

ГЛАВА V

МАГНЕТИКИ (НАМАГНИЧИВАЮЩИЕСЯ СРЕДЫ)

§ 60. Намагничение магнетиков. Молекулярные токи и токи проводимости

1. Подобно тому как внесение диэлектриков в поле свободных электрических зарядов (см. определение этого термина в § 21) вызывает изменение этого поля, обусловливающееся *поляризацией* диэлектрика, так и внесение магнетиков (например железа) в магнитное поле токов вызывает изменение этого поля, обусловливаемое *намагничиванием* магнетика. При этом *магнетиками* мы называем все способные намагничиваться тела¹⁾, т. е., иными словами, все тела, присутствие которых способно либо видоизменить, либо возбуждать магнитное поле. Однако, в то время как все диэлектрики деполяризуются одновременно с исчезновением внешнего электрического поля²⁾, лишь *большинство* магнетиков, намагничиваясь под воздействием внешнего магнитного поля, по исчезновении этого поля полностью размагничиваются (временное или *индукционное* намагничение пары и диамагнетиков).

Наряду с этим в отличие от диэлектриков существует класс магнетиков (так называемые *ферромагнетики*), способных оставаться намагниченными и после исчезновения внешнего поля (так называемое *постоянное* или *остаточное намагничение*), т. е. способных не только видоизменять своим присутствием магнитное поле токов, но и самостоятельно возбуждать магнитное

¹⁾ В сущности все материальные тела обладают в той или иной мере магнитными свойствами (правда, в большинстве случаев весьма слабо выраженными)

²⁾ См. § 21, с 104. Явление так называемой остаточной поляризации, имеющее место в некоторых диэлектриках, особенно в случае загрязнения их посторонними примесями, не имеет по своей физической природе ничего общего с остаточным магнетизмом ферромагнетиков. Оно связано с наличием токов утечки и поляризационных токов (несовершенные изоляторы), создающих перераспределение *свободных* электрических зарядов. Исключением являются пиро- и сегнетоэлектрики (см. § 29, с. 135), диэлектрические свойства которых в ряде отношений действительно аналогичны магнитным свойствам ферромагнетиков

поле независимо от наличия электрических токов (так называемые *постоянные магниты*)¹.

2. Поле намагниченных магнетиков, как и всякое магнитное поле, создается циркулирующими в магнетике электрическими токами².

Рассмотрим сначала магнетик, не проводящий электричества и построенный из нейтральных молекул (газы, жидкости) или из закрепленных в определенных положениях ионов (ионная кристаллическая решетка или аморфный твердый диэлектрик). Хотя *средняя* плотность тока в такой среде и равна нулю и переноса электрических зарядов на макроскопические расстояния в ней не происходит, однако внутри отдельных молекул или ионов имеет место движение электронов, соответствующее определенному распределению токов. Эти *токи* называются *молекулярными*; в ненамагниченных магнетиках они распределены совершенно хаотично, и магнитные поля их в среднем взаимно компенсируются. Намагниченный же магнетик характеризуется упорядоченностью молекулярных токов, благодаря которой результатирующее магнитное поле этих токов отлично от нуля.

В магнетиках, являющихся проводниками (металлы, электролиты и т. п.), нужно, очевидно, проводить различие между *токаами проводимости* $j_{\text{пр}}$, соответствующими движению зарядов, переносящих макроскопический ток (свободные электроны в металлах, ионы в электролитах и ионизированных газах), и токами молекулярными $j_{\text{мол}}$ в нейтральных молекулах электролитов, в закрепленных ионах, образующих твердый кристаллический остов металлов, и т. п.:

$$\mathbf{j}_{\text{микро}} = \mathbf{j}_{\text{пр}} + \mathbf{j}_{\text{мол}}, \quad (60.1)$$

где индекс «микро» означает истинную микроскопическую плотность тока в среде в отличие от средней макроскопической плотности \mathbf{j} .

Мы будем придерживаться этого разделения токов на два класса, хотя оно и не всегда может быть проведено однознач-

¹⁾ Способность ферромагнетиков сохранять остаточное намагничение существенно зависит от их микроскопической неоднородности (остаточные упругие напряжения, поликристаллическая структура, химические загрязнения) и почти отсутствует, например, в ферромагнитных монокристаллах, лишенных внутренних напряжений. Поэтому, строго говоря, основной характеристикой ферромагнетиков является не остаточный магнетизм (гистерезис), а нелинейный характер зависимости намагничения от напряженности магнитного поля (о котором подробнее см. в § 72 и 108), проявляющейся даже в очень слабых полях и усугубляющейся при повышении микроскопической неоднородности ферромагнетика.

²⁾ Спиновый магнитный момент электрона также может быть сведен к действию соответствующих электрических токов (см. конец этого параграфа)

но¹⁾, ибо это разделение весьма упрощает вывод макроскопических уравнений поля из представленной электронной теории²⁾. Для наших целей достаточно допустить, что в отличие от токов проводимости молекулярные токи замыкаются внутри микроскопически малых пространственных объемов.

3. Для построения теории магнетиков нужно прежде всего найти удобную количественную характеристику распределения молекулярных токов в среде. Такой характеристикой не может служить среднее по физически бесконечно малому объему значение плотности молекулярных токов $\mathbf{j}_{\text{мол}}$. Действительно, среднее значение тока, взятое по всему объему системы замкнутых токов, равно нулю³⁾, хотя магнитный момент и магнитное поле такой системы вовсе не обязаны равняться нулю. В частности, векторная сумма токов, протекающих в любой молекуле, всегда равна нулю.

В § 56 и 57 мы убедились, что система замкнутых токов при условии достаточной малости ее размеров однозначно характеризуется ее магнитным моментом

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{Rj}] dV.$$

Очевидно, что и распределение молекулярных токов нужно характеризовать их магнитным моментом. Подобно тому как мерой поляризации диэлектрика служит вектор поляризации \mathbf{P} , равный электрическому моменту единицы его объема, так мерой намагничения магнетика служит вектор *намагничения* \mathbf{I} , равный магнитному моменту молекулярных токов, рассчитанному на единицу объема магнетика:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{Rj}_{\text{мол}}] dV, \quad (60.2)$$

где интегрирование распространено на единицу объема магнетика. Как уже отмечалось в § 57, значение этого интеграла при условии замкнутости системы токов не зависит от выбора начала отсчета радиусов-векторов \mathbf{R} .

Если магнетик состоит из отдельных молекул (например, газообразные магнетики), то его намагничение \mathbf{I} может быть так

¹⁾ Так, например, токи, создаваемые свободными электронами в металлах, не могут быть, вообще говоря, целиком причислены к токам проводимости, ибо, например, намагничение диамагнитных металлов обусловливается главным образом упорядоченным движением свободных электронов, не связанным с переносом макроскопического тока.

²⁾ Конечно, справедливость макроскопических уравнений поля может быть обоснована и без специальных допущений подобного рода (см. конец § 91).

³⁾ Ибо по доказанному в § 57 из (57.7) следует (57.6).

же определено, как векторная сумма магнитных моментов молекул, находящихся в единице его объема:

$$\mathbf{I} = \sum \mathbf{M}, \quad (60.3)$$

где \mathbf{M} означает момент отдельной молекулы магнетика. Легко сообразить, что в магнетиках, построенных из отдельных молекул, уравнение (60.3) эквивалентно уравнению (60.2).

Наконец, если намагничение магнетика непостоянно по его объему, то вектор намагничения \mathbf{I} можно определить как среднюю (по физически бесконечно малому объему ΔV) плотность магнитного момента молекулярных токов:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2c} [\mathbf{Rj}_{\text{мол}}] = \frac{1}{2c\Delta V} \int_{\Delta V} [\mathbf{Rj}_{\text{мол}}] dV. \quad (60.4)$$

По аналогии с электрической поляризацией \mathbf{P} намагничение \mathbf{I} можно также называть *магнитной поляризацией*.

4. Построение теории магнетиков на основе рассмотрения постоянных замкнутых молекулярных токов может вызвать двоякого рода сомнения.

Во-первых, с точки зрения элементарных представлений о строении атома движение электронов внутри атомов и молекул не вполне эквивалентно *постоянным* токам, ибо поле электронов не постоянно во времени, а изменяется периодически, соответственно периоду обращения электрона по его орбите (вокруг ядра атома или по сложной орбите внутри молекулы и т. п.).

С точки зрения боровской теории атома это затруднение устранилось тем, что период обращения электронов по орбитам чрезвычайно мал и сравним с периодом световых колебаний (10^{-14} — 10^{-15} с), так что при макроскопических наблюдениях мы воспринимаем лишь среднее по времени значение этого поля. Поэтому при построении макроскопической теории мы вправе заменить движущийся внутри атома электрон постоянным замкнутым током («молекулярный ток»), постоянное поле которого тождественно со средним за время одного периода значением поля электрона.

Однако современная квантовая механика вовсе устранила это затруднение, показав, что наглядное представление о движении электрона в атоме по определенным орбитам является лишь первым, весьма грубым приближением к действительности и что магнитное поле атомов, находящихся в стационарном состоянии, постоянно во времени и может быть сведено к полю постоянных замкнутых токов, распределенных внутри атома или молекулы с определенной плотностью j .

Во-вторых, сомнение может вызвать то обстоятельство, что магнитные свойства атомов и молекул обусловливаются не толь-

ко движением электронов в них, но и *спином* электронов. Действительно, магнитный спиновый момент электронов часто уподобляется магнитному диполю. Однако, как уже указывалось в § 58, согласно квантовой механике, магнитное поле, возбуждаемое спиновым магнитным моментом электрона, тоже может быть сведено к полю электрических токов, распределенных определенным образом в пространстве.

Во всяком случае, магнитное поле, возбуждаемое спином, как и всякое поле токов, является полем вихревым и должно описываться векторным потенциалом \mathbf{A} , а не скалярным потенциалом ψ (см. § 71).

Таким образом, вполне оправдано утверждение, что магнитные свойства магнетиков обусловливаются молекулярными токами. Однако для некоторых целей весьма удобно рассматривать намагничение I магнетиков как слагающееся, во-первых, из магнитных моментов токов, соответствующих поступательному (орбитальному) движению электронов, и, во-вторых, из дипольных спиновых магнитных моментов электронов. Такое разделение ничего не меняет в рассуждениях последующих параграфов, посвященных выводу общих уравнений магнитного поля в магнетиках, но оказывается полезным при рассмотрении гиromагнитных эффектов (§ 71) и механизма намагничения ферромагнетиков (§ 72).

§ 61. Векторный потенциал магнитного поля при наличии магнетиков. Средняя плотность объемных и поверхностных молекулярных токов

1. Разложив, согласно (60.1), полную плотность $\mathbf{j}_{\text{микро}}$ в произвольной среде на плотность токов проводимости $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ и плотность токов молекулярных $\mathbf{j}_{\text{мол}}$, мы получаем следующее выражение для вектор-потенциала магнитного поля:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{\text{микро}} dV}{R} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{\text{пр}} dV}{R} + \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{\text{мол}} dV}{R}.$$

Вводя обозначения \mathbf{A}_0 и \mathbf{A}' для векторных потенциалов токов проводимости и токов молекулярных

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{\text{пр}} dV}{R} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}' = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}_{\text{мол}} dV}{R}, \quad (61.1)$$

можно написать

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}'. \quad (61.2)$$

В эти выражения входят истинные микроскопические плотности токов, тогда как в макроскопической теории мы должны оперировать средними значениями микроскопических величин и должны, следовательно, соответственно преобразовать выражения (61.1).

Среднее значение $\bar{j}_{\text{пр}}$ по физически бесконечно малому объему есть, очевидно, та плотность токов j , с которой только и оперирует макроскопическая теория, не вводящая явно в рассмотрение молекулярных токов:

$$\mathbf{j} = \bar{\mathbf{j}}_{\text{пр}}. \quad (61.3)$$

Таким образом, в макроскопической теории мы можем в выражении для \mathbf{A}_0 попросту заменить $\bar{j}_{\text{пр}}$ на j :

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j} dV}{R}. \quad (61.4)$$

Соответственно этому для определения среднего значения вектор-потенциала молекулярных токов \mathbf{A}' нужно выразить среднее значение плотности молекулярных токов $\bar{j}_{\text{мол}}$ через величины, с которыми оперирует макроскопическая теория, а именно через намагничение. Проще, однако, следующим образом непосредственно вычислить среднее значение вектора \mathbf{A}' .

Векторный потенциал системы замкнутых токов при условии достаточной малости ее пространственных размеров равен, согласно (57.8), $\frac{[\mathbf{MR}]}{R^3}$, где \mathbf{M} есть магнитный момент системы.

С другой стороны, магнитный момент элемента объема dV магнетика, характеризующий циркулирующие в нем молекулярные токи, согласно (60.2) и (60.4), равен $\mathbf{I} dV^{-1}$. Поэтому векторный потенциал поля, возбуждаемого элементом объема dV магнетика, равен

$$\frac{[\mathbf{IR}]}{R^3} dV,$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор, проведенный из элемента объема dV в ту «точку наблюдения», в которой определяется значение вектор-потенциала.

Наконец, векторный потенциал \mathbf{A}' всей совокупности молекулярных токов, циркулирующих во всех элементах магнетика, определится интегралом

$$\mathbf{A}' = \int \frac{[\mathbf{IR}]}{R^3} dV, \quad (61.5)$$

который, очевидно, можно распространить на все бесконечное пространство (ибо вне магнетиков $\mathbf{I} = 0$). Таким образом, векторный потенциал \mathbf{A}' поля молекулярных токов полностью определяется намагничением среды \mathbf{I} .

¹⁾ Заметим, что вектор намагничения \mathbf{I} является величиной *макроскопической*, ибо он равен, согласно (60.4), *средней* плотности магнитного момента в физически бесконечно малом объеме.

2. Целесообразно несколько преобразовать последнее выражение. Согласно уравнениям (43₃^{*}) и (10^{*})

$$\operatorname{rot}_q \left(\frac{1}{R} \mathbf{I} \right) = \left[\nabla_q \frac{1}{R} \cdot \mathbf{I} \right] + \frac{1}{R} \operatorname{rot} \mathbf{I} = \frac{[\mathbf{R}\mathbf{I}]}{R^3} + \frac{1}{R} \operatorname{rot} \mathbf{I}^1)$$

и, следовательно, последнее уравнение может быть записано так:

$$\mathbf{A}' = \int \frac{\operatorname{rot} \mathbf{I}}{R} dV - \int \operatorname{rot}_q \left(\frac{1}{R} \mathbf{I} \right) dV.$$

Последний интеграл может быть преобразован с помощью соотношения векторного анализа (56^{*}) в интеграл по поверхности S , охватывающей объем интегрирования V ²):

$$\int_V \operatorname{rot}_q \left(\frac{1}{R} \mathbf{I} \right) dV = \oint_S \frac{[\mathbf{n}\mathbf{I}]}{R} dS.$$

Если в поле нет поверхностей разрыва вектора намагничения \mathbf{I} , то последний интеграл может быть взят по бесконечно удаленной поверхности, охватывающей *полное поле*, и обращается при этом в нуль (если намагничение \mathbf{I} исчезает в бесконечности быстрее, чем $1/R$).

В противном же случае поверхностный интеграл придется, как обычно, распространить еще на поверхность S'_1 , выделяющую из объема интегрирования V поверхность S_1 разрыва вектора I .

Стягивая поверхность S'_1 вплоть до совпадения с поверхностью разрыва S_1 и повторяя с незначительными изменениями рассуждения, приведенные нами в § 12, убедимся, что

$$\lim_{S'_1} \oint \frac{[\mathbf{n}\mathbf{I}]}{R} dS = \int_{S_1} \frac{[\mathbf{n}_1\mathbf{I}_1] + [\mathbf{n}_2\mathbf{I}_2]}{R} dS = - \int_{S_1} \frac{[\mathbf{N}(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1)]}{R} dS,$$

где \mathbf{I}_1 и \mathbf{I}_2 — значения \mathbf{I} по обеим сторонам поверхности разрыва, а \mathbf{N} — нормаль к этой поверхности, направленная от 1 к 2. Обозначая эту нормаль через \mathbf{n} , получим

$$\mathbf{A}' = \int \frac{\operatorname{rot} \mathbf{I}}{R} dV + \int \frac{[\mathbf{N}(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1)]}{R} dS. \quad (61.6)$$

¹⁾ Индекс q в выражении $\operatorname{rot}_q \mathbf{I}$ можно опустить, не опасаясь недоразумений, ибо вектор \mathbf{I} является функцией одной лишь точки истока радиуса-вектора \mathbf{R} .

²⁾ Преобразование это можно непосредственно применить к нашему интегралу потому, что при образовании пространственных производных мы дифференцируем R и \mathbf{I} по координатам точки истока вектора \mathbf{R} , совпадающей с элементом объема интегрирования dV (см. примечание к § 21, с. 103).

Таким образом, полный векторный потенциал $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}'$ магнитного поля в произвольной среде выражается в микроскопической теории через макроскопическую плотность токов \mathbf{j} и через вектор \mathbf{I} , характеризующий намагничение среды:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}}{R} dV + \int \frac{\operatorname{rot} \mathbf{I}}{R} dV + \int \frac{[\mathbf{N}(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1)]}{R} dS. \quad (61.7)$$

3. Сравним макроскопическое выражение (61.6) для векторного потенциала \mathbf{A}' молекулярных токов с тем, которое получается из микроскопического выражения (61.1) для \mathbf{A}' путем непосредственного усреднения его, т.е. путем замены в (61.1) микроскопической плотности $\mathbf{j}_{\text{мол}}$ средним ее значением $\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}}$ по физически бесконечно малому объему:

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{c} \int \frac{\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}} dV}{R}. \quad (61.8)$$

Сравнение это показывает, во-первых, что средняя плотность объемных молекулярных токов $\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}}$ следующим образом связана с намагничением среды:

$$\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}} = c \operatorname{rot} \mathbf{I}; \quad (61.9)$$

во-вторых, из этого сравнения следует, что допущение существования поверхностей разрыва вектора намагничения эквивалентно допущению существования наряду с объемными также и *поверхностных молекулярных токов*, средняя плотность которых пропорциональна поверхностному ротору \mathbf{I} :

$$\bar{\mathbf{i}}_{\text{мол}} = c \operatorname{Rot} \mathbf{I} = c [\mathbf{n}(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1)]. \quad (61.10)$$

Действительно, при этом допущении выражение (61.8) нужно дополнить членом, учитывающим поверхностные токи:

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{c} \int \frac{\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}} dV}{R} + \frac{1}{c} \int \frac{\bar{\mathbf{i}}_{\text{мол}} dS}{R},$$

в результате чего это выражение на основании (61.9) и (61.10) становится эквивалентным (61.6).

Конечно, само допущение о возможности существования поверхностей разрыва физических величин и поверхностных токов характерно для макроскопической трактовки поля и совершенно чуждо микроскопической теории.

Выражение (61.9) для средней плотности молекулярных токов, как и следовало ожидать, удовлетворяет условию замкнутости токов, ибо, согласно (42₂^{*}):

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}} = c \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{I} = 0.$$

Далее, выражение для средней поверхностной плотности молекулярных токов совпадает с тем, которое может быть получено из выражения их объемной плотности путем предельного перехода типа (49.7).

Заметим, что в равномерно намагниченных средах ($\mathbf{I} = \text{const}$) средняя плотность молекулярных токов, согласно уравнению (61.9), равна нулю¹⁾. Действительно, если смежные элементы объема среды намагниченны совершенно одинаково, то в ней нигде не может иметь место преобладание токов какого-либо одного определенного направления. На границе же намагниченных магнетиков и вакуума, согласно уравнению (61.10), имеются поверхностные токи плотности $i = \pm c[\mathbf{n}\mathbf{I}]$, ибо в вакууме $\mathbf{I} = 0$.

Уравнения (61.9) и (61.10), устанавливающие связь между распределением молекулярных токов и пространственными производными вектора намагничения (а также скачком его касательных слагающих на поверхностях разрыва), получены были нами довольно окольным путем. Было бы желательно получить их непосредственно из основного уравнения (60.2), определяющего вектор намагничения \mathbf{I} и выражающего значение \mathbf{I} через $\mathbf{j}_{\text{мол}}$. В § 67 мы проведем соответствующие вычисления при некоторых упрощающих предположениях.

4. В качестве примера рассмотрим цилиндрический магнит, равномерно намагниченный по всему объему параллельно своей оси. Средняя плотность объемных молекулярных токов всюду будет равна нулю, ибо при $\mathbf{I} = \text{const}$ имеем $\text{rot } \mathbf{I} = 0$. На основаниях цилиндра поверхностных молекулярных токов также не будет, ибо нормаль к этим основаниям параллельна \mathbf{I} . Нормаль же к боковой поверхности цилиндра перпендикулярна к \mathbf{I} и поэтому плотность поверхностных молекулярных токов на боковой поверхности цилиндра будет отлична от нуля и будет численно равняться

$$i_{\text{мол}} = cI \quad (61.11)$$

(в формуле (61.10) полагаем $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}$, $\mathbf{I}_2 = 0$, ибо вне магнита $\mathbf{I} = 0$).

Эти замкнутые круговые поверхностные токи составляют правовинтовую систему с направлением намагничения \mathbf{I} .

Таким образом, с точки зрения электронной теории, магнит эквивалентен цилиндрическому соленоидальному току (см. § 49). При этом из сравнения уравнения (61.11) с уравнением (49.14) следует, что сила тока J в соленоиде, эквивалентном данному магниту, может быть определена из равенства

$$i = nJ = cI, \quad (61.12)$$

¹⁾ Подобно тому как равна нулю средняя плотность связанных зарядов в равномерно поляризованном диэлектрике.

где n — число витков соленоида на единицу его длины. Происхождение поверхностных токов на границе магнетика и вакуума может быть пояснено путем весьма простых рассуждений. Весьма схематически рис. 63 изображает собой поперечный

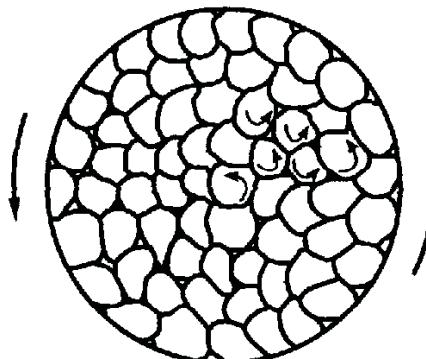


Рис. 63

разрез магнита. Совокупность молекулярных токов внутри магнита может быть схематически представлена как совокупность токов одинаковой силы, обтекающих каждую ячейку (молекулу) магнита в одинаковом направлении, например против часовой стрелки. Внутри магнита токи смежных молекул взаимно компенсируются, на поверхности же магнита они складываются в круговой ток, обтекающий магнит по окружности¹⁾.

