

ГЛАВА IV

ПОНДЕРОМОТОРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОСТОЯННЫХ ТОКОВ И ИХ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ (В ОТСУТСТВИЕ НА МАГНИЧИВАЮЩИХСЯ СРЕД)

§ 42. Магнитное поле токов

1. Известно, что между проводниками, по которым протекают электрические токи, возникают пондеромоторные (механические) силы взаимодействия, зависящие от силы этих токов и расположения проводников, эти силы взаимодействия могут быть непосредственно измерены обычными методами измерения механических сил. Для краткости мы будем называть силы взаимодействия обтекаемых током проводников просто силами взаимодействия токов. Техническое использование этих сил составляет одну из самых важных задач электротехники (электромоторы, разнообразные электроизмерительные приборы и т. д.).

В главах I и II мы убедились, что рассмотрение сил взаимодействия электрических зарядов чрезвычайно упрощается введением понятия электрического поля этих зарядов. Взаимодействие токов существенно сложнее взаимодействия покоящихся зарядов, и, соответственно этому, введение в рассмотрение понятия поля токов в еще большей мере облегчает стоящую перед нами задачу. Поэтому мы с самого начала воспользуемся понятием *поля токов*¹⁾, т. е. будем исходить из следующего представления.

Во всех точках пространства, окружающего произвольный ток, всегда существует обусловленное этим током *поле сил* вне зависимости от того, проявляется ли существование этих сил в воздействии их на какой-либо другой ток или же в отсутствие такового не проявляется ни в чем. По исторически сложившейся терминологии, это поле сил называется *магнитным полем* тока, ибо постоянные магниты создают такие же поля, как и электрические токи. Таким образом, задача определения взаимодействия токов разбивается на две более простые задачи: а) *определение магнитного поля* произвольного тока и б) *определение сил, действующих в заданном магнитном поле* на помещенный в него ток.

¹⁾ Конечно, законы взаимодействия постоянных токов можно формулировать и не прибегая к понятию поля (см § 43)

В пределах учения о постоянных токах понятие магнитного поля этих токов может рассматриваться как понятие чисто условное, введенное лишь для удобства описания явлений (то же относится к понятию электрического поля в пределах электростатики, ср. § 2). Однако, перейдя к изучению переменного электромагнитного поля, мы убедимся, что понятие поля имеет глубокий физический смысл и что электромагнитное поле есть объективная реальность.

2. Электрическое поле может быть измерено путем внесения в различные его точки произвольно малых пробных зарядов и определения испытываемых этими зарядами сил. Соответственно этому, для измерения магнитного поля следовало бы воспользоваться изолированными элементами постоянных токов, что, однако, невозможно, ибо постоянные токи по необходимости замкнуты (или уходят в бесконечность, см. § 37).

Чтобы обойти это затруднение, можно закрепить неподвижно все проводники, входящие в предназначенную для измерения поля цепь тока, оставив подвижным лишь небольшой участок цепи («элемент тока»), и измерять силу, действующую на этот элемент¹⁾ (хотя бы по силе, которую необходимо приложить к нему, чтобы удержать его в равновесии). Конечно, перемещение такого элемента тока из одной точки пространства в другую связано с перемещением всей измерительной цепи; поэтому при этих измерениях необходимо заботиться о том, чтобы перемещения не искали измеряемого поля токов. Наконец, для целей измерения пригодны, очевидно, лишь «элементы тока» столь малых размеров (сечения и длины), что на их протяжении измеряемое поле можно считать постоянным. В дальнейшем мы будем считать все эти условия выполненными.

3. Как показывает *опыт*, магнитное поле в каждой точке пространства может быть исчерпывающим образом охарактеризовано некоторым вектором \mathbf{H} , носящим название *напряженности магнитного поля*. Совокупность опытных фактов приводит к следующему выражению для силы \mathbf{F} , действующей в поле, характеризуемом вектором \mathbf{H} , на элемент тока длины $d\mathbf{s}$, по которому течет ток силы J :

$$\mathbf{F} = \frac{J}{c} [d\mathbf{s} \mathbf{H}]. \quad (42.1)$$

Здесь c означает некоторый коэффициент пропорциональности, зависящий только от выбора единиц измерения. Этот коэффициент принято писать не в числите, а в знаменателе.

