$

1) $\Omega^2 > 0$ $\quad E = \mathrm{Re}\left(\dfrac{A_e}{\sqrt{\Omega}} \exp\left(\pm i \int \Omega\, dz\right)\right) \sim \begin{matrix}\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{matrix}$

ოსცილირებადი ამონახსნები.

2) $\Omega^2 < 0$ $\quad E \sim \exp(\pm\sigma z)$ $\quad \sigma = i\Omega$

წარმოსახვითი Ω: ექსპონენციალურად ზრდადი ან კლებადი ამონახსნი.

$$|E| = \left(\frac{A_e}{\sqrt{\Omega}}\right)^2,$$

ანუ ელ.მაგ. ტალღის მაქსიმუმი იცვლება ე.ი. ადიაბატური ინვარიანტი: I_A.

$$\boxed{I_A \equiv E \cdot \Omega}$$

ამოვხსნათ განტოლება მაგნიტური კომპონენტისათვის.

$$\frac{d^2H}{dz^2}+\frac{\varepsilon'(z)}{\varepsilon}\frac{dH}{dz}+\left(\mu\varepsilon\omega^2-\varkappa^2\right)H=0$$

შემოვიტანოთ ცვლადი, რომელიც გააქრობს პირველ წარმოებულს $\left(\frac{dH}{dz}\right)$

$$H\equiv\bar{H}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\int\frac{\varepsilon'(z)}{\varepsilon}dz\right)$$

მაშინ:

$$H'=\bar{H}'\cdot\exp-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon'(z)}{\varepsilon}\cdot\bar{H}\cdot\exp.$$

$$H''=\bar{H}''\cdot\exp-\frac{\varepsilon'(z)}{\varepsilon}\bar{H}'\cdot\exp-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon'(z)}{\varepsilon}\right)'\bar{H}\exp+$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon'(z)}{\varepsilon}\right)^2\bar{H}\exp;$$

ჩასმა:

$$\bar{H}''\exp-\cancel{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\bar{H}'\exp}-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon'(z)}{\varepsilon}\right)'\bar{H}\exp+\frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^2\bar{H}\exp+$$

$$+\frac{\varepsilon'(z)}{\varepsilon}\cdot\left(\cancel{\bar{H}'\exp}-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\bar{H}\exp\right)+\left[\mu\varepsilon\omega^2-\varkappa^2\right]\bar{H}\exp=0$$

exp- იკვეცება;

$$\bar{H}''+\left[\mu\varepsilon\omega^2-\varkappa^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)'-\frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^2\right]\bar{H}=0$$

გამოიყენეთ E კომპონენტის განტოლების ამოხსნისას მიღებული ფორმულები, მაგრამ ახალი აღნიშვნებით:

$$\begin{cases}\bar{H}=H\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\int\frac{\varepsilon'(z)}{\varepsilon}dz\right)\\ \bar{\Omega}^2\equiv\mu\varepsilon\omega^2-\varkappa^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)'-\frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^2=\Omega^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)'-\frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^2\end{cases}$$

$$\frac{d^2\bar{H}}{dz^2}+\bar{\Omega}^2\bar{H}=0$$

ამონახსნი WKB მიახლოებაში:

$$\bar{H}=\frac{A_m}{\sqrt{\bar{\Omega}}}\exp\left(\pm i\int\bar{\Omega}\,dz\right)$$

[illegible] მიახლოების კრიტერიუმი: $\underline{\bar{\Omega}^2>0}$

ანუ $\Omega^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)'-\frac{1}{4}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^2.$

დავალებები.

1. მოიძიეთ ზუსტი ამონახსნები ელექტრული E და მაგნიტური H ველის დამოკიდებულებისათვის, როდესაც
$$\varepsilon=\varepsilon_0\left(1+\frac{z}{z_0}\right)$$

2. დაადგინეთ (გამოთვალეთ) კავშირი ელექტრული და მაგნიტური კომპონენტების ამპლიტუდებს შორის: A_e, A_m

გამოიყენეთ მაქსველის განტ. ფარადეის კანონი:

$$-i\varkappa E=i\mu\omega H$$