Чтобы уточнить это рассуждение в количественном отношении, рассмотрим тонкий слой магнита, заключенный между двумя плоскостями, перпендикулярными к его оси. Если высота этого слоя равна l , сечение S , объем $V = lS$, а сумма магнитных моментов молекул, в нем находящихся, равна $\sum \mathbf{M}$, то

$$\mathbf{I} = \frac{1}{V} \sum \mathbf{M}.$$

Выражая с помощью уравнения (56.2) магнитный момент каждой молекулы через силу и площадь соответствующего молекулярного тока, получаем

$$\mathbf{I} = \frac{1}{cV} J \sum \mathbf{S},$$

где нами для простоты предположено, что все молекулярные токи линейны и силы их одинаковы. Магнитный момент молекул не изменится, если мы так изменим силу тока J и площадь молекулярных токов, чтобы их произведение осталось постоянным. Подберем эти величины в соответствии с рис. 63 так, чтобы смежные молекулярные токи непосредственно прилегали друг к другу. Тогда $\sum \mathbf{S}$ будет численно равна площади сечения магнита S и

$$I = \frac{JS}{cV} = \frac{JS}{cSl} = \frac{1}{c} \frac{J}{l}.$$

Отношение силы тока J , протекающего по поверхности рассматриваемого слоя, к высоте этого слоя l равно по определению поверхностной плотности тока i . Таким образом, последнее уравнение совпадает с уравнениями (61.11) и (62.12).

¹⁾ Вопрос об отличии поля внутри магнита от поля внутри эквивалентного соленоида будет рассмотрен в § 74.

§ 62. Дифференциальные уравнения макроскопического магнитного поля в магнетиках. Напряженность магнитного поля в магнетиках и вектор магнитной индукции

1. В этом параграфе мы поставим себе задачу путем усреднения уравнений истинного микроскопического поля вывести уравнения для средних *макроскопических* значений, характеризующих поле величин \mathbf{H} и \mathbf{j} . При этом мы будем исходить из предположения, что для истинного микроскопического поля строго справедливы основные уравнения магнитного поля постоянных токов (47.1) и (47.3):

$$\operatorname{div} \mathbf{H}_{\text{микро}} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}_{\text{микро}} = \frac{4\pi \mathbf{j}_{\text{микро}}}{c},$$

если под $\mathbf{j}_{\text{микро}}$ понимать точно «микроскопическое» значение плотности тока в данной точке поля. Задача же наша будет состоять в установлении уравнений, определяющих среднее макроскопическое значение вектора $\mathbf{H}_{\text{микро}}$ в физически бесконечно малом объеме (см. § 25), которое мы обозначим через $\bar{\mathbf{H}}_{\text{микро}}$. Так как, согласно уравнению (25.2), среднее значение производных по координатам равно производным от среднего значения дифференцируемой величины, то из микроскопических уравнений поля следует:

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{H}}_{\text{микро}} = 0, \tag{62.1}$$

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}}_{\text{микро}} = \frac{4\pi \bar{\mathbf{j}}_{\text{микро}}}{c}. \tag{62.2}$$

Плотность токов в произвольной среде слагается, согласно (60.1), из токов проводимости и токов молекулярных. Среднее значение $\mathbf{j}_{\text{пр}}$ представляет собой, согласно (61.3), обычную плотность \mathbf{j} макроскопического тока в проводниках, тогда как среднее значение $\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}}$ выражается, согласно (61.9), через ротор намагничения. Таким образом,

$$\bar{\mathbf{j}}_{\text{микро}} = \bar{\mathbf{j}}_{\text{пр}} + \bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}} = \mathbf{j} + c \operatorname{rot} \mathbf{I}. \tag{62.3}$$

Внося это в (62.2), получаем

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}}_{\text{микро}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{I}. \tag{62.4}$$

Уравнения (62.1) и (62.4) являются основными дифференциальными уравнениями магнитного поля в произвольной магнитной среде.

2. Напряженность макроскопического электрического поля по определению равна средней напряженности $\mathbf{E}_{\text{микро}}$ микроскопического поля (см. § 26). Было бы совершенно естественно аналогичным образом определить напряженность макроскопического магнитного поля.

Однако исторически укоренилось иное определение, явившееся совершенно естественным с точки зрения представления о существовании магнитных зарядов в молекулах (см. § 73); а именно, напряженность макроскопического поля в магнетиках, которую мы в дальнейшем будем просто обозначать буквой **H**, определяется следующим соотношением:

$$\mathbf{H} = \bar{\mathbf{H}}_{\text{микро}} - 4\pi\mathbf{I}. \quad (62.5)$$

Среднее же значение напряженности микроскопического поля носит название вектора *магнитной индукции* и обозначается буквой **B**:

$$\mathbf{B} = \bar{\mathbf{H}}_{\text{микро}}. \quad (62.6)$$

Уравнение (62.4) может быть записано следующим образом:

$$\text{rot}(\bar{\mathbf{H}}_{\text{микро}} - 4\pi\mathbf{I}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$

так что в новых обозначениях оно принимает вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad (62.7)$$

а уравнения (62.1) и (62.5) принимают вид

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (62.8)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I}. \quad (62.9)$$

Уравнения (62.7)–(62.9) представляют собой систему основных дифференциальных уравнений поля, которые должны быть дополнены лишь уравнениями, устанавливающими связь между намагничением **I** и напряженностью **H**. Связь этих величин будет рассмотрена нами в следующем параграфе. В случае отсутствия намагниченных сред **I** = 0; **H** и **B** совпадают между собой, и уравнения (62.7) и (62.8) совпадают с ранее выведенными уравнениями магнитного поля в вакууме (47.1) и (47.3).

Во всем дальнейшем, если не будет оговорено противное, мы под напряженностью магнитного поля **H** будем понимать вектор, определяемый соотношением (62.5) и удовлетворяющий уравнениям (62.7) и (62.9).

При формальном сравнении уравнений электрического и магнитного полей

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P},$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I}$$

создается впечатление о сходстве величин **E** и **H**, с одной стороны, и **D** и **B** — с другой, тогда как по существу, как только что указывалось, аналогом напряженности макроскопического электрического поля **E** является магнитная индукция **B** (равная

средней напряженности микроскопического магнитного поля), а аналогом электрической индукции \mathbf{D} — напряженность макроскопического магнитного поля \mathbf{H} ¹⁾. Это сказывается, например, в том, что, как мы убедимся в § 65, силы, испытываемые электрическими токами, определяются магнитной индукцией \mathbf{B} , тогда как силы, испытываемые электрическими зарядами, определяются электрической напряженностью \mathbf{E} .

3. Заметим в заключение, что в укоренившихся обозначениях уравнение $\mathbf{H}_{\text{микро}} = \text{rot } \mathbf{A}$ [ср. уравнение (46.2)], дающее возможность свести определение напряженности поля к вычислению вектор-потенциала, записывается следующим образом:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (62.10)$$

где под \mathbf{A} нужно понимать, конечно, среднее макроскопическое значение вектор-потенциала. Уравнение (62.8) можно рассматривать как прямое следствие уравнения (62.10). Вектор же напряженности макроскопического поля \mathbf{H} , вообще говоря, не является соленоидальным и поэтому не может выражаться ротором вспомогательного вектор-потенциала.

Наконец, дифференциальное уравнение для макроскопического значения векторного потенциала

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}_{\text{микро}} = -\frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + c \text{rot} \mathbf{I}) \quad (62.11)$$

может быть получено либо усреднением уравнения (46.5), либо же непосредственно из (61.7) таким же путем, как в § 46 уравнение (46.5) было получено из (46.1).

4. Что касается *пограничных условий* для магнитного поля, то они непосредственно вытекают из дифференциальных уравнений поля путем предельного перехода от случая тонких слоев конечной толщины, в которых объемные токи \mathbf{j} и намагничение \mathbf{I} остаются конечными и непрерывными, к предельному случаю бесконечно тонких поверхностей разрыва.

Так, согласно уравнению (6.8), мы получаем из уравнения (62.8) следующее уравнение для нормальных слагающих вектора магнитной индукции \mathbf{B} :

$$\text{Div } \mathbf{B} = B_{2n} - B_{1n} = 0, \quad (62.12)$$

являющееся обобщением уравнения (49.1) на случай наличия магнетиков. Что же касается напряженности поля \mathbf{H} , то дифференциальное уравнение для этого вектора сохраняет в магнитных средах тот же вид [уравнение (62.7)], что и в вакууме

¹⁾ Это обстоятельство проявляется, в частности, в том, что при четырехмерной формулировке уравнений электромагнитного поля в теории относительности оказывается необходимым объединить, с одной стороны, векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} и, с другой стороны, \mathbf{H} и \mathbf{D} попарно в два четырехмерных тензора 2-го ранга.

[уравнение (47.3)], и, стало быть, приводит к тому же граничному условию для его касательных слагающих [ср. уравнения (49.3) и (49.6)]:

$$\text{Rot } \mathbf{H} = [\mathbf{n}(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}. \quad (62.13)$$

При отсутствии поверхностных токов ($\mathbf{i} = 0$) это уравнение может быть записано также в следующей форме [ср. уравнение (49.5)]:

$$H_{2t} = H_{1t}. \quad (62.14)$$

§ 63. Зависимость намагничения от напряженности магнитного поля. Пара-, диа- и ферромагнетики

1. Для того чтобы система уравнений поля, выведенная в предыдущем параграфе, стала полной, ее необходимо дополнить определенным соотношением, связывающим намагничение среды \mathbf{I} и напряженность магнитного поля \mathbf{H} . Поляризация диэлектриков \mathbf{P} пропорциональна напряженности \mathbf{E} электрического поля в них [уравнение (21.7)]; магнетики же по характеру зависимости их намагничения \mathbf{I} от напряженности магнитного поля \mathbf{H} могут быть подразделены на три различных класса.

В так называемых парамагнетиках и диамагнетиках \mathbf{I} пропорционально \mathbf{H} ¹⁾:

$$\mathbf{I} = \mu \mathbf{H}. \quad (63.1)$$

Значение коэффициента пропорциональности μ , носящего название (объемной) *магнитной восприимчивости* и вполне аналогичного коэффициенту α поляризуемости диэлектрика²⁾, зависит от физико-химических свойств данного магнетика. Восприимчивость μ *парамагнитных тел* имеет (как и поляризуемость диэлектриков) *положительное* значение, т. е. направление намагничения \mathbf{I} совпадает с направлением поля \mathbf{H} . *Диамагнетики* же отличаются тем, что их магнитная восприимчивость μ *отрицательна*, т. е. направление намагничения диамагнетиков *противоположно* направлению намагничающего их поля \mathbf{H} . Объяснение этого, кажущегося парадоксальным, свойства диамагнетиков будет дано в дальнейшем.

¹⁾ В анизотропных (кристаллических) диа- и парамагнетиках, которые мы в этой книге рассматривать не будем, связь слагающих вектора намагничения \mathbf{I} со слагающими вектора \mathbf{H} остается линейной, но векторы \mathbf{I} и \mathbf{H} , вообще говоря, не совпадают по направлению, и уравнение (63.1) должно быть заменено более сложным соотношением, аналогичным уравнению (21.8).

²⁾ В конце этого параграфа будет показано, что поляризуемости диэлектриков α , строго говоря, соответствует не восприимчивость μ , а величина

$$\frac{\mu}{1 + 4\pi\mu} = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (\text{см. (63.4)}).$$

Наконец, намагничение **I** третьего класса магнетиков, названных *ферромагнетиками* по латинскому названию важнейшего их представителя — железа (*ferrum*), не только не пропорционально напряженности поля **H**, но, вообще говоря, вовсе не связано с ним сколько-нибудь простой функциональной зависимостью. Так, например, в ферромагнетиках наблюдается явление так называемого *гистерезиса*, т. е. зависимости намагничения от предшествующей истории данного образца ферромагнитного вещества. Это значит, что величина намагничения **I** ферромагнетика зависит не только от напряженности **H** магнитного поля в нем, но также и от того, находился ли ранее данный образец ферромагнетика в магнитном поле, каковы были числовая величина и направление напряженности этого поля и т. д. Тесно связан с гистерезисом и *остаточный*, или «*постоянный*», *магнетизм* ферромагнетиков, заключающийся, как уже упоминалось, в том, что после исчезновения внешнего намагничающего поля ферромагнетики могут сохранять состояние намагничения и благодаря этому продолжают возбуждать «собственное» магнитное поле (постоянные магниты).

Таким образом, хотя и можно формально определить магнитную восприимчивость χ ферромагнетиков как отношение намагничения **I** к напряженности поля **H** [уравнение (63.1)], однако в ферромагнетиках (в отличие от диа- и парамагнетиков) этот коэффициент не является материальной константой, зависящей лишь от химического состава тела, его температуры и других физических условий. Огромное количество экспериментальных исследований посвящено определению весьма сложной зависимости χ от напряженности поля **H**, от предшествующей истории данного образца ферромагнитного вещества и т. д. В качестве примера укажем, что восприимчивость χ мягкого железа при нарастании поля возрастает с 5–10 единиц до нескольких сотен (χ есть число отвлеченное) и затем вновь падает, причем значение этого коэффициента весьма существенно зависит от способа изготовления и термической обработки образца металла, а также от незначительных химических примесей в нем.

2. Помимо прочих обстоятельств, уже один только факт нелинейной зависимости намагничения **I** от напряженности поля чрезвычайно усложняет даже формальную феноменологическую теорию поля в ферромагнетиках, ибо нелинейность уравнений поля влечет за собой нарушение принципа суперпозиции полей¹⁾.

¹⁾) Напряженность поля нескольких источников поля только в том случае равна сумме напряженностей полей, возбуждаемых каждым из этих источников в отдельности (принцип суперпозиции полей), если уравнения поля линейны.

Ввиду сложности магнитных свойств ферромагнетиков мы ограничимся в ближайших параграфах рассмотрением диа- и парамагнетиков и отложим рассмотрение ферромагнетиков до конца этой главы. Поэтому вплоть до § 71 включительно мы, если только явно не будет оговорено противное, будем под магнетиками понимать только пара- и диамагнетики. При этом в ряде вопросов (например, в вопросе о пондеромоторных силах, испытываемых магнетиками, — § 66) можно будет для упрощения рассуждений воспользоваться тем, что сколько-нибудь значительной магнитной восприимчивостью χ обладают лишь ферромагнетики (в которых χ может достигать сотен единиц), восприимчивость же пара- и в особенности диамагнетиков чрезвычайно мала¹⁾.

3. Внося уравнение (63.1) в уравнение (62.9), получаем

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I} = (1 + 4\pi\chi)\mathbf{H}.$$

Введем по аналогии с диэлектрической постоянной ϵ магнитную проницаемость среды μ , определяемую уравнением

$$\mu = 1 + 4\pi\chi; \quad (63.2)$$

тогда последнее уравнение примет вид

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \quad (63.3)$$

Из сказанного выше о восприимчивости χ вытекает, что в диамагнетиках $\mu < 1$, в вакууме $\mu = 1$ и, наконец, в парамагнетиках $\mu > 1$.

Заметим, что из (63.1) и (63.3) следует:

$$\mathbf{I} = \frac{\chi}{\mu}\mathbf{B}. \quad (63.4)$$

Так как именно \mathbf{B} , а не \mathbf{H} является средней напряженностью микроскопического поля [уравнение (62.6)], то коэффициент $\frac{\chi}{\mu}$ имеет более простой физический смысл, чем коэффициент χ (в частности, именно $\frac{\chi}{\mu}$, а не χ соответствует в электрическом случае коэффициенту поляризуемости диэлектриков α).

¹⁾ Отношение восприимчивости χ к плотности тела δ (так называемая восприимчивость единицы массы) лежит для парамагнетиков примерно в пределах от 10^{-4} до 10^{-5} , а для диамагнетиков — от 10^{-6} до 10^{-7} СГС-единиц. Для наиболее диамагнитного из всех веществ — висмута — χ равно приблизительно $2 \cdot 10^{-5}$.

Об уподоблении сверхпроводников идеальному диамагнетику, т. е. телу с магнитной проницаемостью $\mu = 0$ и восприимчивостью $\chi = -1/4\pi$, см. примечание на с. 198.

§ 64. Полная система уравнений поля постоянных токов. Однородная магнитная среда

1. Система полученных в § 63 уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, \end{aligned} \tag{C}$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{Rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}$$

представляет собой *полную* систему уравнений постоянного магнитного поля в произвольной (но не ферромагнитной) среде. Это значит, что системой (C) магнитное поле определяется *однозначно*, если только известно распределение объемных и поверхностных электрических токов \mathbf{j} и \mathbf{i} и значение магнитной проницаемости μ [или, что, согласно уравнению (63.2), сводится к тому же, значение восприимчивости χ] в каждой точке среды и если на бесконечности удовлетворено условие (49.10): $H R^2$ при $R \rightarrow \infty$ остается конечным.

Доказательство полноты системы (C) вполне аналогично доказательствам полноты систем уравнений (A) и (B), изложенными в § 22 и 49, и мы предоставляем провести его читателю.

Из однозначности системы (C), в частности, следует [ср. аналогичный вывод из системы (A') в § 22], что при отсутствии токов проводимости (и при отсутствии ферромагнетиков) постоянное магнитное поле тождественно равно нулю. Стало быть, наличие (неферромагнитных) магнетиков лишь видоизменяет поле токов; в отсутствие же последних намагничение магнетиков не может сохранять постоянное во времени и отличное от нуля значение — оно спадает до нуля, и магнитное поле исчезает.

При $\mu = 1$ система (C), как и следовало ожидать, полностью совпадает с уравнениями магнитного поля в вакууме [система (B), § 49].

2. Рассмотрим случай однородной магнитной среды (μ и χ постоянны), в которой система уравнений (C) принимает вид¹⁾

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{64.1}$$

так как при постоянном μ

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \operatorname{div} \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Эта система уравнений для вектора \mathbf{H} полностью совпадает с системой (B) уравнений магнитного поля токов в отсутствие

¹⁾ Пограничных условий, однозначно вытекающих из дифференциальных уравнений, для краткости не выписываем

магнетиков (см. § 49): постоянный фактор μ из нее выпадает. Таким образом, при *заполнении всего поля однородным магнетиком напряженность магнитного поля токов не изменяется*, оставаясь такой же, как и в отсутствие магнетиков (т. е. как при $\mu = 1$); магнитная же индукция \mathbf{B} возрастает в μ раз. В этом проявляется отмеченное в § 62 соответствие между *напряженностью магнитного поля \mathbf{H} и индукцией электрического поля \mathbf{D}* : индукция электрического поля \mathbf{D} также не изменяется, если при заданном распределении (свободных) зарядов заполнить все поле однородным диэлектриком; напряженность же электрического поля возрастает при этом в $1/\epsilon$ раз¹⁾ (см. § 23).

3. Вектор-потенциал магнитного поля в общем случае определяется уравнениями (62.10), (46.7), (62.11) и (61.7), которые мы сопоставим здесь еще раз:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A}, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + c \text{rot } \mathbf{I}), \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j} + c \text{rot } \mathbf{I}}{R} dV + \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{n}(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1)]}{R} dS.\end{aligned}\tag{64.2}$$

В двух последних из этих уравнений можно с помощью уравнения (63.1) выразить \mathbf{I} через \mathbf{H} . Однако в случае неоднородной среды ($\mu \neq \text{const}$) это приводит к довольно сложным выражениям; кроме того, непрерывность векторов \mathbf{H} и \mathbf{B} , а вместе с тем и непрерывность производных вектора \mathbf{A} , вообще говоря, нарушается на границе раздела сред различной проницаемости μ . Поэтому мы не будем входить здесь в рассмотрение общего случая и ограничимся лишь рассмотрением векторного потенциала для *поля токов в однородной среде* (μ и κ постоянны). В этом случае вектор \mathbf{I} непрерывен, и поверхностный интеграл в последнем из уравнений (64.2) отпадает. Далее, приняв во внимание уравнения (63.1), (62.7) и (63.2), получаем

$$\mathbf{j} + c \text{rot } \mathbf{I} = \mathbf{j} + c \kappa \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + 4\pi \kappa \mathbf{j} = \mu \mathbf{j},$$

и, следовательно,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{c} \int \mathbf{j} \frac{dV}{R}, \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\mu\pi}{c} \mathbf{j}.\tag{64.3}$$

Таким образом, вектор-потенциал токов в однородной магнитной среде в μ раз больше, чем в вакууме. Это обстоятельство вполне соответствует упомянутой выше независимости напряженности поля токов в однородной среде от проницаемости этой среды; действительно, на основании уравнений (63.3) и (62.10) получаем

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A}.$$

¹⁾ Сопоставляя \mathbf{H} с \mathbf{D} и \mathbf{B} с \mathbf{E} , мы, очевидно, должны сопоставить μ не с ϵ , а с $1/\epsilon$.

В поле линейных токов (т. е., в сущности, на расстояниях от токов, больших по сравнению с их сечением) первая из формул (64.3) принимает вид [ср. уравнение (46.3)]

$$\mathbf{A} = \frac{\mu J}{c} \oint \frac{ds}{R} \quad (\mu = \text{const}). \quad (64.4)$$

Вообще говоря, формулы (64.3) и (64.4) строго справедливы лишь в том случае, если μ постоянно не только во всем пространстве, окружающем проводники, по которым течет ток, но если и сами эти проводники обладают той же самой проницаемостью μ .

Задача 32. Показать, что для тока, текущего по бесконечному прямолинейному цилиндрическому проводнику, первое уравнение (64.3) строго справедливо в окружающей проводник среде даже в том случае, если проницаемость μ' проводника отлична от проницаемости окружающей среды μ ; при этом проводник может быть заключен в цилиндрическую оболочку произвольной проницаемости μ'' (изоляция).

§ 65. Механические силы, испытываемые токами в магнитном поле. Взаимодействие токов

1. Плотность сил, испытываемых токами в магнитном поле, в отсутствие магнетиков определяется формулой (44.5)

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} [\mathbf{jH}].$$

Ввиду атомистического строения проводников истинное микроскопическое поле $\mathbf{H}_{\text{микро}}$ весьма значительно меняется в них даже на протяжении атомарных расстояний. Применяя же формулу (44.5) в микроскопической теории, мы должны, очевидно, понимать в ней под \mathbf{H} среднее значение микроскопического поля. В магнитных средах это среднее значение $\bar{\mathbf{H}}_{\text{микро}}$, как мы видели, принято обозначать буквой \mathbf{B} и называть *индукцией* магнитного поля. Стало быть, если учесть, что обтекаемые током проводники, вообще говоря, способны намагничиваться, то формулу (44.5) нужно записать следующим образом¹⁾:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} [\mathbf{j}\bar{\mathbf{H}}_{\text{микро}}] = \frac{1}{c} [\mathbf{jB}]. \quad (65.1)$$

При $\mu = 1$ индукция \mathbf{B} равна \mathbf{H} , так что формула (65.1) совпадает с прежней формулой (44.5).

¹⁾ Приведенный вывод формулы (65.1) страдает тем недостатком, что мы не учитываем в нем возможной разницы между средним значением произведения $[\mathbf{j}_{\text{пр}}\bar{\mathbf{H}}_{\text{микро}}]$ и произведением средних значений сомножителей $[\mathbf{jB}]$. Более строгое доказательство формулы (65.1) будет дано в § 83.

Итак, силы, испытываемые током в магнитном поле, пропорциональны *индукции*, а не напряженности этого поля.