Таким образом, сила \mathbf{F} , действующая на элемент $d\mathbf{s}$, существенно зависит от *ориентации* этого элемента $d\mathbf{s}$: величина ее

¹⁾ Роль такого подвижного элемента тока играет, например, струна струнного гальванометра, прогиб которой определяется силой магнитного поля, создаваемого током, протекающим по обмотке гальванометра.

пропорциональна синусу угла между направлением поля \mathbf{H} и направлением элемента ds ; направление же силы перпендикулярно плоскости, проведенной через \mathbf{H} и ds , и сила направлена по ходу остряя буравчика, ручка которого поворачивается от ds к \mathbf{H} (рис. 42).

Формулу (42.1) можно рассматривать как *определение* понятия «напряженность магнитного поля». Основываясь на ней, можно следующим образом измерить напряженность магнитного поля в любой точке пространства. Поместим в данную точку P элемент тока ds и будем вращать этот элемент ds до тех пор, пока он не займет положения, при котором действующая на него сила \mathbf{F} обращается в нуль. Магнитное поле будет, очевидно, либо параллельно, либо антипараллельно направлению ds в этом положении. Повернув затем ds из этого положения на 90° и измерив действующую на него в этом новом положении силу \mathbf{F} , легко определить вектор \mathbf{H} по величине и направлению.

4. Нам остается еще выяснить вопрос о зависимости напряженности магнитного поля в произвольной точке пространства от характеристик тока, возбуждающего это поле (положение и форма контура тока, его сила и т. д.). Этот вопрос чрезвычайно упростился бы, если бы его можно было свести к вопросу о поле, возбуждаемом отдельным *элементом тока*, и рассматривать поле произвольной системы токов как наложение (суперпозицию) полей отдельных элементов этих токов. Опыт показывает, что напряженность поля, создаваемого двумя токами, действительно равна сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из этих токов в отдельности¹⁾. Тем не менее в рамках учения о *постоянных* токах вопрос о поле, возбуждаемом отдельным элементом тока, не может быть решен однозначно, ибо нельзя изолировать отдельный элемент постоянного тока, цепь которого не может не быть замкнутой. Поэтому мы всегда имеем дело с результатирующим полем всех элементов замкнутого поля, а знания результирующей недостаточно для однозначного определения слагающих (см. § 43).

Однако в дальнейшем мы перейдем к изучению переменных токов, могущих быть и незамкнутыми; наконец, электронная тео-

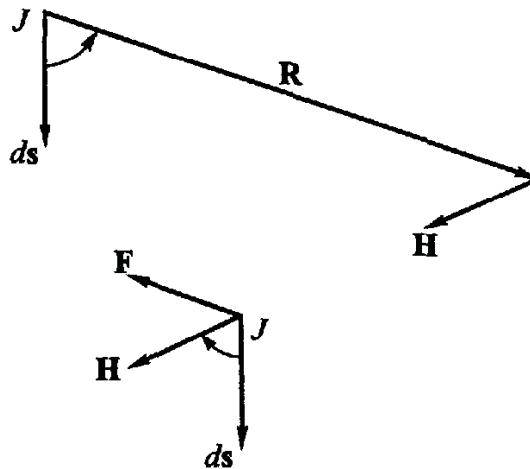


Рис. 42

¹⁾ Этот *принцип суперпозиции* нарушается лишь при наличии в поле ферромагнетиков (см. гл. V).

рия, базируясь на обширном опытном материале, сводит силы взаимодействия токов к взаимодействию движущихся электронов, каждый из которых представляет элемент тока в точном смысле этого слова. Таким образом, математический прием разложения конечных токов на совокупность токов элементарных в известном отношении соответствует современным физическим представлениям о том, что все токи сводятся к движению отдельных электронов (или ионов).

Предвосхищая результаты исследования переменных токов, а также сил взаимодействия движущихся элементарных зарядов, мы в основу всех наших рассуждений положим определенный закон, определяющий магнитное поле элемента тока, рассматривая этот закон как данный *опытом*. Закон этот носит название *закона Бюо-Савара* и в векторной форме может быть записан так:

$$\mathbf{H} = \frac{J}{cR^3} [ds \mathbf{R}]. \quad (42.2)$$

Здесь \mathbf{R} есть расстояние от элемента тока $J ds$, возбуждающего магнитное поле \mathbf{H} , до той «точки наблюдения», в которой определяется напряженность \mathbf{H} этого поля. Далее, c есть некоторый коэффициент пропорциональности, зависящий только от выбора единиц измерения. Во всех общепринятых системах единиц измерения единицы эти выбираются так, чтобы коэффициенты c в формулах (42.1) и (42.2) оказались одинаковыми.

