ლექცია 1.

1.1 ვექტორული ოპერატორები მართკუთხა კოორდინატთა სისტემებში

ვექტორული ოპერატორი ნაბლა:

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \ .$$

გრადიენტი: ნაბლა მოქმედებს სკალარზე ϕ და ვიღებთ ვექტორს $\mathrm{grad}(\phi)$:

$$\mathrm{grad}(\phi) \equiv (\nabla\phi) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \ .$$

დივერგენცია: ნაბლას A ვექტორზე სკალარული ნამრავლი გვაძლევს სკალარს $\mathrm{div}(\mathbf{A})$:

$$\mathrm{div}(\mathbf{A}) \equiv (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \ .$$

როტორი: ნაბლას A ვექტორზე ვექტორული ნამრავლი გვაძლევს ვექტორს $\mathrm{rot}(\mathbf{A})$:

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A}) \equiv [\nabla \times \mathbf{A}] \ .$$

$$A_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \ ,$$

$$A_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \ ,$$

$$A_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \ ,$$

ლაპლასიანი:

$$\Delta \equiv (\nabla \cdot \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \ .$$

ზოგიერთი თვისება:

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}(\phi)) = \Delta(\phi) \ .$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\mathbf{A})) = 0 \ .$$

1.2 ვექტორული ოპერატორები არამართკუთხა კოორდინატთა სისტემებში

ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემა (r, φ, z):

$$x = r\cos(\varphi)\ , \quad y = r\sin(\varphi)\ , \quad z = z\ .$$

ვექტორული ოპერაციები ცილინდრულ კოორდინათა სისტემაში:

$$\mathrm{grad}(\phi) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\, , \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\, , \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\ .$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(A_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(A_z)\ .$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\ ,$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A})_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\ ,$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\ .$$

ლაპლასიანი:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\ .$$

სფერულ კოორდინატთა სისტემა (r, φ, θ):

$$x = r\cos(\varphi)\sin(\theta)\ , \quad y = r\sin(\varphi)\sin(\theta)\ , \quad z = r\cos(\theta)\ .$$

ვექტორული ოპერაციები სფერულ კოორდინათა სისტემაში:

$$\mathrm{grad}(\phi) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\, , \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\, , \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)\ .$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{A}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A_\varphi\right) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)A_\theta\right)\ .$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A})_r = \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin(\theta)A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\ ,$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A})_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\ ,$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)\ .$$

ლაპლასიანი:

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)\ .$$

1.3 ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები

მეორე რანგის ტენზორი C_{ik}:

$$C_{ik} = \left(\begin{array}{c} C_{11}, C_{12}, C_{13} \\ C_{21}, C_{22}, C_{23} \\ C_{31}, C_{32}, C_{33} \end{array} \right) .$$

სკალარი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ნულოვანი რანგის ტენზორი, ხოლო ვექტორი $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ როგორც პირველი რანგის ტენზორი A_i $(i = 1, 2, 3)$.

ორი ტენზორის გამრავლებისას განმეორებადი ინდექსი (ე.წ. მუნჯი ინდექსი) იჯამება.

$$A_i B_i \equiv \sum_{i=1}^{3} A_i B_i .$$

ამიტომაც მომავალში ყველგან:

$$A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 ,$$

სადაც, მაგალითად დეკარტის კოორდინატთა სისტემაში $A_1 = A_x$, $A_2 = A_y$ და $A_3 = A_z$.

კრონეკერის სიმბოლო δ_{ik}:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & : \quad i = k \\ 0 & : \quad i \neq k \end{cases}$$

ზოგიერთი თვისება:

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3 .$$

$$\delta_{ik} A_k = A_i .$$

სიმეტრიული ტენზორი: $a_{ik} = a_{ki}$. ანტისიმეტრიული ტენზორი: $a_{ik} = -a_{ki}$.

აბსოლუტურად ანტისიმეტრიული ერთეულოვანი ტენზორი ϵ_{ijk} (ლევი–ჩივიტას სიმბოლო):

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & : \quad (i = j),\ (i = k),\ (j = k) \\ 1 & : \quad (i, j, k) = (1, 2, 3),\ (3, 1, 2),\ (2, 1, 1) \\ -1 & : \quad (i, j, k) = (1, 3, 2),\ (3, 2, 1),\ (2, 1, 3) \end{cases}$$

გამოთვლის წესი: $\epsilon_{123} = 1$, ხოლო ნებისმიერი ორი ინდექსის გადასმისას ტენზორი იცვლის ნიშანს. მაგალითად $\epsilon_{123} = -\epsilon_{213}$.

ϵ_{ijk} ტენზორის ზოგიერთი თვისება:

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{ikl} = 6 ,$$

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{klm} = 2\delta_{ik} ,$$

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{lmn} = \delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km} ,$$

$$\delta_{ij} \epsilon_{ijk} = \delta_{jk} \epsilon_{ijk} = \delta_{ik} \epsilon_{ijk} = 0 .$$

ოპერაციები ვექტორებზე:

$$\alpha \mathbf{A} = \alpha A_i \ ,$$
$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = A_i B_i \ ,$$
$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \epsilon_{ijk} A_j B_k \ .$$

ვექტორული ოპერატორების ტენზორული ფორმა:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \ ,$$

$$\mathrm{grad}(\phi) = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \ ,$$
$$\mathrm{div}(\mathbf{A}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \ ,$$
$$\mathrm{rot}(\mathbf{A}) = \nabla \times \mathbf{A} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \ ,$$
$$\Delta \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} \ .$$

$\boxed{\text{მაგალითი 1.1.}}$ გამოითვალეთ div $(\alpha \mathbf{A})$.

$$\mathrm{div}\,(\alpha \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha A_i) = \alpha \frac{\partial A_i}{\partial x_i} + A_i \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = \alpha \mathrm{div}\,(\mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \mathrm{grad}\,(\alpha) \ .$$

$\boxed{\text{მაგალითი 1.2.}}$ გამოითვალეთ div $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$.

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_{ijk} A_j B_k = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} (A_j B_k) = \epsilon_{ijk} \left(A_j \frac{\partial}{\partial x_i} B_k + B_k \frac{\partial}{\partial x_i} A_j \right) =$$

$$= A_j \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} B_k + B_k \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} A_j = -A_j \epsilon_{jik} \frac{\partial}{\partial x_i} B_k + B_k \epsilon_{kij} \frac{\partial}{\partial x_i} A_j = -A_j \mathrm{rot}(\mathbf{B})_j + B_k \mathrm{rot}(\mathbf{A})_k =$$
$$= \mathbf{B} \cdot \mathrm{rot}(\mathbf{A}) - \mathbf{A} \mathrm{rot}(\mathbf{B}) \ .$$