Обращаясь от токов конечного сечения к токам линейным, легко убедиться, что элемент ds длины линейного тока испытывает силу [ср. уравнение (42.1)]

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} J [ds \mathbf{B}]. \quad (65.2)$$

2. Обратимся теперь к силам, действующим на произвольный замкнутый ток в целом. При определении этих сил мы можем повторить все рассуждения § 50–52, проведенные без учета намагничивания, с тем только изменением, что соответственно переходу от формулы (44.5) к формуле (65.1) нам придется во всех формулах этих параграфов заменить **H** на **B**. Это относится, в частности, и к определению магнитного потока Φ через контур тока L ; при выводе выражения (50.2) для Φ мы воспользовались уравнением (46.2)

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A},$$

которое в магнитных средах должно быть заменено уравнением (62.10)

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Соответственно этому вместо уравнения (50.2) получаем аналогичное выражение для *потока магнитной индукции* через охватываемую контуром L поверхность S ; величину этого потока в отличие от Φ обозначим через Ψ :

$$\Psi = \int_S B_n dS = \int_S \text{rot}_n \mathbf{A} dS = \oint_L A_s ds. \quad (65.3)$$

Эта формула показывает, что поток магнитной индукции через произвольную поверхность S зависит лишь от положения и формы контура L этой поверхности и имеет одинаковое значение для всех поверхностей, опирающихся на один и тот же контур. При $\mu = 1$ получаем $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ и $\Phi = \Psi$, и уравнение (65.3) совпадает с прежним уравнением (50.2).

Потенциальная функция токов в магнитном поле при учете магнитных свойств среды выражается формулой

$$U = -\frac{1}{c} J \Psi, \quad (65.4)$$

которая получается из прежней формулы (50.4) заменой Φ на Ψ . С помощью этой функции можно определить как обобщенные пондеромоторные силы магнитного поля Θ_i , так и работу этих сил δA [см. уравнения (50.5) и (50.6)]:

$$\Theta_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad \delta A = -(\delta U). \quad (65.5)$$

3. Все приведенные в этом параграфе формулы применимы, очевидно, в любой неоднородной магнитной среде. Рассмотрим

теперь пондеромоторное взаимодействие двух линейных токов, предположив для простоты, что все поле заполнено однородной в магнитном отношении средой ($\mu = \text{const}$). В этом случае вектор-потенциал поля \mathbf{A} выразится формулой (64.4). Повторяя выкладки § 51 и 52 и принимая во внимание, что \mathbf{A} пропорционально μ , мы придем к следующей совокупности формул:

$$\Psi_{ik} = \frac{1}{c} L_{ik} J_k \quad (i, k = 1, 2), \quad (65.6)$$

$$L_{21} = L_{12} = \mu \oint\limits_{L_1} \oint\limits_{L_2} \frac{ds_1 ds_2}{R} [\text{ср. уравнение (51.3)}], \quad (65.7)$$

$$L_{11} = \frac{\mu}{J_1^2} \iint\limits_{V_1 V_1} \frac{j_1 j'_1 dV dV'}{R} [\text{ср. уравнение (52.4)}].$$

Потенциальная функция токов U по-прежнему будет определяться уравнением (52.9):

$$U = U_{11} + U_{12} + U_{22} = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_{22} J_2^2 \right). \quad (65.8)$$

Таким образом, в однородной магнитной среде коэффициенты взаимной индукции и самоиндукции токов L_{12} и L_{11} , а стало быть, и потенциальная функция U и пондеромоторные силы взаимодействия токов Θ_i , прямо пропорциональны проницаемости среды μ .

4. В том случае, если среда неоднородна в магнитном отношении ($\mu \neq \text{const}$), вектор-потенциал токов \mathbf{A} не может быть выражен простой формулой типа (64.4), и, таким образом, формулы (65.7) перестают быть применимыми. Однако если только в поле нет ферромагнетиков, то вектор-потенциал произвольного тока J будет, очевидно, по-прежнему пропорционален силе этого тока J ¹⁾. Поэтому поток магнитной индукции $\Psi_{21} = \int \mathbf{A}_2 ds_1$, посыпаемый током J_2 через контур тока J_1 [ср. уравнение (51.2)], может быть по-прежнему выражен в виде произведения

$$\Psi_{21} = \frac{1}{c} J_2 L_{21},$$

причем коэффициент взаимной индукции будет зависеть лишь от геометрической конфигурации токов, распределения их по сечениям проводников и т. д., но не от силы тока в них.

Таким образом, в отличие от (65.7) формула (65.6), а также, как легко убедиться, и формула (65.8) остаются справедливыми и в произвольной магнитной среде в отсутствие ферромагнетиков, так как при их выводе делалось предположение о пропор-

¹⁾ В ферромагнитных же средах нарушается пропорциональность между вектором \mathbf{B} , определяемым ротором вектор-потенциала \mathbf{A} , и напряженностью поля \mathbf{H} , ротор которой определяется плотностью токов j .

циональности вектор-потенциала силе тока. Заметим, что при выводе формулы (52.11)

$$U = -\frac{1}{2c} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} dV \quad (65.9)$$

этого предположения не делалось.

5. В заключение заметим следующее. Значения характеризующих магнитное поле векторов \mathbf{H} и \mathbf{B} могут быть измерены на опыте путем измерения пондеромоторных сил, испытываемых в этом поле несущими ток проводниками и постоянными магнитами (например, магнитной стрелкой, которую при известных условиях можно рассматривать как магнитный диполь).

С этой целью удобнее всего воспользоваться либо формулой (65.1), связывающей испытываемую элементом тока силу \mathbf{f} с индукцией \mathbf{B} , либо формулой (56.7), связывающей момент пары сил, испытываемых магнитным диполем момента \mathbf{M} , с напряженностью поля \mathbf{H} ¹⁾. Конечно, при измерениях необходимо следить за тем, чтобы внесение измерительного прибора (тока или стрелки) не влекло за собой сколько-нибудь существенного изменения измеряемого поля.

Однако внесение измерительных приборов в поле возможно лишь в том случае, если исследуемый участок его заполнен газообразной или жидкостью средой. Если же среда твердая, то для возможности измерений необходимо проделать в ней соответствующие отверстия, причем, конечно, поле \mathbf{H}' внутри этих отверстий будет, вообще говоря, отлично от поля \mathbf{H} и \mathbf{B} в смежных точках твердой среды.

Нетрудно, однако, установить связь между \mathbf{H}' , с одной стороны, и \mathbf{H} и \mathbf{B} , с другой (см. задачу 33).

Задача 33. Показать, исходя из уравнений (62.12) и (62.14), что напряженность поля \mathbf{H}' в средней части длинной и узкой щели, проделанной в твердом магнетике, равна *напряженности* поля \mathbf{H} в смежных со щелью точках магнетика, если эта щель *параллельна* вектору \mathbf{H} , и что \mathbf{H}' равна *индукции* \mathbf{B} в смежных точках магнетика, если эта щель *перпендикулярна* к вектору \mathbf{H} . Сравни задачу 17 (§ 22).

§ 66. Пондеромоторные силы, испытываемые магнетиками в магнитном поле

1. Механические силы, испытываемые магнетиками в магнитном поле, должны сводиться к силам, испытываемым молекулярными токами. Согласно (57.10) и (56.8) сила, действующая

¹⁾ В § 72 мы убедимся, что силы, испытываемые удлиненными стержнеобразными постоянными магнитами, определяются не индукцией \mathbf{B} , а напряженностью \mathbf{H} внешнего поля.

на систему замкнутых токов, характеризуемую магнитным моментом \mathbf{M} , равна

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{MH}) = \mathbf{M}\nabla \cdot \mathbf{H} + [\mathbf{M} \operatorname{rot} \mathbf{H}]. \quad (66.1)$$

Для определенности предположим, что магнетик состоит из отдельных молекул¹⁾. Применяя (66.1) к отдельным молекулам магнетика, мы должны, очевидно, понимать под \mathbf{M} магнитный момент молекулы, а под \mathbf{H} напряженность истинного микроскопического поля $\mathbf{H}_{\text{микро}}$ в месте нахождения молекулы. Намагничение пара- и диамагнетиков во всех доступных нам полях настолько слабо (см. сноску на с. 292), что мы вправе пренебречь в них различием между средним значением поля, действующего на молекулу (магнитный диполь), и средним значением \mathbf{B} поля $\mathbf{H}_{\text{микро}}$ по всем точкам физически бесконечно малого объема (ср. § 28). Поэтому средняя сила, испытываемая отдельной молекулой магнетика, эквивалентной элементарному току, будет определяться средней напряженностью микроскопического поля $\bar{\mathbf{H}}_{\text{микро}}$, согласно уравнению (62.6) равной вектору магнитной индукции \mathbf{B} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}\nabla \cdot \mathbf{B} + [\mathbf{M} \operatorname{rot} \mathbf{B}], \quad (66.2)$$

где знак среднего над \mathbf{F} нами опущен.

Плотность \mathbf{f} пондеромоторных сил, испытываемых магнетиком, т. е. сила, действующая на единицу объема магнетика, будет равна сумме сил, действующих на отдельные молекулы, находящиеся в единице объема:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = \sum \mathbf{F} &= \sum \mathbf{M}\nabla \cdot \mathbf{B} + \sum [\mathbf{M} \operatorname{rot} \mathbf{B}] = \\ &= \left(\sum \mathbf{M} \right) \nabla \cdot \mathbf{B} + \left[\sum \mathbf{M} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} \right]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой (60.3), получаем окончательно

$$\mathbf{f} = \mathbf{I}\nabla \cdot \mathbf{B} + [\mathbf{I} \operatorname{rot} \mathbf{B}]^2. \quad (66.3)$$

Наконец, если по рассматриваемому объему магнетика протекают, помимо токов молекулярных, еще и токи проводимости \mathbf{j} , то \mathbf{f} определится суммой выражений (65.1) и (66.3):

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} [\mathbf{jB}] + \mathbf{I}\nabla \cdot \mathbf{B} + [\mathbf{I} \operatorname{rot} \mathbf{B}]. \quad (66.4)$$

¹⁾ В противном случае нужно только незначительно изменить форму рассуждений; результат остается прежним.

²⁾ Отметим, что при выводе этой формулы мы пренебрегли разницей между средним значением векторных выражений типа $\bar{\mathbf{M}}\nabla \cdot \bar{\mathbf{H}}_{\text{микро}}$ и соответствующими выражениями, образованными из средних значений векторов $\bar{\mathbf{M}}$ и $\bar{\mathbf{H}}_{\text{микро}}$.

2. В уравнениях (66.3) и (66.4) можно выразить намагничение \mathbf{I} через индукцию \mathbf{B} . Согласно (63.4) и (63.2)

$$\mathbf{I} = \frac{\kappa}{\mu} \mathbf{B} = \frac{\mu - 1}{4\mu\pi} \mathbf{B}. \quad (66.5)$$

Внося это выражение в (66.3) и воспользовавшись формулой (47*), получаем

$$\mathbf{f} = \frac{\mu - 1}{4\pi\mu} \{ \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} + [\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{B}] \} = \frac{\mu - 1}{8\pi\mu} \nabla B^2 \quad (66.6)$$

при отсутствии токов проводимости в рассматриваемом элементе среды, тогда как при $\mathbf{j} \neq 0$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{B}] + \frac{\mu - 1}{8\pi\mu} \nabla B^2. \quad (66.7)$$

Выражение (66.6) вполне аналогично (если не считать множителя μ в знаменателе) выражению (32.3), определяющему плотность сил, действующих на диэлектрики ($\mathbf{f} = \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \nabla E^2$). Однако $\epsilon - 1$ всегда положительно, между тем как $\mu - 1 = 4\pi\kappa$ положительно лишь в парамагнетиках, тогда как в диамагнетиках $\mu - 1 < 0$. Стало быть, сила (66.7) *увлекает парамагнитные вещества в области, где индукция поля \mathbf{B} имеет максимальное значение, и наоборот, стремится удалить диамагнитные вещества из этих областей* (ср. § 32). Так как напряженность поля обычного стержнеобразного магнита возрастает при приближении к его полюсу, то *парамагнетики* (например, медь) должны *притягиваться магнитом*, а *диамагнетики* (например, висмут) *отталкиваться им*.

Ввиду весьма малой магнитной восприимчивости диамагнитных веществ (см. с. 292) испытываемые диамагнетиками силы, вообще говоря, весьма малы. Тем не менее большинство экспериментальных методов определения величин κ и μ для пары диамагнетиков основано на измерении пондеромоторных сил (66.6), испытываемых этими телами в магнитном поле.

Надо отметить, что в литературе встречается целый ряд различных выражений для \mathbf{f} , отличающихся от формулы (66.6). Впрочем, ввиду того, что в диа- и парамагнетиках μ весьма мало отличается от единицы, все эти выражения приблизительно эквивалентны друг другу.

В § 83 мы приведем строгий вывод величины пондеромоторных сил в магнетиках из выражения энергии магнитного поля; при этом выводе выясняются также условия применимости формул этого параграфа.

§ 67. Дополнение к выводу макроскопических уравнений магнитного поля в магнетиках¹⁾

1. В § 62 мы вывели дифференциальные уравнения макроскопического поля путем усреднения соответствующих микроскопических уравнений. При этом мы воспользовались уравнением (61.9):

$$\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}} = c \operatorname{rot} \mathbf{I}, \quad (67.1)$$

которое было получено нами в § 61 довольно окольным путем. Ввиду фундаментальной важности уравнения (67.1) мы посвятим настоящий параграф непосредственному выводу этого уравнения из основных положений электронной теории магнетиков.

2. Рассмотрим некоторый физически бесконечно малый объем магнетика V , ограниченный поверхностью S . По определению [см. уравнение (25.1)]

$$\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}} V = \int_V \mathbf{j}_{\text{мол}} dV, \quad (67.2)$$

где $\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}}$ означает среднее макроскопическое значение плотности молекулярных токов.

В магнитном отношении молекулярный ток, как и всякий элементарный ток, вполне характеризуется заданием его магнитного момента M . Поэтому с целью упрощения вычислений мы можем предположить, что молекулярные токи являются токами линейными и что контур каждого молекулярного тока представляет собой окружность. Если радиус кругового тока равен a , а сила его J , то, согласно уравнению (56.2),

$$M = \frac{JS}{c} = \frac{J\pi a^2}{c}.$$

В окончательный результат наших вычислений ни a , ни J явно входить не будут, так что наше специальное допущение, по существу, общности рассуждений не ограничивает. Кроме того, законность замены молекулярных токов токами линейными может быть строго обоснована разложением каждого молекулярного тока на совокупность бесконечно тонких нитей тока, каждая из которых является током линейным.

Считая все молекулярные токи линейными, можем, согласно уравнению (44.1), написать

$$\mathbf{j}_{\text{мол}} dV = J ds.$$

Стало быть, уравнение (67.2) примет вид

$$\bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}} V = \sum_V J ds = J \sum_V ds,$$

где суммирование должно быть распространено на все расположенные в объеме V элементы молекулярных токов (для простоты предполагаем, что все эти токи обладают одинаковой силой).

3. Если какой-либо элементарный ток целиком расположен внутри объема V , то векторная сумма всех его элементов будет равна нулю (ибо ток замкнут). Стало быть, сумма $\sum_V ds$ сводится к сумме элементов тех молекулярных токов, которые рассекаются поверхностью S , ограничивающей объем V , и, таким образом, лишь частью находятся внутри V . Далее, ес-

¹⁾ Параграф этот может быть опущен при первом чтении книги.

ли поверхность S рассекает какой-нибудь из круговых токов по хорде AB (рис. 64), то векторная сумма элементов ds этого тока, лежащих внутри поверхности S , будет, очевидно, равна замыкающей хорде AB . Следовательно, если эта хорда AB по величине и направлению равна s , то $\sum ds = s$. Величина и направление вектора s будут зависеть от направления плоскости тока, которая характеризуется направлением перпендикулярного к ней вектора M , и от расстояния центра тока от поверхности S .

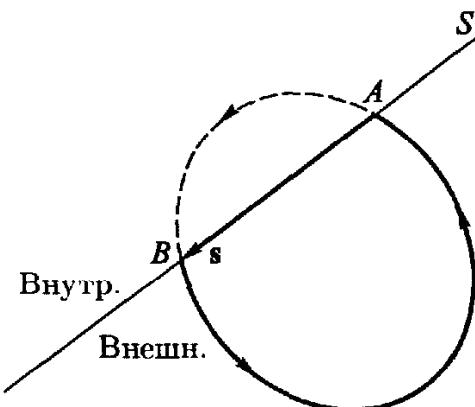


Рис. 64

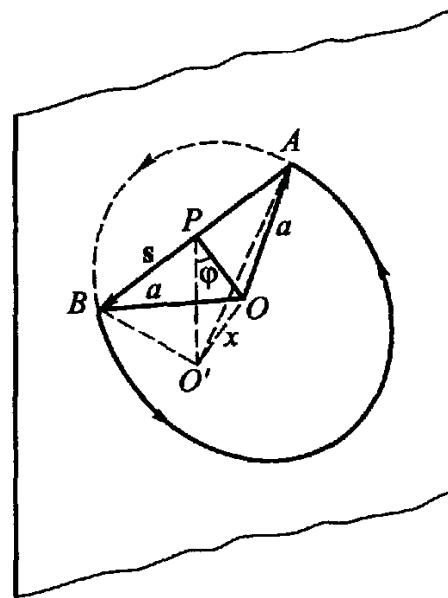


Рис. 65

Пусть M составляет с внешней нормалью n к поверхности S угол α и пусть центр тока O находится на расстоянии $OO' = x$ от поверхности S (рис. 65), причем x мы будем считать отрицательным или положительным в зависимости от того, находится ли O внутри или вне S . Проведем через OO' плоскость, перпендикулярную к AB , точку пересечения ее с AB обозначим через P . Двугранный угол OPO' между поверхностью S и плоскостью тока обозначим через φ . Этот угол не больше, чем $\pi/2$, и либо равен углу α между нормалями n и M к поверхности S и плоскости тока, либо равен $\pi - \alpha$ (если $\alpha > \pi/2$). Так как OO' перпендикулярно поверхности, то

$$OP = |x| / \sin \varphi.$$

Далее, так как OA и OB равны радиусу тока a , то

$$s = 2\sqrt{OA^2 - OP^2} = 2\sqrt{a^2 - x^2 / \sin^2 \varphi} = 2\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi - x^2 / \sin \varphi}.$$

4. Рассмотрим теперь совокупность молекулярных токов, направление магнитного момента M которых лежит внутри бесконечно малого телесного угла $d\omega$. Число этих токов в единице объема магнетика обозначим через $N(\omega) d\omega$; число таких токов в слое толщиной dx и с основанием dS , находящемся на расстоянии x от элемента dS пограничной поверхности S , будет равно

$$N(\omega) d\omega dS dx.$$

Если

$$-a \sin \varphi < x < +a \sin \varphi,$$

то все эти токи будут пересекаться пограничной поверхностью, причем пересекаться они будут по равным и параллельным хордам s . Поэтому абсолютная величина суммы относящихся к этим токам членов суммы $J \sum ds$ будет равна

$$J \left| \sum ds \right| = JsN(\omega) d\omega dS dx = 2J \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi - x^2}}{\sin \varphi} N(\omega) d\omega dS dx.$$

Интегрируя это выражение по x от $-a \sin \varphi$ до $+a \sin \varphi$, получим значение соответствующей суммы для всех токов, пересекаемых элементом граничной поверхности dS , направление магнитного момента которых лежит внутри угла $d\omega$ ¹⁾:

$$\begin{aligned} J \left| \sum ds \right| &= 2JN(\omega) d\omega dS \int_{-a \sin \varphi}^{+a \sin \varphi} \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi - x^2}}{\sin \varphi} dx = \\ &= N(\omega) d\omega dS \cdot J\pi a^2 \sin \varphi = N(\omega) d\omega dS \cdot cM \sin \varphi. \end{aligned}$$

Чтобы определить направление вектора $J \sum ds$, относящегося к токам указанного направления, заметим, что хорда s каждого тока лежит как в плоскости элемента dS , так и в плоскости самого тока, и следовательно, перпендикулярна как к n , так и к M . Стало быть, s , а вместе с тем и $J \sum ds$, должно быть параллельным $\pm[nM]$; из рассмотрения рисунков 64 и 65 следует, что знак здесь нужно выбрать положительный. Так как, с другой стороны,

$$|[nM]| = M |\sin \alpha| = M \sin \varphi$$

(поскольку угол $\varphi \leq \pi/2$ и равен либо α , либо $\pi - \alpha$), то последнее уравнение можно записать в векторной форме так:

$$J \sum ds = N(\omega) d\omega \cdot dS c [nM] = c [dS M] N(\omega) d\omega,$$

где, как обычно, вектор dS считается направленным по внешней нормали n .

Чтобы получить полную сумму всех элементов ds длины токов, отсекаемых элементом граничной поверхности dS , достаточно, очевидно, проинтегрировать последнее выражение по ω ; при этом получаем

$$J \sum ds = c \int [dS M] N(\omega) d\omega = c \left[dS \int MN(\omega) d\omega \right].$$

Входящий в это выражение интеграл $\int MN(\omega) d\omega$ представляет собой векторную сумму моментов всех молекул, находящихся в единице объема магнетика, и, стало быть, согласно уравнению (60.3), равен намагничению магнетика I . Таким образом,

$$J \sum ds = c [dS \cdot I].$$

Наконец, полная сумма всех элементов ds длины молекулярных токов, отсекаемых всеми элементами замкнутой поверхности S , будет равна

$$\bar{j}_{\text{мол}} V = J \sum_V ds = c \oint_S [dS \cdot I].$$

Последний интеграл может быть на основании уравнения (56*) преобразован в интеграл по объему V , так что окончательно получаем

$$\frac{1}{c} \bar{j}_{\text{мол}} = \frac{1}{V} \oint_S [dS \cdot I] = \frac{1}{V} \int_V \text{rot } I dV.$$

Правая часть этого уравнения представляет собой, согласно уравнению (25.1), среднее значение ротора I в физически бесконечно малом объеме V . Так как сам вектор I является величиной микроскопической и равен, согласно (60.4), средней (по физически бесконечно малому объему) плотности

¹⁾ Применяем формулу $\int \sqrt{b^2 - x^2} dx = [b^2 \arcsin(x/b) + x\sqrt{b^2 - x^2}] / 2$.

магнитного момента магнетика, то среднее значение $\text{rot } \mathbf{I}$ можно заменить просто на $\text{rot } \mathbf{I}$. Таким образом, получаем

$$\frac{1}{c} \bar{\mathbf{j}}_{\text{мол}} = \text{rot } \mathbf{I},$$

что совпадает с уравнением (67.1), которое и требовалось доказать

5 Заметим, что из этого уравнения, в частности, вытекает, что средняя плотность молекулярных токов в равномерно намагниченной среде равна нулю. В этом легко убедиться и непосредственно, рассматривая, например, объем V кубической формы. Благодаря постоянству вектора \mathbf{I} противолежащие грани куба будут рассекать одинаковое число молекулярных токов данного направления M и притом так, что участки этих токов, отсеченные одной гранью, будут в среднем как раз дополняться до полного замкнутого контура участками, отсеченными гранью противолежащей. Поэтому векторная сумма отсеченных участков будет равна нулю.

§ 68. Механизм намагничения магнетиков. Теорема Лармора

1 До сих пор мы не делали никаких специальных предположений о механизме намагничения магнетиков, и, помимо совершенно общих положений теории магнетизма, основывались только на том факте, что намагничение диа- и парамагнетиков пропорционально напряженности магнитного поля в них. Теперь же мы рассмотрим в общих чертах самый механизм намагничения различных тел, что позволит нам выяснить причину разных знаков намагничения в диа- и парамагнетиках, установить связь между магнитной восприимчивостью и атомистическим строением магнетика и т. д.

Всякая теория атомарных явлений и процессов должна основываться на квантовой механике. В явлениях же намагничения специфические квантовые закономерности играют по ряду причин еще гораздо более существенную роль, чем, например, в явлениях поляризации диэлектриков. Прежде всего, последовательная электронная теория с неизбежностью приводит в рамках классической физики к выводу, что намагничение любого тела всегда должно равняться нулю! (см. § 71). Далее, если даже сделать чуждое классической физике допущение о дискретности возможных состояний движения электронов в атомах и молекулах (см. § 71), то все же этого оказывается недостаточно для объяснения ферромагнитных явлений.

Однако изложение квантовой теории выходит за рамки этой книги. Поэтому мы при рассмотрении механизма намагничения принуждены будем в основном исходить из полуклассических — полуквантовых представлений *боровской теории* атома, позволяющих качественно ориентироваться в ряде интересующих нас явлений.

2. Рассмотрим простейший случай намагничения одноатомных газов и пренебрежем пока спином электронов. В отсутствие внешнего магнитного поля электроны в каждом атоме находятся в некотором определенном состоянии движения. При внесении магнетика в магнитное поле \mathbf{H} движение электронов изменится, ибо на них начнет действовать лоренцева сила (45.3):

$$\mathbf{F}_L = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]. \quad (68.1)$$

Согласно *теореме Лармора*, которую мы сейчас докажем, это изменение движения электронов в первом приближении сводится к наложению на невозмущенное движение электронов добавочного вращения («прецессии») всех электронов вокруг направления магнитного поля \mathbf{H} с угловой скоростью

$$\omega = -\frac{e\mathbf{H}}{2mc}, \quad (68.2)$$

где e есть заряд электрона ($e < 0$), а m — его масса. Иными словами, если ввести вспомогательную систему координат S' с центром в ядре атома, вращающуюся с угловой скоростью ω вокруг проходящей через ядро оси, совпадающей по направлению с \mathbf{H} , то по отношению к этой системе S' движение электронов при наличии поля будет в первом приближении таким же, каким оно было при отсутствии поля \mathbf{H} по отношению к инерциальной (неподвижной) системе координат S .

Действительно, ввиду симметрии кулоновского поля ядра взаимодействие электронов с ядром не будет видоизменено их добавочной прецессией. Также не изменится и взаимодействие электронов друг с другом, ибо общая прецессия электронов не изменит их относительного расположения. Однако поскольку система S' вращается, постольку для поддержания прежнего движения электронов в ней уже не будет достаточно тех сил, которые поддерживали это движение в инерциальной системе координат; необходимо будет еще уравновесить силы инерции, а именно — силы центробежные и силы Кориолиса.

Центробежная сила пропорциональна произведению расстояния электрона от оси вращения на квадрат угловой скорости ω^2 , т. е., согласно (68.2), пропорциональна квадрату напряженности поля H^2 ¹). Поэтому в первом приближении, в котором учитываются только величины, пропорциональные первой степени поля H , центробежными силами можно пренебречь.

¹) Ибо в атоме расстояние электрона от оси вращения, проходящей через ядро атома, в первом приближении не зависит от H . Напротив, в случае движения в магнитном поле *свободного* электрона радиус R его орбиты, согласно (45.7), обратно пропорционален H , и поэтому центробежная сила пропорциональна первой, а не второй степени H .

Кориолисова же сила, приложенная к i -му электрону ($i = 1, 2, \dots, n$, где n есть число электронов в атоме), пропорциональна *первой степени* \mathbf{H} и равна

$$\mathbf{F}_i^{(k)} = 2m[\mathbf{v}'_i \mathbf{o}],$$

где \mathbf{v}'_i есть («относительная») скорость i -го электрона во вращающейся системе S' , связанная с его («абсолютной») скоростью \mathbf{v}_i в инерциальной системе S соотношением

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - [\mathbf{o} \mathbf{r}_i],$$

где \mathbf{r}_i есть расстояние i -го электрона от оси вращения. С точностью до членов второго порядка относительно \mathbf{H} можно в выражении для $\mathbf{F}_i^{(k)}$ заменить \mathbf{v}'_i на \mathbf{v}_i :

$$\mathbf{F}_i^{(k)} = 2m[\mathbf{v}_i \mathbf{o}].$$

Внося сюда значение \mathbf{o} из (68.2), получаем

$$\mathbf{F}_i^{(k)} = -\frac{e}{c}[\mathbf{v}_i \mathbf{H}],$$

что равно с обратным знаком лоренцевой силе (68.1), действующей на i -й электрон. Таким образом, лоренцева сила (68.1) действительно уравновешивается кориолисовой силой (с точностью до членов второго порядка относительно \mathbf{H}).

Итак, мы доказали, что при наличии поля *возможно* прежнее движение электронов в атоме, видоизмененное лишь общей их прецессией с угловой скоростью \mathbf{o} . Чтобы полностью доказать теорему Лармора, следовало бы еще показать, что эта возможность *действительно осуществляется* при (достаточно медленном) включении поля \mathbf{H} . Мы примем на веру это утверждение, доказательство которого излагается в теории атома, но зато приведем еще другой вывод формулы Лармора (68.2); при этом мы попутно получим ряд формул, которые понадобятся нам в дальнейших параграфах.

3. Для всякой системы частиц, движущихся в центральном поле сил, справедлив закон сохранения момента количества движения. В частности, суммарный момент количества движения электронов относительно атомного ядра, равный

$$\mathbf{K} = m \sum_{i=1}^n [\mathbf{R}_i \mathbf{v}_i], \quad (68.3)$$

остается в отсутствие внешних полей постоянным во времени (взаимодействие электронов друг с другом не нарушает постоянства \mathbf{K}). Здесь \mathbf{R}_i есть расстояние i -го электрона от ядра, а \mathbf{v}_i — его скорость.

С другой стороны, выражение (57.4) магнитного момента атома

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{Rj}] dV$$

может быть преобразовано следующим образом. Микроскопическая плотность тока \mathbf{j} в каждой точке пространства может быть выражена через микроскопическую объемную плотность ρ зарядов в этой точке и через их скорость \mathbf{v} ¹⁾:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}. \quad (68.4)$$

Действительно, \mathbf{j} , очевидно, параллельно или антипараллельно скорости зарядов \mathbf{v} в зависимости от знака ρ . Далее, через перпендикулярную к \mathbf{v} единичную площадку проходят все заряды, расположенные в цилиндре высоты \mathbf{v} , построенном на этой площадке как на основании, откуда и следует (68.4). Внося (68.4) в выражение для \mathbf{M} , получаем

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{Rv}] \rho dV. \quad (68.5)$$

С точки зрения боровской теории атома, эту формулу, выведенную, строго говоря, для замкнутых постоянных токов, можно применить к усредненному по времени движению электронов по орбитам внутри атома. При этом можно с достаточной точностью считать значение произведения $[\mathbf{Rv}]$ одинаковым во всех точках каждого отдельного электрона и, стало быть, можно вынести его за знак интеграла:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c} [\mathbf{Rv}] \int \rho dV = \frac{e}{2c} [\mathbf{Rv}],$$

где $e = \int \rho dV$ есть заряд электрона. В случае наличия в атоме нескольких электронов соответственно получим

$$\mathbf{M} = \frac{e}{2c} \sum_{i=1}^n [\mathbf{R}_i, \mathbf{v}_i]. \quad (68.6)$$

Сравнивая это выражение с уравнением (68.3), убеждаемся, что механический момент вращения электронов \mathbf{K} пропорционален

¹⁾ Формулу (68.4) нельзя непосредственно перенести в макроскопическую теорию, ибо среднее значение произведения ρv не равно, вообще говоря, произведению средних значений сомножителей. Так, например, в проводнике, по которому течет ток, средняя плотность зарядов ρ может равняться нулю, хотя средняя плотность тока \mathbf{j} и отлична от нуля, ибо в проводнике движутся заряды только одного знака (электроны). Формула (68.4) будет применима к этому случаю, если в ней под ρ понимать плотность только движущихся зарядов — электронов. При этом условии она совпадает с уравнением (45.1), где e есть макроскопическое значение плотности ρ зарядов электронов.

магнитному моменту \mathbf{M} , создаваемому движением электронов по орбите:

$$\mathbf{M} = \eta \mathbf{K}, \quad (68.7)$$

причем \mathbf{M} направлено прямо противоположно \mathbf{K} , ибо коэффициент пропорциональности η :

$$\eta = \frac{e}{2mc}, \quad (68.8)$$

отрицателен, так как заряд электрона $e < 0$.

4. В отсутствие внешних полей, как уже упоминалось, механический момент атома \mathbf{K} , а стало быть, и пропорциональный ему магнитный момент атома \mathbf{M} постоянны во времени. При наличии же внешнего магнитного поля на атом действует пара сил, момент которой \mathbf{N} равен [уравнения (56.7)]:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{MH}].$$

Если бы атом не обладал моментом количества движения, то под воздействием этой пары сил его магнитная ось стремилась бы установиться по направлению поля \mathbf{H} . Однако наличие момента количества движения \mathbf{K} делает атом подобным в механическом отношении вращающемуся волчку (гироскопу). Известно, что если на вращающийся волчок начинает действовать пара сил, момент которой перпендикулярен к оси волчка, то ось эта начинает *прецессировать* вокруг направления сил, причем *угол наклона оси к направлению сил не изменяется* (ср. прецессию тяжелого волчка в поле сил тяжести).

Действительно, согласно известной теореме механики, под воздействием пары сил момента \mathbf{N} конечная точка вектора момента количества движения \mathbf{K} материальной системы перемещается с линейной скоростью $\frac{d\mathbf{K}}{dt}$, равной \mathbf{N} :

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{N} = [\mathbf{MH}].$$

Внося сюда значение \mathbf{M} из уравнения (68.7), получим

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \eta [\mathbf{KH}].$$

Поскольку, согласно (68.2) и (68.8),

$$\mathbf{o} = -\eta \mathbf{H}, \quad (68.9)$$

мы можем также написать

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = [\mathbf{oK}]. \quad (68.10)$$

Из этого уравнения следует, что вектор \mathbf{K} , а значит, и \mathbf{M} будут вращаться около направления \mathbf{o} с угловой скоростью o , или,

иными словами, будут вращаться с угловой скоростью, определяемой по величине и направлению вектором ω . Это значит, что при возникновении магнитного поля H электронная оболочка атома начинает *прецессировать* вокруг направления поля с угловой скоростью ω , причем угол наклона магнитной оси атома к направлению поля остается неизменным.

Так, например, если мысленно заменить совокупность внутриатомных токов линейным плоским замкнутым током (соответствующим в боровской теории орбите электрона), то вектор K будет перпендикулярен плоскости этого тока (плоскости орбиты) и прецессия этого вектора будет соответствовать прецессии плоскости тока (орбиты) с той же угловой скоростью ω (рис. 66; нанесенный на рисунке вектор ΔM будет рассмотрен в § 69).

В этом и заключается содержание *теоремы Лармора*, которую мы, таким образом, доказали двумя различными способами. Недостаток второго доказательства состоит в том, что оно неприменимо к атомам, результирующий магнитный момент M которых в отсутствие внешнего поля равен нулю.

5. Все изложенное в этом параграфе строго применимо к изолированным атомам *газообразных* магнетиков. Однако качественно результаты этого параграфа применимы во всех тех случаях, когда электронная оболочка атомов или ионов может более или менее свободно вращаться вокруг ядра атома. Если электронная оболочка атома или иона обладает сферической симметрией (как, например, у атомов благородных газов или ионов с тем же числом электронов, как у благородных газов), то свободное вращение этой оболочки может иметь место и в жидких и в твердых телах.

Во всяком случае, опыт показывает в соответствии с более точной (чем излагаемая нами) теорией, что основные результаты § 68–70 с достаточной степенью точности применимы как к многоатомным газам, так и ко многим жидким и твердым пар- и диамагнетикам.

§ 69. Диамагнетизм

1. В отсутствие внешнего магнитного поля молекулярные токи в (неферромагнитных) магнетиках распределены совершенно хаотично, а поэтому намагничение магнетика (т. е. магнит-

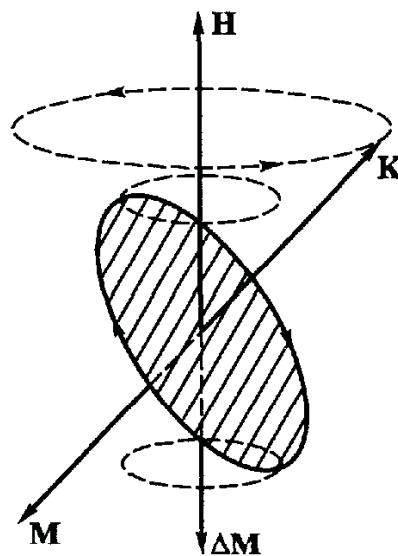


Рис. 66

ный момент единицы его объема) равно нулю. При внесении же магнетика в магнитное поле возникает *ларморова прецессия* электронных оболочек атомов, эквивалентная добавочному вращению электронов с угловой скоростью ω вокруг проходящей через ядро атома оси, параллельной \mathbf{H} . Благодаря этому вращению электронов диамагнитный атом приобретает некоторый магнитный момент $\Delta\mathbf{M}$. Так как ω направлено параллельно полу [ибо $\eta < 0$, см. уравнение (68.8)], то направление добавочного вращения электронов составляет с вектором \mathbf{H} *правовинтовую* систему. Следовательно, направление «добавочного» тока $\Delta\mathbf{J}$, эквивалентного этому прецессионному движению *отрицательных* электронов, составляет с вектором \mathbf{H} *левовинтовую* систему. Стало быть, магнитный момент $\Delta\mathbf{M}$, приобретаемый атомом в магнитном поле благодаря прецессии, направлен *против* магнитного поля \mathbf{H} (см. рис. 66). Таким образом, в результате прецессии атомы приобретут обратный полю магнитный момент, т. е. тело намагнитится в направлении, обратном полю. В этом и заключается объяснение *диамагнетизма*.

Этот диамагнитный эффект имеет место и в парамагнитных телах, но, как мы покажем в следующем параграфе, полностью маскируется в них противоположным по знаку и значительно более сильным парамагнитным эффектом.

2. Чтобы определить числовое значение диамагнитной восприимчивости, заметим, что благодаря ларморовой прецессии электронной оболочки атома каждый объемный элемент ρdV заряда этой оболочки приобретает добавочную скорость

$$\Delta\mathbf{v} = [\mathbf{o}\mathbf{R}],$$

где \mathbf{R} есть расстояние элемента dV от ядра атома. Согласно уравнению (68.5), добавочный магнитный момент атома, соответствующий этой прецессии, равен

$$\Delta\mathbf{M} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{R} \cdot \Delta\mathbf{v}] \rho dV = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{R} [\mathbf{o}\mathbf{R}]] \rho dV. \quad (69.1)$$

Далее,

$$[\mathbf{R} [\mathbf{o}\mathbf{R}]] = \mathbf{oR}^2 - \mathbf{R}(\mathbf{oR}).$$

Пусть ось z направлена по направлению \mathbf{o} , совпадающему с направлением \mathbf{H} . Тогда слагающая этого вектора по оси z будет равна

$$oR^2 - z(oz) = o(R^2 - z^2) = o(x^2 + y^2);$$

слагающие по осям x и y будут равны

$$-zox \text{ и } -zoy.$$

По подстановке в интеграл и усреднении значения $\Delta\mathbf{M}$ по периоду прецессии слагающие по осям x и y дадут нуль, ибо благодаря прецессии электронов атом будет обладать в среднем по времени цилиндрической симметрией около оси z . Действительно, благодаря этой симметрии всякому элементу заряда ρdV с координатами x, y, z найдется равный элемент заряда с координатами $-x, y, z$, так что сумма выражений $-zox$ для этой пары элементов обратится в нуль.

Таким образом, среднее по времени значение $\Delta\mathbf{M}$ равно

$$\overline{\Delta\mathbf{M}} = \frac{\mathbf{o}}{2c} \int \overline{(x^2 + y^2)} \rho dV.$$

Последний интеграл равен, очевидно, произведению суммы зарядов электронов атома Ze (где Z означает число электронов в атоме) на среднее значение квадрата расстояния электронов от оси z :

$$\int \overline{(x^2 + y^2)} \rho dV = Ze \overline{(x^2 + y^2)}.$$

Внося, наконец, значение \mathbf{o} из уравнения (68.2), получаем

$$\overline{\Delta M} = \frac{1}{2c} Z o e \overline{(x^2 + y^2)} = -\frac{Ze^2}{4mc^2} \overline{(x^2 + y^2)} \mathbf{H}. \quad (69.2)$$

Среднее по времени значение $\overline{x^2}$ будет иметь, вообще говоря, различное значение для различных атомов, в среднем же для различно ориентированных атомов оно, очевидно, будет равно

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \frac{1}{3} \overline{R^2},$$

где $\overline{R^2}$ есть средний квадрат расстояния электронов от ядра атома. Стало быть,

$$\overline{\Delta M} = -\frac{Ze^2}{6mc^2} \overline{R^2} \mathbf{H},$$

а намагничение единицы объема диамагнетика равно

$$\mathbf{I} = N \cdot \overline{\Delta M} = -\frac{NZe^2}{6mc^2} \overline{R^2} \mathbf{H}, \quad (69.3)$$

где N есть число атомов в единице объема.

Стало быть, восприимчивость диамагнетика равна

$$\kappa = -\frac{NZe^2}{6mc^2} \overline{R^2}; \quad (69.4)$$

при постоянном объеме (т. е. при постоянном N) она от температуры не зависит.

Если с помощью квантовой механики вычислить средний квадрат расстояния электронов от ядра различных диамагнитных атомов, то формула (69.4) дает значение κ , очень хорошо согласующееся с данными опыта.

Заметим, что \mathbf{H} в (69.3) по смыслу означает среднюю напряженность микроскопического поля $\overline{\mathbf{H}}_{\text{микро}}$ (если пренебречь отличием его от среднего эффективного поля, действующего на молекулу) и что поэтому правильнее было бы в соответствии с (62.6) писать в (69.3) не \mathbf{H} , а \mathbf{B} . Произведя эту замену в соответствии с (63.4), получим вместо (69.4):

$$\frac{\kappa}{\mu} = \frac{\kappa}{1 + 4\pi\kappa} = -\frac{NZe^2}{6mc^2} \overline{R^2}. \quad (69.5)$$

Однако отличие μ от единицы в диамагнетиках настолько мало, что (69.5) практически не отличается от (69.4).

§ 70. Парамагнетизм

1. Если магнетик состоит из атомов или молекул, магнитный момент \mathbf{M} которых в отсутствие внешнего поля \mathbf{H} равен нулю ($\mathbf{M} = 0$), то воздействие магнитного поля на магнетик исчерпывается тем диамагнитным моментом, который был рассмотрен в

предшествующем параграфе, и магнетик этот диамагнитен ($\chi < 0$). Если же магнитный момент M атомов и молекул среды в отсутствие внешнего поля отличен от нуля ($M \neq 0$), то наряду с диамагнитным эффектом [возникновение добавочного момента атомов ΔM , формула (69.1)] магнитное поле вызывает также *перераспределение направлений* магнитных моментов M атомов и молекул среды. В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты атомов ориентированы совершенно беспорядочно, так что намагничение среды равно нулю. При наличии же внешнего магнитного поля H получают преобладание те направления магнитных моментов атомов, которые приближаются к направлению поля. Это намагничение магнетика по направлению поля (положительное намагничение, *парамагнетизм*) при $M \neq 0$ всегда значительно превышает диамагнитный эффект. Поэтому все магнетики с $M \neq 0$ парамагнитны ($\chi > 0$).

2. Как мы убедились в § 68, магнитное поле непосредственно не изменяет угла наклона магнитного момента атома к направлению поля, а лишь заставляет магнитную ось атома прецессировать вокруг направления поля при том же угле наклона к нему. Если до возбуждения поля направления осей атомов были распределены хаотически, то и в магнитное поле векторная сумма моментов отдельных атомов должна оставаться равной нулю. Следовательно, *непосредственное* воздействие поля на магнетик сводится к диамагнитному эффекту, рассмотренному в § 69.

Однако это справедливо лишь постольку, поскольку мы ограничиваемся рассмотрением свободных или изолированных атомов или молекул и вовсе не учитываем их взаимодействия. В простейшем случае идеального газа взаимодействие молекул сводится к соударениям их между собой. Что существенно нового приносит учет этих соударений?

При каждом соударении направление оси молекул будет, вообще говоря, изменяться. Акт соударения молекул настолько сложен, что мы не можем проследить его во всех деталях. Однако мы можем учесть влияние соударений, прибегнув к помощи общих принципов статистической механики, а именно — к *теореме Больцмана*, согласно которой вероятность данного состояния молекулы, тем больше, чем меньше его энергия¹⁾. Мы сейчас докажем, что при заданном магнитном моменте атома кинетическая энергия электронов, входящих в состав данного атома, тем

¹⁾ Теорема Больцмана относится к системам, находящимся в состоянии *термодинамического равновесия*, и необходимым условием ее применимости и является сама возможность изменения состояний молекул (в данном случае направления их осей). Как мы видели, в магнитном поле направление осей молекул может изменяться лишь при наличии взаимодействия (в частности, *соударений*) молекул; в противном случае теорема Больцмана была бы неприменима.

меньше, чем меньше угол между магнитным моментом атома и направлением магнитного поля. Стало быть, согласно теореме Больцмана, при наличии внешнего поля в результате соударений атомов должны получить преобладание направления магнитных осей атомов, близкие к направлению \mathbf{H} , и тело должно намагнититься (парамагнитный эффект).

3. Итак, нам нужно определять изменение кинетической энергии электронов в атомах под воздействием внешнего магнитного поля \mathbf{H} . Прецессия электронов в магнитном поле с угловой скоростью \mathbf{o} вызывает изменение скорости \mathbf{v}_i i -го электрона в атоме на величину

$$\Delta \mathbf{v}_i = [\mathbf{o} \mathbf{R}_i], \quad (70.1)$$

где \mathbf{R}_i есть расстояние i -го электрона от ядра атома. Соответственно этому кинетическая энергия T электронов в атоме изменяется на

$$\Delta T = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n \{(\mathbf{v}_i + \Delta \mathbf{v}_i)^2 - \mathbf{v}_i^2\} = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n \{2\mathbf{v}_i \Delta \mathbf{v}_i + (\Delta \mathbf{v}_i)^2\}, \quad (70.2)$$

где m — масса электрона, а n — число электронов в атоме. Так как $\Delta \mathbf{v}_i$ во всех доступных полях гораздо меньше \mathbf{v}_i , то квадратом $\Delta \mathbf{v}_i$ можно пренебречь:

$$\Delta T = m \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \Delta \mathbf{v}_i = m \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i [\mathbf{o} \mathbf{R}_i] = m \mathbf{o} \sum_{i=1}^n [\mathbf{R}_i \mathbf{v}_i].$$

Воспользовавшись уравнением (68.3), получаем

$$\Delta T = \mathbf{o} \mathbf{K},$$

где \mathbf{K} равно невозмущенному полем значению момента количества движения электронной оболочки атома. Наконец, с помощью уравнений (68.9) и (68.7) получаем окончательно

$$\Delta T = -\eta \mathbf{K} \mathbf{H} = -\mathbf{M} \mathbf{H}. \quad (70.3)$$

Таким образом, изменение *кинетической* энергии электронов в магнитном поле \mathbf{H} ¹⁾ численно равно *потенциальной* энергии в этом поле *магнитного диполя*, момента которого \mathbf{M} равен магнитному моменту атома [см. уравнение (56.5)]. В этом вновь проявляется эквивалентность элементарного замкнутого тока и магнитного диполя, на которую мы уже неоднократно обращали внимание.

4. Для определения намагничения парамагнетиков нам остается только воспользоваться теоремой Больцмана. В § 29 мы уже пользовались этой теоремой в применении к консервативному

¹⁾ Конечно, ни о какой потенциальной энергии электрона в неконсервативном магнитном поле не может быть и речи.

полю электрических сил. Теорема Больцмана остается применимой и в неконсервативном поле магнитных сил, если только в формулировке этой теоремы, приведенной в § 29, заменить потенциальную энергию молекулы U приращением ΔW полной (потенциальной и кинетической) энергии молекулы в рассматриваемом поле сил.

Таким образом, мы приходим к следующей формулировке теоремы Больцмана: в условиях термодинамического равновесия закон распределения молекул по различным состояниям в случае наличия внешнего поля сил отличается от закона их распределения в отсутствие этого поля множителем $\exp -\frac{\Delta W}{kT}$, причем, конечно, существенна зависимость ΔW от состояния молекулы. Иными словами, теорема Больцмана утверждает, что вероятность данного состояния молекулы тем больше, чем меньше энергия этого состояния.

В рассматриваемом нами случае $\Delta W = \Delta T = -M\mathbf{H}$, так что энергия молекулы тем меньше, чем меньше угол между направлением ее момента M и направлением поля H . Таким образом, намагничение парамагнетиков совершенно аналогично поляризации диэлектриков с твердыми диполями: фактор Больцмана $\exp -\frac{\Delta W}{kT}$, определяющий распределение осей молекул во внешнем поле, равен $\exp \frac{MH}{kT}$ для парамагнитных молекул в магнитном поле H и $\exp \frac{PE}{kT}$ для твердых электрических диполей в электрическом поле E [см. уравнение (29.2)]. Поэтому в теории парамагнетизма мы можем непосредственно воспользоваться результатами теории диэлектриков с твердыми диполями.

С этой целью достаточно заменить в формулах § 29 электрические величины p_0 и P соответствующими магнитными M и I . Что же касается электрической напряженности E , то, собственно говоря, вместо нее нужно подставить не H , а магнитную индукцию B , ибо именно B равно среднему значению микроскопической напряженности $H_{\text{микро}}$ [уравнение (62.6)]. Произведя эту замену в формуле (29.5), получим

$$I = \frac{NM^2}{3kT} B,$$

откуда на основании (63.4)

$$\frac{\kappa}{\mu} = \frac{\kappa}{1 + 4\pi\kappa} = \frac{NM^2}{3kT}. \quad (70.4)$$

Здесь T означает, конечно, в отличие от (70.2) и (70.3) абсолютную температуру парамагнетика. Из (70.4) легко определить магнитную восприимчивость κ . Однако восприимчивость неферромагнитных тел настолько мала, что членом $4\pi\kappa$ можно прене-

бречь по сравнению с единицей¹⁾ и положить, как это делается обычно,

$$\chi = \frac{NM^2}{3kT}. \quad (70.5)$$

5. Таким образом, в отличие от восприимчивости диамагнетиков [формула (69.4)], восприимчивость парамагнетиков χ должна при постоянном объеме (т. е. при постоянном N) изменяться обратно пропорционально абсолютной температуре (ср. два класса диэлектриков, § 29). Этот характер зависимости χ от T был экспериментально обнаружен П. Кюри еще до разработки соответствующей теории и носит название *закона Кюри*. Закон этот хорошо оправдывается на опыте для газообразных парамагнетиков, а также для ряда твердых парамагнетиков (например для солей редких земель). С другой стороны, для многих жидких и твердых парамагнетиков изложенная элементарная теория, предполагающая свободную прецессию магнитных моментов атомов вокруг направления поля, оказывается недостаточной, и закон Кюри в этих парамагнетиках нарушается.

Впрочем, и в тех парамагнетиках, к которым это предположение применимо, должны наблюдаться и наблюдаются отклонения от закона Кюри в очень сильном поле и при очень низкой температуре (порядка нескольких градусов абсолютной шкалы). Эти отклонения вполне соответствуют ожиданиям излагаемой теории и объясняются тем, что применимость формул (70.4) и (70.5) ограничена условием

$$a = \frac{MH}{kT} \ll 1 \quad (70.6)$$

[ср. соответствующую формулу (29.7) и § 29]. При $a \sim 1$ наблюдается *насыщение намагничения* парамагнетиков, заключающееся в нарушении пропорциональности между I и H , причем намагничение I стремится при возрастании поля к постоянному пределу $I_{\text{нас}} = NM$. Это максимально возможное намагничение соответствует установке магнитных моментов *всех* атомов по направлению поля H (см. § 72).

Формула (70.4) позволяет вычислить значение M по данным измерения величин χ и N при различных температурах T . Определенные таким образом значения магнитного момента парамагнитных атомов и молекул вполне соответствуют выводам квантовой теории атома.

¹⁾ В сущности, было бы непоследовательным учитывать в приведенных формулах различие между B и H и вместе с тем пренебрегать, как это мы всюду делали в этой главе, отличием действующего на молекулу поля от среднего поля (§ 28), отличием среднего квадрата напряженности поля от квадрата его средней напряженности и т. п., ибо все эти различия одного порядка величины.

6. Заметим в заключение, что в связи с формулами (70.2) и (70.3) законно возникает следующий вопрос. Силы магнитного поля перпендикулярны к скорости электрона и поэтому никакой работы не совершают. Каким же образом возникновение магнитного поля может изменить кинетическую энергию электронов?

Ответ заключается в том, что всякое изменение напряженности магнитного поля, в частности возникновение этого поля, возбуждает поле электрическое (см. § 85). Работой сил этого электрического поля и обусловливается изменение энергии электрона при возбуждении поля магнитного. Для полноты мы приведем здесь соответствующие выкладки, хотя нам придется при этом пользоваться некоторыми положениями, которые будут доказаны в следующей главе, так что при первом чтении книги эти выкладки можно опустить.

Усреднив движение электронов в атоме по времени обращения их по орбитам, мы можем свести движение атомных электронов к соответствующей системе замкнутых постоянных токов (квантовая механика непосредственно сводит магнитное поле атома к полю такой системы токов) Далее, произвольную систему постоянных замкнутых токов можно разложить на совокупность замкнутых нитей тока. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением одной такой нити тока или, проще, линейного замкнутого тока J . Работа A , совершаемая силами электрического поля над током J за промежуток времени от t_1 до t_2 , равна [ср. уравнение (35.5)]:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} J dt \oint L E_s ds,$$

где линейный интеграл должен быть взят по контуру тока L . Воспользовавшись формулой (76.6), получаем

$$\oint L E_s ds = \mathcal{E}^{\text{инд}} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S H_n dS = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt},$$

где поверхностные интегралы должны быть взяты по поверхности S , опирающейся на контур тока, а Φ есть магнитный поток через этот контур. Внося это в предшествующее выражение и предполагая, что изменение тока J под влиянием индукции настолько незначительно, что им можно пренебречь и вынести J за знак интеграла по времени, получаем

$$A = -\frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} J \frac{d\Phi}{dt} dt = -\frac{J}{c} [\Phi(t_2) - \Phi(t_1)].$$

Если в начальный момент времени магнитного поля не было и, стало быть, $\Phi(t_1)$ равнялось нулю и если на поверхности S магнитное поле имеет в момент t_2 постоянное значение \mathbf{H} , то

$$\Phi(t_1) = 0, \quad \Phi(t_2) = HS$$

и, согласно (56.2),

$$A = -\frac{JHS}{c} = -MH. \quad (70.7)$$

Таким образом, работа электрических сил, индуцируемых при возбуждении магнитного поля, действительно равна изменению кинетической энергии электронов [уравнение (70.3)].

§ 71. Уточнения и дополнения к теории намагничения. Роль спина. Гиromагнитные явления

В § 68–70, посвященных теории намагничения пара- и диамагнетиков, мы для упрощения изложения оставили без рассмотрения ряд обстоятельств, часть из которых мы теперь рассмотрим дополнительно.

1. Во-первых, в предыдущем мы исходили из предположения, что все молекулы (или все атомы) данного вещества обладают (в отсутствие внешнего магнитного поля) вполне определенным магнитным моментом \mathbf{M} , испытывающим при возбуждении внешнего поля \mathbf{H} вполне определенное изменение $\Delta\mathbf{M}$ [формула (69.1)]. Это изменение зависит только от ориентации атома относительно поля \mathbf{H} , ибо среднее расстояние электронов от атомного ядра, входящее в (69.2), считается одинаковым для всех атомов.

Не представляет труда обобщить результаты предшествующих параграфов на случай смеси различных сортов атомов или молекул (например смесь газов, раствор, смесь невозбужденных и возбужденных атомов и т. д.); магнитная восприимчивость смеси будет, очевидно, равна сумме восприимчивостей ее компонент. Однако совершенно решающее значение имеет предположение, что возможные значения магнитного момента атомов M и среднего квадрата расстояния электронов от ядра атома $\overline{R^2}$ [уравнение (69.3)] образуют *дискретную* совокупность. Предположение это вполне соответствует квантовой теории, но никак не укладывается в рамки классической физики. Если же в духе классической физики принять, что как момент каждого атома M , так и величина $\overline{R^2}$ могут принимать все значения от 0 до ∞ , то *магнитная восприимчивость* вещества оказывается *тождественно равной нулю*¹⁾. В случае же электрической поляризации аналогичной трудности не возникает.

Таким образом, хотя по внешности рассуждения предшествующих параграфов велись в рамках классической теории, однако, строго говоря, последовательная электронная теория намагничения оказывается в рамках классической физики совершенно невозможной.

2. Во-вторых, в § 68–70 мы совершенно не учитывали *спина* электронов и должны теперь восполнить этот пробел.

Ограничивааясь рассмотрением так называемого *орбитального* магнитного момента $\mathbf{M}_{\text{орб}}$ и *орбитального* момента количества движения $\mathbf{K}_{\text{орб}}$ атома, обусловленных поступательным движени-

¹⁾ См., например, Вонсовский С.В. Магнетизм. — М.: Наука, 1984; Беккер Р. Электронная теория. — М.: ОНТИ, 1941. С. 159.

ем электронов в атоме¹⁾, мы установили в § 68, что эти моменты пропорциональны друг другу [уравнение (68.7)]:

$$\mathbf{M}_{\text{орб}} = \eta \mathbf{K}_{\text{орб}}, \quad (71.1)$$

причем коэффициент пропорциональности имеет универсальное значение [уравнение (68.8)]:

$$\eta = \frac{e}{2mc} < 0. \quad (71.2)$$

Однако полный магнитный и механический моменты атома не исчерпываются этими орбитальными моментами, а складываются из суммы их и спиновых моментов электронов \mathbf{M}' и \mathbf{K}' . Между векторными величинами спиновых моментов \mathbf{M}' и \mathbf{K}' каждого отдельного электрона также существует прямая пропорциональность:

$$\mathbf{M}' = \eta' \mathbf{K}'. \quad (71.3)$$

Однако, согласно (58.1), коэффициент пропорциональности в этом случае отличен от η :

$$\eta' = e/(mc) = 2\eta. \quad (71.4)$$

Поэтому коэффициент пропорциональности η'' между результирующими магнитным и механическим моментами \mathbf{M} и \mathbf{K} всего атома в целом

$$\mathbf{M} = \eta'' \mathbf{K} \quad (71.5)$$

не является величиной универсальной, а зависит от соотношения между орбитальным и спиновым моментом в данном атоме²⁾. Значение его должно, очевидно, быть отрицательным и заключаться в пределах

$$2\eta \leq \eta'' \leq \eta. \quad (71.6)$$

Повлияет ли это обстоятельство на результаты § 69–70? При выводе закона Кюри (70.4) для парамагнетиков мы, в сущности, опирались только на тот факт, что изменение энергии атома момента \mathbf{M} при возникновении магнитного поля \mathbf{H} равно

$$\Delta W = -\mathbf{M}\mathbf{H}. \quad (71.7)$$

¹⁾ Для отличия от спиновых моментов мы теперь ввели в обозначения индекс «орб», которого до сих пор не писали.

²⁾ Собственно говоря, ввиду отличия η от η' не самоочевидно, что результирующий магнитный момент атома $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{орб}} + \sum \mathbf{M}'$ направлен всегда прямо противоположно результирующему механическому моменту $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{орб}} + \sum \mathbf{K}'$. Однако если $\mathbf{M}_{\text{орб}}$ и сумма спиновых магнитных моментов электронов $\sum \mathbf{M}'$ направлены под углом друг к другу, то силы магнитного взаимодействия между $\mathbf{M}_{\text{орб}}$ и $\sum \mathbf{M}'$ (так называемая «связь спина с орбитой») вызывают прецессию каждого из этих моментов вокруг вектора \mathbf{K} , направление и величина которого в изолированном атоме, согласно закону сохранения момента количества движения, изменяться не могут. В результате среднее за период этой «внутренней» прецессии значение результирующего магнитного момента атома оказывается направленным противоположно \mathbf{K} .

Соотношение это было доказано нами в § 70 для случая, когда момент \mathbf{M} создается орбитальным движением электронов и ΔW определяется изменением их *кинетической* энергии. Однако формула (71.7) остается справедливой и для твердого магнитного диполя, в таком случае ΔW равно *потенциальной* энергии этого диполя в поле \mathbf{H} [см. уравнение (56.5)]. Таким образом, формула (71.7) носит универсальный характер, и вытекающий из нее закон Кюри (70.4) остается применимым при любом соотношении между орбитальной и спиновой составными частями полного магнитного момента атома \mathbf{M} .

Что же касается диамагнитных атомов, то их полный магнитный и механический моменты в отсутствие магнитного поля равны нулю, и поэтому можно ожидать, что учет спинового момента электрона не повлияет на результаты § 69. Действительно, квантовомеханические вычисления приводят к выводу, что формула (69.4) для восприимчивости диамагнетиков остается справедливой и при учете спина электронов¹⁾.

3. Таким образом, учет спина электронов не вносит никаких изменений в основные соотношения теории намагничения диа- и парамагнетиков. Существуют, однако, и такие макроскопические явления (помимо ферромагнетизма, о котором речь ниже), для правильного объяснения которых учет спина является необходимым. Это так называемые *магнитно-механические*, или *гиромагнитные* явления, состоящие, во-первых, в том, что при намагничивании пара- или ферромагнитных²⁾ тел тела эти приходят во вращательное движение вокруг направления намагничивания, и, во-вторых, в том, что при вращении этих тел в них возникает намагничение, параллельное оси вращения. Обусловливаются эти явления тем, что, согласно уравнению (71.5), магнитный и механический моменты каждого атома пропорциональны друг другу. Поэтому намагничение вещества, т. е. появление результирующего магнитного момента единицы объема, связано с появлением соответствующего момента количества движения, и обратно.

Рассмотрим сначала момент количества движения какого-либо атома относительно какой-либо неподвижной (относительно инерциальной системы) точки O . Как известно из механики, момент количества движения системы материальных точек (в нашем

¹⁾ Мы вовсе не касаемся в этой книге вопроса о диа- и парамагнетизме свободных электронов в металлах, требующего специального рассмотрения (см., например, книгу С В. Вонсовского, цитированную в примечании к с 317).

²⁾ Хотя мы ферромагнетиков до сих пор и не рассматривали, однако как формулы (71.1)–(71.6), так и все дальнейшее содержание этого параграфа имеют совершенно общий характер и в равной мере применимы как к пара-, так и к ферромагнетикам.

случае атома) равен сумме того момента количества движения, которым обладала бы система, если бы вся ее масса была сосредоточена в ее центре инерции, и того момента количества движения, который соответствует движению точек системы относительно ее центра инерции. Центр инерции атома можно считать совпадающим с его ядром. Поэтому общий момент количества движения атома \mathbf{K} будет равен сумме момента \mathbf{K}_a , соответствующего движению центра инерции (т. е. ядра) атома, и момента \mathbf{K}_e , соответствующего движению электронов относительно ядра:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_a + \mathbf{K}_e.$$

Общий момент количества движения единицы объема тела будет равен

$$\sum \mathbf{K} = \sum \mathbf{K}_a + \sum \mathbf{K}_e,$$

где знак \sum означает суммирование по всем атомам, находящимся в единице объема. Приняв во внимание связь между механическим и магнитным моментами электронной оболочки атома, т. е. уравнение (71.5), получим

$$\sum \mathbf{K} = \sum \mathbf{K}_a + \eta'' \sum \mathbf{M} = \sum \mathbf{K}_a + \eta'' \mathbf{I},$$

ибо сумма $\sum \mathbf{M}$, по определению, равна намагничению тела¹⁾.

Рассмотрим теперь процесс намагничивания пара- и ферромагнетиков. Непосредственное воздействие магнитного поля на электронную оболочку атома вызывает лишь прецессию этой оболочки; диамагнитным эффектом этой прецессии, ввиду его малости, мы пренебрежем. Изменение же направлений магнитных осей атомов, являющееся причиной пара- и ферромагнитного намагничения, происходит, как мы видели, лишь при соударении атомов или, вообще говоря, при наличии взаимодействия между атомами. Лишь под влиянием этого взаимодействия и происходит поворот осей атомов по направлению поля \mathbf{H} , т. е. изменение направления как магнитного момента \mathbf{M} , так и непосредственно связанного с ними механического момента \mathbf{K}_e электронов, входящих в состав атомов. Так как при взаимодействии атомов должен выполняться закон сохранения момента количества движения, то сумма $\sum \mathbf{K}$ должна оставаться постоянной²⁾, и изменение $\sum \mathbf{K}_e$ должно компенсироваться соответствующим изменением $\sum \mathbf{K}_a$.

¹⁾ Движение атома в целом ($\sum \mathbf{K}_a$) не создает магнитного поля, если атом нейтрален (не ионизован).

²⁾ Для случая намагничения тела вращения, ось которого параллельна внешнему магнитному полю \mathbf{H} , легко, основываясь на соображениях симметрии и на формуле (83.4) гл. VI, непосредственно доказать, что момент \mathbf{N} сил внешнего поля, приложенных к намагничиваемому телу, действительно равен нулю и что, таким образом, $\sum \mathbf{K}$ должна при намагничении оставаться постоянной.

Предположим, что до намагничивания не только $\sum \mathbf{K}_e$, но и $\sum \mathbf{K}_a$, а значит, и $\sum \mathbf{K}$ равнялись нулю. В этом случае, согласно последнему уравнению, возникновение пропорционально $\sum \mathbf{K}_e$ намагничения \mathbf{I} сопровождается одновременным возникновением момента $\sum \mathbf{K}_a$, равного

$$\sum \mathbf{K}_a = -\eta'' \mathbf{I}. \quad (71.8)$$

Предположим, далее, что намагничиванию подвергается твердый пара- или ферромагнетик. Атомы твердого тела не могут двигаться порознь, и наличие момента количества движения атомов тела $\sum \mathbf{K}_a$ означает в этом случае вращение всего тела в целом. Угловая скорость вращения ω , которую должно приобрести тело при возникновении намагничения \mathbf{I} , определяется из равенства

$$\left| \sum \mathbf{K}_a \right| = Q\omega = -\eta'' I, \quad (71.9)$$

где Q — момент инерции тела относительно оси, параллельной направлению намагничения и проходящей через центр инерции тела. Стало быть, если намагничивать, например, свободно подвешенный железный стерженек, то стерженек этот должен приобрести вращение вокруг оси намагничивания с угловой скоростью ω (*эффект Эйнштейна-де Хааса*). Так как ω , Q и I могут быть непосредственно измерены, то уравнение (71.9) дает возможность определить отношение механического и магнитного моментов атома η'' ¹⁾.

Легко показать, что и обратно, если привести стерженек в быстрое вращение, то в нем должно возникнуть намагничение, которое зависит от скорости вращения и от η'' (*эффект Барнетта*)²⁾. Не останавливаясь подробно на теории этого эффекта, заметим только, что он вполне аналогичен следующему известному механическому явлению: если укрепить на подставке гироскоп (которому в нашем случае соответствуют электронные орбиты) и привести подставку (кристаллический скелет твердого тела) во вращение, то ось вращения гироскопа будет стремиться установиться по направлению оси вращения подставки (чему в нашем случае соответствует намагничение).

¹⁾ Практически опыт ставится следующим образом: стерженек подвешивается на ниточке так, что его ось совпадает с осью катушки, обтекаемой переменным током. Ток этот периодически перемагничивает стерженек, сообщая ему при этом каждый раз определенный момент вращения $\sum \mathbf{K}_a$. Зная Q , I и крутильную упругость нити, можно по амплитуде крутильных колебаний стерженька определить η'' .

²⁾ Более подробно о трактовке экспериментов Барнетта см.: Гинзбург В.Л. Памяти А.А. Андронова. — М.: Изд-во АН СССР, 1955; Цидильковский И.М. // УФН. 1975. Т. 115. С. 321.

Ряд экспериментальных исследований подтвердил существование предсказанных электронной теорией гиromагнитных эффектов. При этом, в частности, подтвердилось, что магнетизм обусловливается движением *отрицательных* электрических зарядов (электронов), ибо значения коэффициента η'' оказались отрицательными [положительное направление оси вращения тела оказалось совпадающим с направлением его намагничивания, —ср. уравнение (71.8)].

Что же касается отношения механического и магнитного моментов атома η'' , то значения η'' , как и следовало ожидать, оказались лежащими между значениями универсальных постоянных η и η' , определяемых уравнениями (71.2) и (71.4).

Весьма существенно, что для всех исследованных *ферромагнетиков* (железо, никель, кобальт, ряд сплавов) коэффициент η'' оказался равным η' . Это показывает, что *магнетизм ферромагнетиков обусловливается одним лишь спином электронов*, а не их орбитальным движением.

§ 72. Ферромагнетизм. Молекулярное поле Вейсса

1. Как и в случае парамагнетизма, намагничение ферромагнетиков объясняется упорядочением ориентации магнитных моментов атомов ферромагнетика. Чрезвычайная же сложность ферромагнитных явлений обусловливается весьма значительными силами взаимодействия между смежными атомами ферромагнетика, зависящими от относительной ориентации их магнитных осей. По сравнению с этими силами, соответствующие силы взаимодействия в парамагнетике совершенно ничтожны. Этими силами взаимодействия объясняются отсутствие пропорциональности между намагничением ферромагнетика и внешним магнитным полем, остаточное и спонтанное намагничение и т. д.

Природа этих сил взаимодействия (так называемых «*обменных сил*» между электронами атомов ферромагнетика) совершенно не поддается объяснению в рамках классической физики, и только квантовая механика принесла с собою выяснение истинной природы ферромагнетизма.

Однако уже чисто формальное введение зависящих от ориентации сил взаимодействия между атомами позволило в рамках классической физики разобраться в целом ряде основных закономерностей ферромагнетизма. Поэтому мы изложим сначала основы классической теории ферромагнетизма, разработанной Вейссом, и лишь в конце параграфа коснемся вопроса об истинной природе введенного им в рассмотрение «молекулярного поля сил».

2. Согласно теории Вейсса поле сил, действующих на магнитный момент атома ферромагнетика, может быть сведено к сумме

поля магнитного \mathbf{H} и некоторого «молекулярного поля», учиты-вающего воздействие на данный атом смежных атомов ферромагнетика и пропорционального его намагничиванию I . Иными словами, можно сказать, что «эффективное» магнитное поле $\mathbf{H}_{\text{эф}}$ в ферромагнетике равно сумме истинного магнитного поля \mathbf{H} и молекулярного поля bI :

$$\mathbf{H}_{\text{эф}} = \mathbf{H} + bI, \quad (72.1)$$

где b есть некоторая положительная постоянная, характеризую-щая свойства данного ферромагнетика.

Собственно говоря, эффективное магнитное поле выражается формулой того же типа и в том случае, когда никакого особого молекулярного поля нет и зависящие от относительной ориента-ции атомов силы взаимодействия между ними сводятся к силам магнитным. Действительно, в § 28 мы показали, что при извест-ных предположениях эффективное, т. е. действующее на диполь, электрическое поле в диэлектриках с квазиупругими диполями выражается формулой (28.6). Заменяя в этой формуле электри-ческие величины E и P соответствующими магнитными \mathbf{H} и I , получаем

$$\mathbf{H}_{\text{эф}} = \mathbf{H} + \frac{4\pi}{3} I. \quad (72.2)$$

Однако, как мы увидим ниже, экспериментальные определе-ния постоянной Вейсса b в ферромагнетиках приводят к столь большим значениям этой постоянной, что молекулярное поле Вейсса никак не может быть сведено к магнитному взаимодей-ствию атомов.

Согласно формуле (72.1) та доля энергии атома, которая за-висит от направления его магнитного момента, будет выражать-ся уже не формулой (70.3) или (71.7), а формулой

$$U = -M\mathbf{H}_{\text{эф}} = -M(\mathbf{H} + bI). \quad (72.3)$$

При этом для дальнейшего совершенно не существенно, является ли эта энергия потенциальной или кинетической, или же частью потенциальной и частью кинетической (см. § 71, с. 319).

Согласно (72.3) энергия атома при прочих равных условиях будет тем меньше, чем ближе совпадает направление его маг-нитного момента с направлением намагничения I тела. Другими словами, наличие сильного молекулярного поля должно прояв-ляться в тенденции всех атомов ориентироваться в одном и том же направлении, т. е. в тенденции к самопроизвольному спонтан-ному намагничению тела.

Сделав основное допущение, выражаемое уравнением (72.1), мы можем в дальнейшем воспользоваться теоремой Больцмана и повторить в основном рассуждения § 29 и 70. Число атомов в единице объема ферромагнетика, угол оси которых с направле-нием эффективного поля $H_{\text{эф}}$ лежит в пределах между ϑ и $\vartheta + d\vartheta$,

будет равно [ср. уравнение (29.2)]

$$dN = ce^{a \cos \vartheta} \sin \vartheta \cdot d\vartheta,$$

где введено обозначение [ср. уравнение (29.3)]¹⁾

$$a = \frac{MH_{\text{эф}}}{kT} = \frac{M(H + bI)}{kT}. \quad (72.4)$$

При рассмотрении диэлектриков с твердыми диполями мы ограничились тем практически всегда осуществляющимся случаем, когда $a \ll 1$, и соответственно упростили все вычисления. В случае же ферромагнетиков условие $a \ll 1$, вообще говоря, не выполняется, и мы вынуждены провести все вычисления без упрощений.

Коэффициент пропорциональности c можно определить из того условия, что общее число всех атомов в единице объема должно равняться N .

$$N = \int dN = c \int_0^{\pi} e^{a \cos \vartheta} \sin \vartheta \cdot d\vartheta = \frac{c}{a} (e^a - e^{-a}).$$

Разрешая это равенство относительно c , получаем

$$c = \frac{aN}{e^a - e^{-a}}. \quad (72.5)$$

Определим теперь результирующий магнитный момент единицы объема тела, т. е. его намагничение I . Вектор I считаем параллельным эффективному полю $\mathbf{H}_{\text{эф}}$ (см. примечание к с. 290), поэтому его значение будет равно сумме проекций моментов всех N атомов на направление $\mathbf{H}_{\text{эф}}$. Общий момент dN атомов, оси которых лежат между ϑ и $\vartheta + d\vartheta$, равен $M \cdot dN$, а проекция этого момента на направление $\mathbf{H}_{\text{эф}}$ равна $M \cdot dN \cdot \cos \vartheta$. Следовательно, намагничение тела равно

$$\begin{aligned} I &= \int M \cos \vartheta \cdot dN = cM \int_0^{\pi} e^{a \cos \vartheta} \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta = \\ &= cM \left(\frac{e^a + e^{-a}}{a} - \frac{e^a - e^{-a}}{a^2} \right), \end{aligned}$$

или, по внесении значения c из уравнения (72.5),

$$I = NM \left(\operatorname{cth} a - \frac{1}{a} \right), \quad (72.6)$$

¹⁾ Абсолютная величина $H_{\text{эф}}$ равна абсолютной величине $H + bI$ только в том случае, если вектор \mathbf{H} параллелен \mathbf{I} . Хотя ферромагнетики анизотропны и поэтому в них параллельность векторов \mathbf{H} и \mathbf{I} имеет место лишь при определенной ориентации этих векторов, однако для простоты мы только этим случаем и ограничимся.

где cth означает гиперболический котангенс a , определяемый уравнением

$$\operatorname{cth} a = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}}.$$

3. Совокупность формул (72.4) и (72.6) позволяет определить намагничение I . Прежде чем применять их к ферромагнетикам, поучительно применить их к случаю парамагнетизма, характеризуемому отсутствием молекулярного поля. Для этого достаточно в уравнении (72.4) положить постоянную b равной нулю¹⁾. Формула (72.6) была получена впервые Ланжевеном как раз для этого частного случая и носит его имя, а кривая $\operatorname{cth} a - 1/a$ называется *кривой Ланжевена*.

В случае $a \ll 1$ можно разложить $\operatorname{cth} a$ в ряд по степеням a :

$$\operatorname{cth} a = \frac{1}{a} + \frac{a}{3} - \frac{a^3}{45} + \dots$$

Внося это в уравнение (72.6), ограничиваясь двумя первыми членами ряда и принимая во внимание уравнение (72.4), получаем при $b = 0$

$$I = NMa = \frac{NM^2}{3kT} H.$$

Следовательно, восприимчивость κ в этом случае равна

$$\kappa = \frac{NM^2}{3kT},$$

что совпадает с ранее полученной нами формулой (70.4) (закон Кюри). Если a сравнимо с единицей или больше единицы, нужно, конечно, пользоваться не этими приближенными формулами, а точной формулой (72.6). Когда a стремится к бесконечности (сильное магнитное поле при низкой температуре), $\operatorname{cth} a$ стремится к единице и, стало быть, согласно уравнению (72.6), намагничение I асимптотически стремится к предельному значению

$$I_0 = NM, \quad (72.7)$$

соответствующему установке осей всех атомов в одном направлении (*насыщение намагничения*).

4. Возвращаясь к ферромагнетикам ($b \gg 1$), предположим сначала, что магнитное поле H либо совсем отсутствует, либо настолько мало, что в формуле (72.4) им можно пренебречь по сравнению с молекулярным полем bI и положить, пользуясь обозначением (72.7):

$$a = \frac{MbI}{kT} = \frac{NMBI}{NkT} = \frac{bI_0 I}{NkT} = \left(\frac{bI_0^2}{NkT} \right) \frac{I}{I_0}.$$

¹⁾ Согласно уравнению (72.2) $b = \frac{4}{3}\pi$. Однако в парамагнетиках членом bI можно пренебречь, ибо в них $I \ll H$.

Если ввести обозначение

$$\theta = \frac{bI_0^2}{3Nk}, \quad (72.8)$$

то это соотношение можно записать так:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{T}{3\theta} a. \quad (72.9)$$

Заметим, что величина θ , характеризующая собой свойства ферромагнетика, имеет размерность температуры. С другой стороны, уравнение кривой Ланжевена (72.6) может быть на основании (72.7) записано так:

$$\frac{I}{I_0} = \operatorname{cth} a - \frac{1}{a}. \quad (72.10)$$

Подставляя a из уравнения (72.9) в уравнение (72.10), можно получить (неявную) функциональную зависимость I/I_0 от T/θ .

Проще, однако, прибегнуть к графическому методу. На рис. 67 нанесена зависимость I/I_0 от a , причем кривая соответствует уравнению (72.10), а прямая AO — уравнению (72.9) (при определенном значении отношения T/θ). Очевидно, что фактическое относительное намагничение тела I/I_0 , соответствующее заданному значению T/θ (т. е. заданному наклону прямой OA), определяется точками пересечения универсальной (не зависящей от свойств и состояния тела) кривой Ланжевена $\operatorname{cth} a - 1/a$ с прямой OA .

В изображенном на рис. 67 случае таких точек пересечения две: одна соответствует отсутствию намагничения ($I = 0$), другая (точка A) — намагничению примерно до 0,8 насыщения. Чтобы выяснить, каким именно намагничением будет фактически обладать тело при заданном T/θ , необходимо установить, какое из этих двух состояний тела является *устойчивым*. Чтобы объяснить основные свойства ферромагнетиков, необходимо допустить, что устойчивой является точка A , соответствующая намагниченному состоянию тела, тогда как ненамагниченное состояние $I = 0$ неустойчиво и в действительности не реализуется. Это допущение вполне подтверждается квантовомеханическими расчетами, согласно которым намагниченное состояние ферромагнетиков соответствует минимуму их свободной энергии.

Все изложенное остается применимым ко всем значениям отношения T/θ , при которых прямая [уравнение (72.9)] имеет

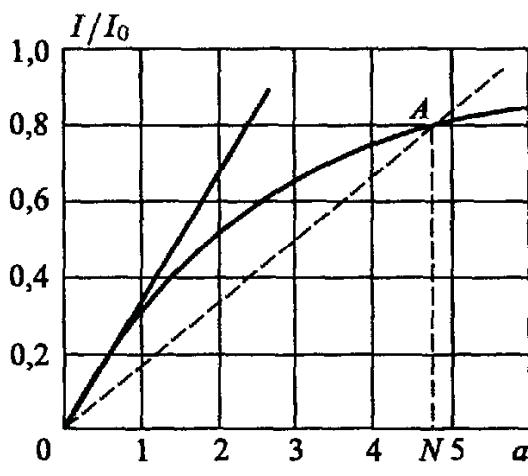


Рис. 67

с кривой Ланжевена [уравнение (72.10)] две общие точки. Начало координат ($I = a = 0$) всегда является такой общей точкой. Что же касается второго пересечения прямой (72.9) с кривой Ланжевена, то, как явствует из формы этой кривой, оно будет иметь место только в том случае, если наклон этой прямой к оси абсцисс меньше наклона касательной, проведенной к кривой Ланжевена в начале координат (и нанесенной на наш рисунок). Наклон этой касательной равен

$$\left[\frac{d}{da} \left(\operatorname{cth} a - \frac{1}{a} \right) \right]_{a=0} = \frac{1}{3},$$

а наклон прямой (72.9) равен $T/3\theta$. Следовательно, прямая будет дважды пересекаться с кривой Ланжевена в том случае, если $T/3\theta < 1/3$ и, стало быть, $T < \theta$.

Итак, из изложенной теории вытекает, что если $T < \theta$, то устойчивым является только намагниченное состояние, и следовательно, ферромагнетик должен и в отсутствие внешнего магнитного поля быть намагниченным (спонтанное намагничение), причем намагничение определяется второй точкой пересечения прямой (72.9) с кривой Ланжевена (точка A на рис. 67). Если же $T > \theta$, то при отсутствии внешнего магнитного поля намагничение I должно равняться нулю, т. е. при высокой температуре тело должно терять свойство спонтанно намагничиваться.

Это последнее обстоятельство соответствует тому экспериментальному факту, что при нагревании все ферромагнетики при некоторой определенной температуре теряют свои ферромагнитные свойства и становятся парамагнитными. Эта характерная для каждого ферромагнетика критическая температура (758°C для железа, 374°C для никеля и т. д.) носит название «температуры Кюри» или «точки Кюри». Таким образом, оказывается, что постоянная θ , определяемая уравнением (72.8), физически соответствует температуре Кюри.

Очевидно, существование точки Кюри, выше которой тело теряет ферромагнитные свойства, обусловливается тем, что при достаточном нагревании обесспорядочивающее влияние теплового движения на ориентацию магнитных осей атомов должно в конце концов стать настолько значительным, чтобы преодолеть силы взаимодействия атомов, стремящиеся установить их магнитные оси параллельно друг другу.

5. Ранее мы обошли молчанием некоторые весьма существенные вопросы. Прежде всего теория Вейсса, как мы видели, приводит к заключению, что при температуре ниже точки Кюри все ферромагнетики должны самопроизвольно намагничиваться и в отсутствие внешнего магнитного поля. Между тем, обычное состояние, например, железа при $T < \theta$ есть, вообще говоря, состояние немагнитное, хотя, конечно, и существуют так называемые постоянные магниты, остаточное намагничение и т. д.

Объясняется это кажущееся противоречие тем, что всякий ферромагнетик распадается в магнитном отношении на ряд чрезвычайно малых микроскопических автономных областей¹⁾. Каждая такая «вейссова область» всегда намагничена до значения, соответствующего теории (точка A на рис. 67). Однако в обычных условиях различные «вейссовы области» намагничены в различных направлениях. Благодаря этому средний магнитный момент всего тела равен нулю, и намагничение отдельных областей остается незаметным²⁾.

При включении внешнего магнитного поля число и размеры областей, намагничение которых параллельно полю (или близко к параллельности), растут за счет областей, намагниченных в противоположном направлении, и тело в целом намагничивается. Если после этого внешнее поле выключить, то раз возникшая упорядоченность направлений намагничивания отдельных областей частично сохраняется (остаточное намагничение) до тех пор, пока ее не уничтожат какие-либо новые факторы: нагревание, включение поля обратного направления, превышающего известный минимум (носящий название коэрцитивной силы), и т. п.

Исходя из этих общих представлений и учитывая еще ряд других существенных обстоятельств³⁾, на которых мы здесь

¹⁾ Эти области, которые сейчас принято называть доменами, не нужно смешивать с отдельными микрокристалликами, из которых состоят обычно поликристаллические ферромагнетики. Сколь угодно тщательно приготовленный монокристалл железа также распадается в магнитном отношении на такие области.

²⁾ Намагничение всего ферромагнетика в одном определенном направлении в отсутствие внешнего поля энергетически невыгодно. Это вытекает из того, что, согласно квантовой механике, силы взаимодействия между атомами, соответствующие вейссову молекулярному полю, весьма быстро убывают с расстоянием и практически действуют только смежными атомами. Поэтому при распадении магнетика на вейссовы области увеличивается потенциальная энергия только тех атомов, которые прилегают к поверхностям раздела вейссовых областей: только у этих атомов появляются по другую сторону поверхности раздела соседи с непараллельно направленным магнитным моментом (силы взаимодействия между смежными атомами стремятся установить их магнитные моменты параллельно друг другу). С другой стороны, при распадении магнетика на вейссовы области уменьшается энергия магнитного поля, возбуждаемого ферромагнетиком, ибо поля различно ориентированных вейссовых областей в значительной мере взаимно компенсируются. Таким образом, дробление вейссовых областей ведет, с одной стороны, к увеличению площади, а стало быть, и потенциальной энергии поверхностей раздела, с другой же стороны — к уменьшению объемной энергии магнитного поля. Фактический (средний) размер вейссовых областей определяется минимумом суммарной свободной энергии ферромагнетика.

³⁾ Магнитную анизотропию, связанную с кристаллической структурой ферромагнетиков и проявляющуюся в том, что в различных направлениях они намагничиваются с различной легкостью, внутренние напряжения и искажения кристаллической решетки, всегда имеющиеся в реальных телах; магнитострикцию и т. д.

останавливаться не можем, удается, по крайней мере качественно, а частично и количественно, объяснить все остальные закономерности, наблюдаемые в ферромагнетиках (зависимость I от H , петля гистерезиса и т. д.).

6. Мы принуждены, за недостатком места, ограничиться кратким рассмотрением одного лишь добавочного вопроса. При изложении математической части теории Вейсса мы предположили, что магнитным полем H можно пренебречь, по сравнению с молекулярным полем bI . Каково же это поле? Определив на опыте температуру Кюри θ и намагничение насыщения I_0 ¹⁾, можно по формуле (72.8) вычислить bI . Оказывается, что, например, в железе, при нормальных температурах, bI достигает значений порядка $7 \cdot 10^6$ Гс², т. е., действительно, весьма значительно превышает напряженность практически доступных магнитных полей. Для постоянной b получаются при этом значения порядка $4 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^4$.

Это исключительно большая величина молекулярного вейссова поля представляла собою основное затруднение для классической теории ферромагнетизма и обрекала на неудачу все попытки свести это поле к магнитному взаимодействию атомов ферромагнетика. Действительно, формула (72.2), относящаяся к квазиупругим диполям и приводящая к значению $b = 4/3\pi$, к ферромагнетикам, конечно, неприменима. Однако и в магнетике, атомы которого обладают постоянным магнитным моментом M , максимально возможная напряженность эффективного поля, обусловленного магнитным взаимодействием атомов, не может по порядку величины существенно превышать напряженность M/R^3 поля диполя M в центре смежного атома (здесь R означает расстояние между смежными атомами ферромагнетика). По порядку величины магнитный момент атомов $M \sim 10^{-20}$ Гс·см³ и $R \sim 2 \cdot 10^{-8}$ см, так что $M/R^3 \sim 10^3$ Гс, т. е. в тысячи раз меньше напряженности вейссова поля. Все многочисленные попытки обойти это затруднение в рамках классической теории оказались совершенно несостоятельными. Только квантовая механика позволила разрешить вопрос о природе вейссова молекулярного поля.

Вкратце это объяснение сводится к следующему. Если положить в основу обычный кулонов закон взаимодействия зарядов электронов и атомных ядер, но применить к определению движения электронов законы квантовой механики, то результат оказывается таким, какой на основе законов движения классической

¹⁾ Для последнего, конечно, вовсе нет необходимости достигнуть на опыте полного насыщения, а достаточно определить ряд значений I для сравнительно больших значений a и экстраполировать по кривой Ланжевена к $a = \infty$.

механики получился бы при наличии, помимо кулоновых сил, еще некоторых добавочных сил взаимодействия между электронами. Таким образом, если мы хотим пользоваться представлениями классической физики, то мы должны ввести в рассмотрение соответствующие добавочные силы, которые получили название обменных сил. Роль их в явлениях магнетизма сводится к тому, что при известных условиях, относящихся к электронному строению атомов, структуре кристаллической решетки и т. п., эти обменные силы стремятся установить спины электронов в смежных атомах магнетика параллельно друг другу, т. е. стремятся намагнитить тело, являющееся при выполнении этих условий ферромагнитным. В согласии с этим изучение гиromагнитных эффектов в ферромагнетиках показало (см. § 71), что ферромагнетизм обусловливается спином электронов, а не их орбитальным движением.

Как показывает теоретический расчет, обменное взаимодействие атомов может быть с достаточной точностью учтено введением в рассмотрение некоторого эквивалентного ему «молекулярного» поля bI . Таким образом, формальная вейссова теория ферромагнетизма получает физическое обоснование на основе общих положений квантовой механики, без каких-либо специальных допущений и гипотез.

Конечно, наряду с обменным взаимодействием, вытекающим из закона Кулона, существует также и обычное классическое магнитное взаимодействие атомов, эквивалентное взаимодействию соответствующих магнитных диполей. Однако, как уже указывалось, оно в несколько тысяч раз слабее обменного взаимодействия. Все же именно магнитным взаимодействием атомов обусловливаются в первую очередь такие, например, явления, как магнитная анизотропия и магнитострикция.

§ 73. Уравнения поля в идеализированных ферромагнетиках (обычный вариант). Постоянные магниты

1. Результаты § 60–62 носят совершенно общий характер и применимы к любым магнетикам. Однако в § 63 мы сделали допущение, что намагничение среды **I** пропорционально напряженности магнитного поля **H**, и тем самым исключили из своего рассмотрения ферромагнетики. Теперь нам предстоит восполнить этот пробел.

Явления гистерезиса в ферромагнетиках означают, что между **I** и **H** нет однозначного соотношения. Но даже в таких ферромагнетиках, в которых гистерезисом, ввиду его незначительности, можно пренебречь, нелинейный характер зависимости **I** от **H** чрезвычайно усложняет теорию. Чтобы избежать этих услож-

нений, мы ограничимся рассмотрением так называемых «идеализированных ферромагнетиков», или «постоянных магнитов», предположив, что намагничение I этих магнетиков складывается из суммы *индуцированного намагничения*, являющегося линейной функцией напряженности поля, и *постоянного намагничения* I_0 , от напряженности поля вовсе не зависящего. В этом параграфе мы будем исходить из общепринятого допущения, что индуцированное намагничение пропорционально *напряженности магнитного поля*, т. е. положим

$$I = I_0 + \mu H, \quad (73.1)$$

где I_0 — заданная функция точки, а μ от H не зависит. (Несколько иной вариант теории постоянных магнитов будет рассмотрен в следующем параграфе.) Очевидно, что уравнение (73.1) включает в себя в качестве частного случая ($I_0 = 0$) формулу (63.1), справедливую для пара- и диамагнетиков. Те ферромагнитные тела, в которых I_0 отлично от нуля, мы будем называть *постоянными магнитами*.

Таким образом, зависимость I от H в идеализированных ферромагнетиках остается *линейной*, и мы получаем возможность пользоваться принципом суперпозиции полей.

Несмотря на то, что свойства реальных ферромагнетиков весьма существенно отличаются от свойств наших идеализированных ферромагнетиков (как показывает уже самая возможность изготовления постоянных магнитов из немагнитной стали, размагничения магнитов и т. д.), однако в некоторых случаях формула (73.1) все же является известным приближением к действительности. Так, например, она применима к намагниченной почти до насыщения твердой стали при условии, что изменения внешнего поля достаточно малы. Вместе с тем рассмотрение идеализированных ферромагнетиков позволит нам понять старые теории магнетизма, оперировавшие представлениями о магнитных зарядах или полюсах.

Введенное нами представление об идеализированных ферромагнетиках сводится, согласно (73.1), в сущности к замене ферромагнетика совокупностью постоянного магнита (в строгом смысле этого слова) и парамагнетика.

2. На основании (62.9), (73.1) и (63.2)

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I} = \mu\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I}_0. \quad (73.2)$$

Так как ранее выведенные дифференциальные уравнения поля (62.7) и (62.8) остаются справедливыми в произвольной среде, то полная система уравнений поля при наличии постоянных магнитов приобретает вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I}_0 \quad (73.3)$$

(пограничных условий, однозначно вытекающих из дифференциальных уравнений, для краткости не выписываем). Она отличается от системы уравнений (С) (§ 64, с. 293) только членом $4\pi I_0$ в последнем уравнении и позволяет однозначно определить магнитное поле, если известно распределение электрических токов j в проводниках, распределение *постоянного* намагничения I_0 в ферромагнетиках и, наконец, значение магнитной проницаемости в каждой точке среды.

В этой однозначности проще всего убедиться, разбив напряженность поля \mathbf{H} на сумму напряженностей вихревого и безвихревого полей:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' + \mathbf{H}'', \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}' + \mathbf{B}'', \quad (73.4)$$

и положив

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}' = \frac{4\pi}{c} j, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}' = 0, \quad \mathbf{B}' = \mu \mathbf{H}', \quad (73.5)$$

и

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}'' = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}'' = 0, \quad \mathbf{B}'' = \mu \mathbf{H}'' + 4\pi \mathbf{I}_0. \quad (73.6)$$

Уравнения (73.5) для поля токов \mathbf{H}' полностью совпадают с системой (С) в § 64 и, по доказанному, в том же § 64 однозначно определяют \mathbf{H}' , если известны значения j и μ в каждой точке пространства. Уравнения же (73.6) для поля \mathbf{H}'' постоянных магнитов могут быть записаны следующим образом:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}'' = 0, \quad \operatorname{div} \mu \mathbf{H}'' = 4\pi \rho_m^0, \quad (73.7)$$

где нами введено обозначение

$$\rho_m^0 = -\operatorname{div} \mathbf{I}_0. \quad (73.8)$$

Величину ρ_m^0 принято называть плотностью *постоянных магнитных зарядов*. Этот исторически сложившийся термин весьма удобен, хотя, конечно, и является, с современной точки зрения, совершенно условным.

При такой записи уравнений поля выявляется полная аналогия между магнитным полем \mathbf{H}'' постоянных магнитов и электрическим полем \mathbf{E} электрических зарядов: поле \mathbf{H}'' , будучи безвихревым, обладает, подобно \mathbf{E} , однозначным скалярным потенциалом ψ :

$$\mathbf{H}'' = -\operatorname{grad} \psi; \quad (73.9)$$

далее, истоками вектора $\mu \mathbf{H}''$ (отличающегося от магнитной индукции \mathbf{B} на $4\pi I_0$) являются постоянные магнитные заряды ρ_m^0 , подобно тому как *свободные* электрические заряды ρ являются истоками вектора $\epsilon \mathbf{E}$ (равного электрической индукции \mathbf{D}). Таким образом, существует полное соответствие между \mathbf{H}'' и \mathbf{E} , между $\mu \mathbf{H}'' = \mathbf{B}'' - 4\pi \mathbf{I}_0$ и $\epsilon \mathbf{E} = \mathbf{D}$ и, наконец, между ρ_m^0 и ρ ;

следовательно, к полю постоянных магнитов применимы все результаты, полученные при изучении диэлектриков (с заменой электрических величин на соответствующие магнитные).

В частности, из результатов § 22 следует, что поле \mathbf{H}'' однозначно определяется заданием μ как функции точки и заданием плотности ρ_m^0 постоянных магнитных зарядов, которая в свою очередь определяется заданием I_0 как функции точки.

Таким образом, магнитное поле \mathbf{H} может быть *однозначно* представлено как наложение двух независимых полей — поля токов \mathbf{H}' и поля магнитов \mathbf{H}'' . Поле токов уже было рассмотрено нами ранее, так что мы теперь можем ограничиться рассмотрением поля постоянных магнитов \mathbf{H}'' .

3. Воспользовавшись соотношением $\mu\mathbf{H}'' = \mathbf{H}'' + 4\pi\chi\mathbf{H}''$, можно представить второе из уравнений (73.7) следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{H}'' = 4\pi\rho_m^0 - 4\pi \operatorname{div} \chi\mathbf{H}''.$$

Таким образом, ρ_m^0 соответствует плотности *свободных* электрических зарядов (заданием ρ_m^0 определяется поле \mathbf{H}''), тогда как

$$-\operatorname{div} \chi\mathbf{H}'' = \rho'_m \quad (73.10)$$

соответствует плотности *связанных* электрических зарядов ($\rho_{\text{свз}} = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\operatorname{div} \alpha\mathbf{E}$); ρ'_m можно назвать плотностью *связанных* магнитных зарядов, *индуцированных* в магнетике полем \mathbf{H}'' ¹⁾.

Однако в некотором ином отношении ρ_m^0 соответствует плотности не свободных, а *связанных* электрических зарядов: в противоположность свободным электрическим зарядам постоянные магнитные заряды не могут быть отделены друг от друга. Действительно, рассмотрим произвольное тело, окруженное со всех сторон неферромагнитной средой. Проведем в этой среде какую-либо замкнутую поверхность S , охватывающую это тело и ограничивающую объем V . Проинтегрировав уравнение (73.8) по этому объему V и воспользовавшись теоремой Гаусса (17*), получим

$$\int_V \rho_m^0 dV = - \oint_S I_{0n} dS = 0, \quad (73.11)$$

ибо на поверхности S , т. е. в неферромагнитной среде, постоянное намагничение I_0 тождественно равно нулю. Таким образом, полный «магнитный заряд» любого постоянного магнита всегда равен нулю.

При наличии в поле поверхностей разрыва векторов \mathbf{H}'' и \mathbf{I}_0 и магнитной проницаемости μ предшествующие уравнения дол-

¹⁾ Зная ρ_m^0 и μ , можно определить \mathbf{H}'' , а зная \mathbf{H}'' , можно определить ρ'_m , в частности, если $\rho_m^0 = 0$, то как $\mathbf{H}'' = 0$, так и $\rho'_m = 0$.

жны быть дополнены однозначно вытекающими из них пограничными условиями (ср. § 6 и 49):

$$\begin{aligned} \text{Rot } \mathbf{H}'' &= 0, \quad \text{Div } \mu \mathbf{H}'' = \mu_2 H_{n2}'' - \mu_1 H_{1n}'' = 4\pi\sigma_m^0, \\ \sigma_m^0 &= -\text{Div } \mathbf{I}_0 = -(I_{0,2n} - I_{0,1n}), \quad \sigma_m' = -\text{Div } \kappa \mathbf{H}'', \end{aligned} \quad (73.12)$$

где σ_m^0 и σ_m' означают поверхностную плотность постоянных и индуцированных магнитных зарядов; уравнение же (73.11) должно быть дополнено интегралом по поверхностям разрыва S' вектора \mathbf{I}_0 , лежащего внутри объема V , т. е. суммой поверхностных магнитных зарядов σ_m^0 , находящихся в этом объеме:

$$\int_V \rho_m^0 dV + \oint_{S'} \sigma_m^0 dS = 0. \quad (73.13)$$

Предположим, что постоянный магнит равномерно намагнчен по всему своему объему ($\mathbf{I}_0 = \text{const}$). Тогда все постоянные магнитные заряды будут сосредоточены на поверхности магнита ($\rho_m^0 = 0$). Если, в частности, магнит имеет форму прямого цилиндра и если намагничение \mathbf{I}_0 параллельно оси цилиндра, то все постоянные магнитные заряды будут распределены по основаниям цилиндра с поверхностной плотностью

$$\sigma_m^0 = \pm I_0 \quad (73.14)$$

(ибо на боковой поверхности цилиндра $I_{0n} = 0$, а вне магнита $\mathbf{I}_0 = 0$). Таким образом, такой магнит сечения S можно рассматривать как совокупность двух равных по величине магнитных зарядов:

$$m_0 = \pm I_0 S$$

противоположного знака, распределенных по основаниям магнита (так называемые *полюсы магнита*); поле такого магнита можно рассматривать как наложение полей, возбуждаемых каждым из его полюсов в отдельности. Именно поэтому теории XVIII–XIX вв. оперировали понятием магнитных зарядов или полюсов.

Если, однако, разрезать магнит пополам, то каждая поверхность разреза приобретает характер поверхности разрыва вектора \mathbf{I}_0 , т. е. на ней «появляется» поверхностный магнитный заряд той же плотности $\sigma_m^0 = \pm I_0$, так что сумма зарядов каждого отдельного куска оказывается равной нулю.

4. Из установленного выше соответствия между магнитным полем постоянных магнитов и электрическим полем свободных электрических зарядов вытекает, что в *однородном* магнетике ($\mu = \text{const}$) скалярный потенциал ψ для магнитов равен [ср. (23.2)]:

$$\psi = \frac{1}{\mu} \int \frac{\rho_m^0}{R} dV + \frac{1}{\mu} \int \frac{\sigma_m^0}{R} dS,$$

а напряженность магнитного поля \mathbf{H}'' равна

$$\mathbf{H}'' = \frac{1}{\mu} \int \frac{\mathbf{R}}{R^3} \rho_m^0 dV + \frac{1}{\mu} \int \frac{\mathbf{R}}{R^3} \sigma_m^0 dS. \quad (73.15)$$

Таким образом, *напряженность поля постоянных магнитов в однородной среде*¹⁾ обратно пропорциональна проницаемости среды. В отличие от этого, как мы убедились в § 64, *напряженность магнитного поля токов в однородной среде от проницаемости среды вовсе не зависит*. Причину этого отличия поля магнитов от поля токов мы выясним в следующем параграфе.

5. В теории постоянных магнитов общепринято исходить из допущения, что плотность \mathbf{f} пондеромоторных сил, действующих на постоянные магнитные заряды, по аналогии с электростатикой выражается формулой

$$\mathbf{f} = \rho_m^0 \mathbf{H}. \quad (73.16)$$

Справедливость этой формулы будет доказана нами в § 75. Пока же заметим, что из полной аналогии формул (73.15) и (73.16) с соответствующими формулами электростатики следует, что сила взаимодействия точечных (постоянных) магнитных зарядов в однородной среде определяется *законом Кулона*

$$F = \frac{mm'}{\mu R^2}; \quad (73.17)$$

при этом, конечно, под «точечным» магнитным зарядом или полюсом нужно, очевидно, понимать заряд достаточно малого объема ΔV постоянного магнита:

$$m = \int_{\Delta V} \rho_m^0 dV.$$

Именно этот закон Кулона (73.17) и играл роль основного постулата в теориях магнетизма XVIII–XIX вв.

Согласно (73.16) пондеромоторные силы, испытываемые магнитными зарядами в магнитном поле, определяются напряженностью \mathbf{H} этого поля, тогда как силы, испытываемые электрическими токами, согласно (65.1), определяются магнитной индукцией \mathbf{B} .

Вместе с тем, как только что отмечалось, напряженность поля магнитов в однородной среде обратно пропорциональна проницаемости этой среды μ , тогда как напряженность поля токов в однородной среде от μ не зависит. Сопоставляя эти результаты, мы приходим к следующим выводам: *в однородной магнитной среде ($\mu = \text{const}$) пондеромоторные силы взаимодействия постоянных магнитов обратно пропорциональны μ , силы взаимодействия между током и постоянным магнитом от μ не*

¹⁾ Однородность среды, строго говоря, означает, что μ имеет одинаковое значение во всех точках поля магнитов, в том числе и внутри того материала, из которого изготовлены сами магниты.

зависят и, наконец, как уже отмечалось в § 65, силы взаимодействия токов прямо пропорциональны μ .

Причину этого различия между токами и постоянными магнитами мы выясним в следующем параграфе.

6 Уравнения магнитного поля были получены нами в начале главы из представления, что свойства магнетиков обусловливаются наличием в них молекулярных токов. Не изменения этих уравнений и лишь введя формально понятие плотности магнитных зарядов, определяемое уравнением (73.8), мы показали, что теория постоянных магнитов может быть представлена в форме, соответствующей представлению о существовании реальных магнитных зарядов в молекулах магнетиков.

Хотя никаких магнитных зарядов в действительности не существует, все же в ряде случаев удобно пользоваться этой формой теории, позволяющей непосредственно использовать в теории магнетизма результаты теории диэлектриков.

Вместе с тем доказанная далеко идущая эквивалентность теории молекулярных токов и теории магнитных зарядов делает понятным успех, которым пользовались теории магнетизма XVIII–XIX вв., оперировавшие понятием магнитных зарядов или полюсов. Действительно, благодаря рассмотренной в § 56 эквивалентности элементарных токов и магнитных диполей все *макроскопические уравнения поля в любых магнетиках*, а не только в постоянных магнитах, могут быть формально интерпретированы как с точки зрения современной электронной теории, так и на основе представлений о существовании в молекулах магнетиков магнитных зарядов¹⁾. Если, однако, выйти за рамки макроскопической теории, рассматривающей проницаемость μ как заданную характеристику магнетика, и поставить вопросы о механизме намагничивания, о зависимости значения μ от других характеристик тела и т. д., то сразу же выясняется, что старые теории магнетизма не только не совместимы с современными сведениями о строении атомов, но что даже в области макроскопических явлений они совершенно бессильны, например, объяснить диамагнетизм или гиромагнитные явления (см. § 71).

§ 74. Другой вариант уравнений магнитного поля в идеализированных ферромагнетиках. Эквивалентность электрических токов и постоянных магнитов

1. В предыдущем параграфе мы изложили общепринятую теорию постоянных магнитов, согласно которой как активные, так и пассивные характеристики постоянных магнитов (т. е. как

¹⁾ Если отвлечься от трудности, связанной с тем, что восприимчивость χ диамагнетиков отрицательна

возбуждаемое ими поле, так и силы, испытываемые ими во внешнем магнитном поле) совершенно иначе зависят от магнитной проницаемости среды μ , чем соответствующие магнитные характеристики электрических токов. В настоящем параграфе мы постараемся выяснить смысл и причину этого различия.

Прежде всего нужно отметить, что ряд выводов предыдущего параграфа относился к гипотетическому случаю *строго однородной* в магнитном отношении среды (μ имеет одинаковое значение *во всех точках поля*). Ясно, что этот случай не имеет практического значения.

Действительно, проницаемость материала, из которого изготовлены магниты, вообще говоря, отлична от проницаемости окружающей их среды, и, таким образом, условие постоянства μ во всем поле, вообще говоря, не выполняется. Но даже если бы оно и было выполнено при некотором определенном выборе окружающей магниты среды, то для проверки полученных в § 73 результатов необходимо было бы варьировать проницаемость μ среды и сравнить напряженность поля, пондеромоторные силы и т. д. в средах различной проницаемости. При этом, однако, проницаемость самих постоянных магнитов оставалась бы по необходимости неизменной, т. е. постоянство μ во всем поле нарушилось бы.

Итак, необходимо различать *гипотетический* случай *строго однородной среды* и практически единственно интересный случай *однородности внешней среды* (т. е. среды вне магнитов). Поэтому поставленный в начале параграфа вопрос нужно разбить на два вопроса: 1) чем объясняется установленная в § 73 разница между магнитами и токами в *строго однородной среде*? и 2) как зависит поле магнитов и испытываемые ими силы от проницаемости однородной *внешней* среды?

Рассмотрим эти вопросы по порядку.

2. Установленная в § 73 разница между магнитами и токами в *строго однородной* среде объясняется попросту тем, что мы, следуя исторически сложившейся традиции (о происхождении которой будет сказано ниже), исходили в § 73 из формулы (73.1):

$$\mathbf{I} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{I}_0,$$

т. е. предположили, что индуцированное намагничение $\mathbf{I}_{\text{инд}}$ постоянных магнитов пропорционально *напряженности* поля в них:

$$\mathbf{I}_{\text{инд}} = \mu \mathbf{H}. \quad (74.1)$$

В диа- и парамагнетиках эта формула, очевидно, эквивалентна формуле

$$\mathbf{I}_{\text{инд}} = \frac{\mu}{\mu} \mathbf{B}; \quad (74.2)$$

однако в постоянных магнитах $\mathbf{H} \neq \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$, и эквивалентность фор-

мул (74.1) и (74.2) нарушается. Поэтому, пытаясь установить *линейную* систему уравнений поля в идеализированных ферромагнетиках, которая при $\mathbf{I}_0 = 0$ переходила бы в известные уже нам уравнения поля в диа- и парамагнетиках, мы с равным правом могли бы исходить не из (74.1), а из (74.2), т. е. вместо (73.1) положить:

$$\mathbf{I} = \frac{\kappa}{\mu} \mathbf{B} + \mathbf{I}_0. \quad (74.3)$$

Выбор между (73.1) и (74.3) может быть сделан только на основании более углубленного анализа этих формул, который будет произведен нами несколько позже. Пока же мы рассмотрим вариант уравнений поля, основанный на замене формулы (73.1) формулой (74.3) (мы будем называть его «новым вариантом» в отличие от «обычного варианта»).

Прежде всего в «новом варианте» формула (73.2) заменится формулой

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{I} = \mathbf{H} + \frac{4\pi\kappa}{\mu} \mathbf{B} + 4\pi\mathbf{I}_0,$$

откуда на основании (63.2)

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + 4\pi\mu\mathbf{I}_0. \quad (74.4)$$

Отличие этой формулы от (73.2) сводится к появлению множителя μ в последнем члене справа.

Соответственное изменение должно быть внесено также и в формулы (73.3) и (73.6); далее, в уравнениях (73.8) и (73.12) нужно в новом варианте изменить определение объемной и поверхностной плотности постоянных магнитных зарядов и положить

$$\rho_m^0 = -\operatorname{div} \mu \mathbf{I}_0, \quad \sigma_m^0 = -\operatorname{Div} \mu \mathbf{I}_0. \quad (74.5)$$

Все же остальные (нумерованные) формулы § 73, за исключением формулы (73.14), как легко убедиться, остаются справедливыми и в новом варианте.

Рассмотрим теперь случай *строго однородной* среды. В этом случае можно в формулах (74.5) вынести μ за знак пространственной производной:

$$\rho_m^0 = -\mu \operatorname{div} \mathbf{I}_0, \quad \sigma_m^0 = -\mu \operatorname{Div} \mathbf{I}_0. \quad (74.6)$$

Таким образом, в новой формулировке, в отличие от обычной, *плотность постоянных магнитных зарядов (при заданном постоянном намагничении \mathbf{I}_0) пропорциональна проницаемости μ .*

Внося (74.6) в (73.15), убеждаемся, что *напряженность поля постоянных магнитов (при заданном \mathbf{I}_0) не зависит от проницаемости (строго однородной) среды*, т. е. что прежнее различие в этом отношении между магнитами и токами в новом варианте отпадает.

Наконец, внося (74.6) в (73.16) и допуская, что проницаемость μ постоянна, если не во всей среде, то хотя бы в тех участках ферромагнетика, в которых I_0 отлично от нуля, получаем

$$\mathbf{f} = \rho_m^0 \mathbf{H} = -\mu \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{I}_0. \quad (74.7)$$

Таким образом, в новом варианте силы, действующие на магнитные заряды, определяются (при заданном I_0) не напряженностью поля \mathbf{H} , а вектором $\mu \mathbf{H}$. Таким образом, ввиду независимости \mathbf{H} от μ , пондеромоторные силы взаимодействия магнитов в строго однородной среде, как и силы взаимодействия токов, прямо пропорциональны μ , т. е. и в этом отношении новый вариант устраняет имевшееся в обычном варианте различие между постоянными магнитами и токами.

3. Какой же из вариантов теории постоянных магнитов следует предпочесть?

Обычный вариант теории может быть охарактеризован либо уравнением (73.1), либо эквивалентным ему уравнением (73.8), согласно которому плотность постоянных магнитных зарядов определяется вектором постоянного намагничения I_0 , независимо от проницаемости μ вещества магнита. С другой стороны, новый вариант может быть охарактеризован либо уравнением (74.3), либо эквивалентным ему уравнением (74.5), согласно которому ρ_m^0 , при постоянном I_0 , изменяется пропорционально проницаемости μ магнита.

Если бы существовал способ, сохраняя неизменным постоянное намагничение I_0 изменять проницаемость μ вещества, из которого изготовлен данный магнит, то можно было бы экспериментально установить, какой из вариантов теории соответствует действительности. Так как, однако, такого способа нет, то *различие между обоими вариантами является чисто терминологическим*: ведь все отличие второго варианта от первого сводится к замене уравнения (73.2): $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + 4\pi I_0$ уравнением (74.4): $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + 4\pi \mu I_0$. Так как, по определению, значения I_0 и μ в каждой точке постоянного магнита постоянны во времени, то никакие доступные экспериментальной проверке выводы теории не могут зависеть от того, будет ли разность $\mathbf{B} - \mu \mathbf{H}$ обозначена через $4\pi I_0$ или через $4\pi \mu I_0$.

4. Итак, установленная в § 73 разница между зависимостью активных и пассивных характеристик магнитов и токов от проницаемости строго однородной среды носит, в сущности, терминологический характер. Терминология обычного варианта теории заимствована из теорий магнетизма XIX в., исходивших из представления о существовании реальных магнитных зарядов в молекулах магнетика и о взаимодействии этих зарядов по закону Кулона, и вполне соответствует этим представлениям. Терминология же «нового варианта» соответствует современным представлениям о природе магнетизма. Сказывается это, во-первых,

в том, что она устраняет неоправданное терминологическое различие между зависимостью от μ активных и пассивных характеристик магнитов и токов; во-вторых, она связывает постоянство намагничения I_0 не с постоянством фиктивных зарядов ρ_m^0 , а с *постоянством тех молекулярных токов $j_{\text{мол}}^0$* , которыми это намагничение обусловлено.

Действительно, согласно современным представлениям, постоянное намагничение I_0 должно обуславливаться постоянными молекулярными токами, (средняя) плотность которых связана с I_0 соотношением [см. уравнения (61.9) и (61.10)]:

$$\mathbf{j}_{\text{мол}}^0 = c \operatorname{rot} \mathbf{I}_0, \quad \mathbf{i}_{\text{мол}}^0 = c \operatorname{Rot} \mathbf{I}_0. \quad (74.8)$$

Воспользовавшись уравнениями (74.8) и (74.4), получаем

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \operatorname{rot} \mathbf{H} + 4\pi \operatorname{rot} \mathbf{I}_0 = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{мол}}^0). \quad (74.9)$$

Следовательно, согласно новому варианту, постоянные молекулярные токи совершенно равноправны токам проводимости \mathbf{j} .

Замена же уравнения (74.3) уравнением (73.1), т. е. переход к обычному варианту, нарушает это равноправие, а именно, в этом случае последнее уравнение заменяется следующим:

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \operatorname{rot} \mathbf{H} + 4\pi \operatorname{rot} \frac{\mathbf{I}_0}{\mu} = \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{j} + \frac{1}{\mu} \mathbf{j}_{\text{мол}}^0 \right) + 4\pi \left[\nabla \frac{1}{\mu} \cdot \mathbf{I}_0 \right].$$

Вообще нужно отметить, что хотя и в новом варианте можно оперировать с фиктивной плотностью магнитных зарядов ρ_m^0 и σ_m^0 , однако рациональной характеристикой постоянных магнитов в этом варианте, в отличие от обычного, являются не ρ_m^0 и σ_m^0 , а распределение постоянных молекулярных токов $\mathbf{j}_{\text{мол}}^0$ и $\mathbf{i}_{\text{мол}}^0$. Зная это распределение, можно определить магнитное поле постоянного магнита с помощью формулы (74.8) и испытываемые магнитом пондеромоторные силы с помощью формулы:

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} [\mathbf{j}_{\text{мол}}^0 \mathbf{B}].$$

Эквивалентность этого последнего соотношения формуле (73.16), которой мы пользовались до сих пор, будет доказана в следующем параграфе.

5. Тогда как весь вопрос о магнитах и токах в *строго однородной* среде носит чисто формальный характер, вопрос об активных и пассивных характеристиках магнитов и токов в *однородной внешней* среде, к которому мы теперь перейдем, имеет непосредственное физическое содержание, и ответ на него доступен экспериментальной проверке. Отметим, что ответ на этот последний вопрос будет совершенно одинаковым в обычном и в новом варианте теории.

Рассмотрим сначала постоянный магнит из однородного материала проницаемости μ_i , помещенный в однородную внешнюю среду проницаемости μ_e . Легко убедиться, что никакой однозначной функциональной зависимости напряженности поля магнита во внешней среде от проницаемости этой среды μ_e не существует и что зависимость эта определяется *геометрической* формой магнита.

Рассмотрим, в частности, равномерно намагниченный ($I_0 = \text{const}$) эллипсоид — это один из немногих случаев, в которых удается найти замкнутое аналитическое выражение для поля магнита. Для наших целей достаточно рассмотреть эллипсоид вращения, намагниченный параллельно оси симметрии. Обозначим длину главных осей эллипса через a, b, c , и пусть $b = c$. Можно показать, что напряженность \mathbf{H}_e поля такого магнита в произвольной точке внешней среды следующим образом зависит от μ_e :

$$\mathbf{H}_e = \frac{\mathbf{h}(x, y, z)}{\mu_i + \left(\frac{1}{u} - 1\right) \mu_e}, \quad (74.10)$$

где вектор $\mathbf{h}(x, y, z)$ от μ_e не зависит, а постоянная u зависит только от отношения a/c осей эллипса:

$$u = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(1 + \xi)^{3/2} \left(1 + \frac{a^2}{c^2} \xi\right)}. \quad (74.11)$$

Этот результат легко получить, воспользовавшись решением задачи о поле равномерно намагниченного эллипса, которое можно найти в ряде курсов математической физики или теории потенциала¹⁾. Мы приведем это решение без доказательства. Поместим начало декартовых координат в центр эллипса и направим ось x по оси симметрии эллипса, т. е. по направлению намагничения. Скалярный потенциал ψ магнитного поля эллипса внутри эллипса будет равен

$$\psi_i = \alpha x,$$

где α — константа, а потенциал вне эллипса равен

$$\psi_e = \frac{\beta x}{2} \int_{\eta/a^2}^\infty \frac{d\xi}{(1 + \xi)^{3/2} \left(1 + \frac{a^2}{c^2} \xi\right)},$$

где β — константа, а η — функция координат x, y, z , определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2 + \eta} + \frac{y^2 + z^2}{c^2 + \eta} = 1.$$

¹⁾ См., например Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные уравнения математической физики. Т. II. — Л.-М.: Гостехиздат, 1957, Стреттон Дж. Теория электромагнетизма. — М.: ИЛ, 1948

Исходя из этого выражения, для ψ_e можно показать, во-первых, что на поверхности эллипсоида

$$\psi_e = \beta u x,$$

где константа u определяется уравнением (74.11), и, во-вторых, что на поверхности эллипсоида производная ψ_e по нормали n к этой поверхности равна

$$\frac{\partial \psi_e}{\partial n} = \beta(u - 1) \frac{\partial x}{\partial n}.$$

Непрерывность касательных, слагающих напряженности H магнитного поля на поверхности эллипсоида, эквивалентна непрерывности потенциала ψ на этой поверхности, что дает

$$\alpha = \beta u.$$

Далее непрерывность нормальной слагающей магнитной индукции B на той же поверхности, ввиду (73.2), выражается уравнением

$$-\mu_e \frac{\partial \psi_e}{\partial n} = -\mu_i \frac{\partial \psi_i}{\partial n} + 4\pi I_{0n}.$$

Так как $\frac{\partial \psi_i}{\partial n} = \alpha \frac{\partial x}{\partial n}$ и $I_{0n} = I_0 \frac{\partial x}{\partial n}$, то, воспользовавшись приведенным выражением для $\frac{\partial \psi_e}{\partial n}$ и сокращая на $\frac{\partial x}{\partial n}$, получаем

$$-\mu_e \beta(u - 1) = -\mu_i \alpha + 4\pi I_0.$$

Исключая, наконец, из двух полученных уравнений постоянную α , получаем

$$\beta = \frac{4\pi I_0}{\mu_e(1-u) + \mu_i u} = \frac{\text{const}}{\mu_i + \mu_e(1/u - 1)}.$$

Так как ψ_e , а стало быть, и H_e зависят от μ_e только через посредство коэффициента β , то формула (74.10) доказана.

Интеграл (74.11) выражается в элементарных функциях, а именно:
при $\gamma = a/c < 1$

$$u = \frac{1}{1 - \gamma^2} \left[1 - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{\lambda} \right) \right],$$

где $\lambda = \sqrt{1 - \gamma^2}/\gamma$,

при $\gamma = a/c > 1$

$$u = \frac{1}{\gamma^2 - 1} \left(\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{1+\lambda}{1-\lambda} - 1 \right),$$

где $\lambda = \sqrt{\gamma^2 - 1}/\gamma$.

Для наших целей достаточно рассмотреть три случая.

1) Эллипсоид вытянут, и его ось симметрии гораздо длиннее двух других осей: $a \gg c$; иными словами, магнит представляет собой длинный тонкий стержень. В этом случае значение u очень мало ($u \sim \frac{c^2}{a^2} \ln \frac{a}{c}$), множитель у μ_e в знаменателе формулы (74.10) очень велик и H_e в первом приближении обратно пропорционально μ_e :

$$H_e \propto \frac{1}{\mu_e}. \quad (74.12)$$

2) Эллипсоид вырождается в шар: $a = c$; в этом случае (который будет также непосредственно рассмотрен в задаче 34 в конце

этого параграфа) $u = 1/3$, и формула (74.10) принимает вид

$$H_e \sim \frac{1}{\mu_1 + 2\mu_e}. \quad (74.13)$$

3) Наконец, эллипсоид сплюснут и его ось симметрии гораздо короче двух других осей $a \ll c$; иными словами, магнит представляет собою плоский диск, намагниченный перпендикулярно плоскости симметрии. В этом случае значение u близко к единице ($u \sim 1 - \pi a/2c$), множитель у μ_e в формуле (74.10) очень мал, и H_e в первом приближении вовсе не зависит от μ_e :

$$H_e \sim \frac{1}{\mu_1}. \quad (74.14)$$

Таким образом, форма магнита играет решающую роль и никакой универсальной зависимости поля магнита от проницаемости μ_e внешней среды не существует. Часто встречающееся утверждение, что *напряженность поля магнита обратно пропорциональна μ_e* , справедливо *только для длинных стержнеобразных магнитов*. Магниты же дискообразные аналогичны электрическим токам в том отношении, что напряженность их поля во внешней среде практически от ее проницаемости μ_e не зависит.

Все сказанное о постоянных магнитах справедливо, очевидно, и для *электромагнитов с магнитным сердечником*, — ведь молекулярные токи, обусловливающие постоянный магнетизм, создают поле по тому же закону, как и токи проводимости, а для применимости предшествующих рассуждений существенно лишь, чтобы проницаемость μ_1 материала, по поверхности которого циркулируют токи, оставалась неизменной при изменениях μ_e .

Иначе обстоит дело с полем *линейного контура тока* или полем (открытого) соленоида. В этом случае внешняя среда заполняет пространство между витками тока, и напряженность магнитного поля в ней от ее проницаемости μ_e практически не зависит (как и в случае строго однородной среды). Действительно, в этом случае замкнутые (либо винтообразные — см. § 53) силовые линии магнитного поля в основной своей массе располагаются *целиком в однородной* внешней среде. При намагничении среды магнитные диполи этой среды, ориентируясь по направлению поля, будут образовывать замкнутые (или лишенные начала и конца винтообразные) цепочки, вследствие чего заряды смежных диполей будут взаимно нейтрализоваться. Подобное намагничение среды, очевидно, не вызовет изменения поля.

Напротив, при наличии сердечника практически каждая магнитная силовая линия пересекает поверхность раздела между сердечником и внешней средой. Скачок намагничения на этой поверхности эквивалентен появлению на ней индуцированных

поверхностных магнитных зарядов [см. (73.12)] плотности

$$\sigma'_m = -\operatorname{Div} \chi \mathbf{H} = \pm (\chi_e H_{en} - \chi_i H_{in}),$$

где χ_e и χ_i — восприимчивости внешней среды и магнита. Поле этих индуцированных зарядов, очевидно, видоизменяет результирующее поле тока.

6. Нам остается рассмотреть зависимость пассивных характеристик магнитов и токов от проницаемости однородной внешней среды. В следующем параграфе будет показано, что силы, действующие на источник магнитного поля (магнит и ток) в заданном внешнем магнитном поле индукции \mathbf{B} , могут быть однозначно определены, если известно «собственное» поле \mathbf{H}' , возбуждаемое этим источником. Поэтому силы при заданной индукции внешнего поля \mathbf{B} изменяются при изменениях μ_e так же, как и собственное поле \mathbf{H}' . Таким образом, к пассивным характеристикам магнитов и токов непосредственно применимо все сказанное об их активных характеристиках. В частности, никакой универсальной зависимости как пассивных, так и активных характеристик магнитов и токов от проницаемости μ_e однородной *внешней* среды не существует. Никакой разницы в этом отношении между постоянными магнитами и электромагнитами с *сердечниками* также нет: если эти магниты имеют удлиненную стержнеобразную форму, то действующая на них сила определяется напряженностью внешнего поля \mathbf{H} (т. е. обратно пропорциональна μ_e при заданном \mathbf{B}); если же они имеют дискообразную форму, то действующая на них сила определяется индукцией внешнего поля \mathbf{B} (т. е. при заданном \mathbf{B} от μ_e не зависит). Последний случай имеет место также для линейных токов и электромагнитов без сердечника.

Вместе с тем становится понятным обычное утверждение, что, измеряя магнитное поле по величине пары сил, действующих на помещенную в него *магнитную стрелку или же на петлю тока*, мы в первом случае (удлиненный стержень) измеряем *напряженность* поля \mathbf{H} , а во втором — его *индукцию* \mathbf{B} .

Задача 34. Определить поле равномерно намагниченного постоянного магнита сферической формы в однородной внешней среде проницаемости μ_e .

§ 75. Пондеромоторные силы, испытываемые постоянными магнитами во внешнем магнитном поле

1. В § 73 и 74 мы применяли для вычисления действующих на магнит сил формулу (73.16), написав ее по аналогии с электростатикой. Теперь мы дадим надлежащее обоснование этой формуле

Строгий вывод выражения для пондеромоторных сил, действующих в магнитном поле, будет дан в § 83. Однако в основу этого вывода будет положено определенное выражение для энергии магнитного поля, справедливое

лишь для неферромагнитных сред. Поэтому результаты § 83 к постоянным магнитам непосредственно неприменимы. Если, однако, мы откажемся от рассмотрения внутренних напряжений, вызываемых в постоянных магнитах внешним магнитным полем, и ограничимся определением, во-первых, равнодействующей \mathbf{F} сил, приложенных к магниту, и, во-вторых, результирующего момента \mathbf{N} этих сил, то для однозначного решения этой задачи вполне достаточно результатов § 33 и 84.

Действительно, пондеромоторные силы электромагнитного поля могут быть сведены к напряжениям (см. § 33 и 84). Поэтому слагающие равнодействующей \mathbf{F} и пары сил \mathbf{N} , приложенных к магниту, должны равняться [см. (33.2) и (33.9)]:

$$\oint_S T_{zn} dS, \quad N_z = \oint_S (yT_{zn} - zT_{yn}) dS, \quad (75.1)$$

где замкнутая поверхность интегрирования S охватывает магнит и прилегает к его поверхности с ее внешней стороны. Другими словами, S расположена целиком в неферромагнитной среде. Следовательно, компоненты тензора напряжений \mathbf{T} в (75.1) должны определяться формулами, справедливыми для неферромагнитной среды.

В § 84 будет доказано, что компоненты тензора напряжений магнитного поля в неферромагнитной среде равны

$$T_{xz} = \frac{\mu}{4\pi} \left(H_x^2 - \frac{1}{2} H^2 \right), \quad T_{xy} = \frac{\mu}{4\pi} H_x H_y, \quad T_{xz} = \frac{\mu}{4\pi} H_x H_z \quad (75.2)$$

и аналогично для T_{yy} , T_{yz} и т. д.¹⁾. Заметим, что с точки зрения теории, исходящей из представления о существовании магнитных зарядов, формула (75.2) может быть непосредственно получена из соответствующей электростатической формулы (34.2) путем замены \mathbf{E} на \mathbf{H} и ϵ на μ .

Внеся (75.2) в (75.1), можно вычислить равнодействующую \mathbf{F} и результирующий момент \mathbf{N} сил, действующих на магнит в магнитном поле \mathbf{H} .

2. Если, внеся (75.2) в (75.1), преобразовать входящие в (75.1) интегралы с помощью формул (33.3) и (33.7), то мы получим формулы:

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f}^{ek} dV, \quad \mathbf{N} = \int_V [\mathbf{R} \mathbf{j}^{ek}] dV, \quad (75.3)$$

где введено обозначение

$$\mathbf{j}^{ek} = \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}, \quad (75.4)$$

причем предполагается, что компоненты T_{xz} , T_{xy} и т. д. тензора \mathbf{T} выражаются формулами (75.2), справедливыми для неферромагнитной среды. Определяемый при этом условии формулами (75.4) вектор \mathbf{f}^{ek} может быть назван «эквивалентной плотностью» пондеромоторных сил в постоянном магните. Действительно, из изложенного следует, что мы получим правильное значение равнодействующей \mathbf{F} и результирующего момента \mathbf{N} сил, приложенных к магниту, если внесем выражения (75.4) в (75.3) и произведем интегрирование по всему объему магнита. Однако истинное распределение пондеромоторных сил \mathbf{f} по объему магнита может быть совершенно отлично от распределения «эквивалентных» сил, \mathbf{f}^{ek} , ибо тензор напряжений \mathbf{T}

¹⁾ Мы ограничиваемся здесь рассмотрением только максвеллового тензора напряжений, обозначенного в § 84 через \mathbf{T}' , и отбрасываем тензор \mathbf{T}'' , ибо последний изменяет лишь распределение напряжений в среде, но не влияет на \mathbf{F} и \mathbf{N} .

выражается формулами (75.2) лишь *вне* магнита, внутри же магнита его компоненты нам неизвестны и могут совсем иначе зависеть от векторов \mathbf{H} и \mathbf{B} . Поэтому можно утверждать только, что если фактически приложенные к элементам объема магнита силы \mathbf{f} заменить силами $\mathbf{f}^{\text{эк}}$, то это не изменит ни равнодействующей, ни результирующего момента всех сил, приложенных к магниту.

Таким образом, эквивалентной плотностью сил $\mathbf{f}^{\text{эк}}$ можно пользоваться лишь в тех случаях, когда нас не интересует распределение пондеромоторных сил по объему магнита. Зато в этих случаях введение в рассмотрение эквивалентных сил $\mathbf{f}^{\text{эк}}$ весьма удобно потому, что, как мы сейчас покажем, $\mathbf{f}^{\text{эк}}$ может быть просто выражена через плотность постоянных магнитных зарядов ρ_m^0 и плотность токов проводимости \mathbf{j} в магните.

3 Внеся (75.2) в (75.4) и выполнив дифференцирование, получаем после надлежащей перегруппировки членов.

$$4\pi j_x^{\text{эк}} = H_x \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) + \mu H_y \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + \mu H_z \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} H^2 \frac{\partial \mu}{\partial x}. \quad (75.5)$$

Так как

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \operatorname{rot}_z \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} j_z \quad \text{и} \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \operatorname{rot}_y \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} j_y,$$

то сумма второго и третьего членов равна

$$\frac{4\pi}{c} (j_y \cdot \mu H_z - j_z \cdot \mu H_y) = \frac{4\pi}{c} [\mathbf{j} \cdot \mu \mathbf{H}]_x.$$

Поэтому (75.5) является слагающей по оси x следующего векторного равенства

$$\mathbf{f}^{\text{эк}} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \cdot \mu \mathbf{H}] - \frac{1}{8\pi} H^2 \nabla \mu.$$

Воспользовавшись уравнением (73.7), которое применимо как в обычном, так и в новом варианте теории, получаем окончательное выражение для эквивалентной плотности пондеромоторных сил в постоянном магните:

$$\mathbf{f}^{\text{эк}} = \rho_m^0 \mathbf{H} + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \cdot \mu \mathbf{H}] - \frac{1}{8\pi} \cdot H^2 \nabla \mu. \quad (75.6)$$

Первый член справа выражает силу, действующую на постоянные магнитные заряды, и совпадает с формулой (73.16), которую мы, таким образом, доказали.

Второй член отличается от обычного выражения (65.1) силы, действующей на токи проводимости, только заменой вектора \mathbf{B} вектором $\mu \mathbf{H}$, который отличается от \mathbf{B} лишь в постоянных магнитах [см. уравнение (73.2)]. Наконец, последний член справа выражает силу, зависящую от неоднородности магнитной проницаемости магнита. Вплоть до указанной замены вектора \mathbf{B} вектором $\mu \mathbf{H}$ совокупность двух последних членов в (75.6) совпадает с выражением (84.1) для пондеромоторных сил в неферромагнитных средах¹⁾.

4. Формула (75.6) по своему виду соответствует представлению о существовании в постоянных магнитах магнитных зарядов. Можно, однако, получить и другое равносильное выражение для $\mathbf{f}^{\text{эк}}$, в котором постоянные магниты характеризуются распределением в них не магнитных зарядов, а постоянных молекулярных токов.

¹⁾ В формулу (84.1), помимо сил \mathbf{f}' , входят также и стрикционные силы \mathbf{f}'' , которые соответствуют отброшенному нами стрикционному тензору \mathbf{T}'' (см. примечание к с. 160).

Вместо того чтобы соответствующим образом преобразовывать формулу (75.6), удобнее с этой целью вернуться к исходным формулам (75.2). Воспользовавшись тем, что на поверхности S , по которой производится интегрирование в (75.1), $I_0 = 0$ и поэтому $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, можно записать уравнения (75.2) в следующей форме:

$$T_{xx} = \frac{1}{4\pi\mu} \left(B_x^2 - \frac{1}{2} B^2 \right), \quad T_{xy} = \frac{1}{4\pi\mu} B_x B_y, \quad T_{xz} = \frac{1}{4\pi\mu} B_x B_z. \quad (75.7)$$

Внеся эти выражения в (75.4) и выполнив дифференцирование, после надлежащей перегруппировки членов получим

$$\begin{aligned} 4\pi f_x^{\text{ек}} = & \frac{1}{\mu} B_x \operatorname{div} \mathbf{B} + B_y \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B_x}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_y}{\mu} \right) \right\} + \\ & + B_z \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B_x}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_z}{\mu} \right) \right\} - \frac{B^2}{2\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial x}. \end{aligned}$$

Первый член справа равен нулю, так как $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Следующие два члена могут быть преобразованы с помощью формулы (74.9):

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu} \right) = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{мол}}^0)$$

совершенно так же, как были преобразованы аналогичные члены в (75.5). В результате получаем следующее выражение для $\mathbf{f}^{\text{ек}}$:

$$\mathbf{f}^{\text{ек}} = \frac{1}{c} [\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{мол}}^0 \cdot \mathbf{B}] - \frac{B^2}{8\pi\mu^2} \nabla \mu. \quad (75.8)$$

Последний член этого выражения соответствует последнему члену прежней формулы (75.6) и совпадает с ним при $I_0 = 0$. Главный же первый член формулы (75.8) выражает тот факт, что пондеромоторное воздействие внешнего поля \mathbf{B} на постоянные молекулярные токи $\mathbf{j}_{\text{мол}}^0$ такое же, как и на токи проводимости \mathbf{j} , и что постоянные магниты вполне характеризуются распределением в них токов $\mathbf{j}_{\text{мол}}^0$.

В заключение сделаем два замечания. Выражения (75.6) и (75.8) для эквивалентной плотности пондеромоторных сил внешнего поля в постоянных магнитах равносильны друг другу в том смысле, что, как явствует из вывода этих выражений, оба они после подстановки в (75.3) приводят к однаковому значению равнодействующей \mathbf{F} и результирующего момента \mathbf{N} сил, испытываемых магнитом в магнитном поле. Однако эти выражения (75.6) и (75.8) отнюдь не равны друг другу, т. е. соответствуют различным распределениям напряжений и объемных сил по объему магнита. Вовсе нельзя быть уверенным, что хотя бы одно из этих распределений соответствует действительности, ибо использованный нами метод позволяет определить лишь равнодействующую \mathbf{F} и результирующий момент \mathbf{N} приложенных к магниту сил; распределение же этих сил по объему магнита может быть получено только путем гораздо более углубленного анализа всей проблемы в целом.

В этом параграфе мы ограничились для краткости рассмотрением только объемных магнитных зарядов ρ_m^0 и объемных молекулярных токов $\mathbf{j}_{\text{мол}}^0$. Выражения для поверхностной плотности пондеромоторных сил, приложенных к поверхностным зарядам и токам σ_m^0 и i_m^0 , получатся, очевидно, из соответствующих членов формул (75.6) и (75.8) путем замены ρ_m^0 на σ_m^0 и $\mathbf{j}_{\text{мол}}^0$ на i_m^0 .

Учет сил, действующих на поверхности разрыва проницаемости μ , также не представляет затруднений.

6. Нам остается доказать сделанное в конце § 74 утверждение, что силы, действующие на источник магнитного поля (магнит) во внешнем магнит-

ном поле заданной индукции $\mathbf{B}^{(s)}$, могут быть определены, если известно «собственное» поле $\mathbf{H}^{(c)}$, возбуждаемое этим источником (магнитом), и что при изменениях проницаемости μ_e внешней среды, окружающей магнит, эти силы изменяются так же, как собственное поле $\mathbf{H}^{(c)}$ магнита.

Ввиду сделанного в § 73 допущения о линейности уравнений магнитного поля результирующее поле во внешней среде равно

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(s)} + \mathbf{H}^{(c)} = \frac{1}{\mu_e} \mathbf{B}^{(s)} + \mathbf{H}^{(c)}.$$

Согласно (75.1) действующие на магнит силы определяются тензором натяжения \mathbf{T} в окружающей неферромагнитной среде. Согласно (75.2) компоненты этого тензора квадратичны относительно \mathbf{H} , так что, например,

$$T_{xy} = \frac{\mu_e}{4\pi} \left\{ H_x^{(s)} H_y^{(s)} + H_x^{(s)} H_y^{(c)} + H_x^{(c)} H_y^{(s)} + H_x^{(c)} H_y^{(c)} \right\}.$$

Натяжение $\frac{\mu_e}{4\pi} H_x^{(s)} H_y^{(s)}$ определяет силы, которые испытывало бы вещество магнита при отсутствии в нем постоянного намагничения, возбуждающего поле $\mathbf{H}^{(c)}$. Силы эти определяются по формулам, выведенным для неферромагнитных тел, и нас сейчас не интересуют. Натяжения $\frac{\mu_e}{4\pi} H_x^{(c)} H_y^{(c)}$ выражают действие различных элементов постоянного магнита друг на друга и ничего не прибавляют к равнодействующей \mathbf{F} и моменту \mathbf{N} этих сил. Таким образом, силы, действующие на магнит во внешнем поле, определяются натяжением типа

$$T_{xy} = \frac{\mu_e}{4\pi} \left(H_x^{(s)} H_y^{(c)} + H_x^{(c)} H_y^{(s)} \right) = \frac{1}{4\pi} \left\{ B_x^{(s)} H_y^{(c)} + H_x^{(c)} B_y^{(s)} \right\},$$

чем и доказывается приведенное утверждение.

Нами не было в предыдущем учтено то обстоятельство, что изменение проницаемости μ_e внешней среды при неизменной проницаемости μ_i магнита неизбежно связано с изменением индукции внешнего поля $\mathbf{B}^{(s)}$ вблизи магнита. Однако нетрудно показать, что если внешняя среда однородна и если внешнее поле тоже однородно вдали от магнита, то это обстоятельство не нарушает правильности доказанного утверждения.