Таким образом, при удалении от элемента $J ds$ вдоль определенной полупрямой, проведенной из этого элемента, напряженность его поля убывает обратно пропорционально квадрату расстояния R от ds ; при перемещениях же по сфере определенного радиуса R с центром в ds поле изменяется как синус угла между \mathbf{R} и ds . Направление поля перпендикулярно к плоскости, проведенной через \mathbf{R} и ds (см. рис. 42). Если представить себе сферическую систему координат с центром в ds и с осью, направленной вдоль ds , то направление поля в каждой точке пространства P будет касательно к полярному кругу, проходящему через эту точку P . Иными словами, линии вектора \mathbf{H} , носящие название *магнитных силовых линий*, являются окружностями, нанизанными, как на ось, на прямую, проходящую через элемент ds . Направление этих магнитных силовых линий образует с направлением тока в элементе ds правовинтовую систему.

5. Формулы (42.1) и (42.2) являются основными для всего учения о магнитном поле и о взаимодействии постоянных токов; почти все дальнейшее содержание этой главы сводится к рассмотрению выводов, вытекающих из этих формул.

В частности, сила, испытываемая замкнутым током J в магнитном поле \mathbf{H} , равна, очевидно, сумме сил, испытываемых

каждым из его элементов, т. е. равна

$$\mathbf{F} = \frac{J}{c} \oint [d\mathbf{s} \mathbf{H}]; \quad (42.3)$$

напряженность же поля \mathbf{H} замкнутого тока J в произвольной точке P равна сумме полей, возбуждаемых каждым из его элементов, т. е. равна

$$\mathbf{H} = \frac{J}{c} \oint \frac{[d\mathbf{s} \mathbf{R}]}{R^3}, \quad (42.4)$$

где \mathbf{R} есть радиус-вектор, проведенный из элемента $d\mathbf{s}$ до «точки наблюдения» P .

Задача 25. Показать, что напряженность магнитного поля бесконечного прямолинейного тока на расстоянии r от его оси равна

$$H = \frac{2J}{cr} \quad (42.5)$$

и что силовые линии этого поля представляют собою концентрические окружности, плоскость которых перпендикулярна току, причем направление силовых линий составляет с направлением тока правовинтовую систему.

Примечание. Цепь постоянного тока всегда замкнута. Рассматривать бесконечный прямолинейный ток — значит рассматривать замкнутую цепь тока, включающую в себя очень длинный прямой цилиндрический участок, и ограничиваться при этом изучением поля тока вблизи средней части этого участка, пренебрегая действием удаленных участков цепи тока.

Задача 26. Линейный ток протекает по окружности радиуса R_0 . Показать, что напряженность поля в любой точке оси этой окружности направлена по этой оси, составляет с направлением тока правовинтовую систему и равна

$$H = \frac{2\pi J}{c} \frac{R_0^2}{(R_0^2 + d^2)^{3/2}},$$

где d есть расстояние рассматриваемой точки оси от центра кругового тока.

§ 43. Взаимодействие элементов тока. Электродинамическая постоянная

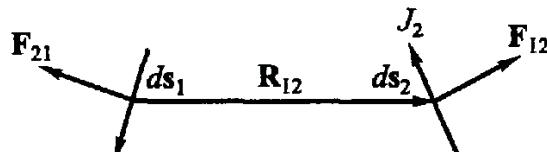
1. Рассмотрим два элемента тока $J_1 d\mathbf{s}_1$ и $J_2 d\mathbf{s}_2$, находящихся на расстоянии \mathbf{R}_{12} друг от друга (\mathbf{R}_{12} считаем направленным от $d\mathbf{s}_1$ к $d\mathbf{s}_2$). Поле, создаваемое первым элементом в месте нахождения второго, согласно (42.2), равно

$$\mathbf{H}_{12} = \frac{J_1}{c} \frac{[d\mathbf{s}_1 \mathbf{R}_{12}]}{R_{12}^3}$$

и, стало быть, сила \mathbf{F}_{12} , испытываемая вторым элементом со стороны первого, согласно (42.1), равна (см. рис. 43):

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{J_1 J_2}{c^2 R_{12}^3} [d\mathbf{s}_2 [d\mathbf{s}_1 \mathbf{R}_{12}]]. \quad (43.1)$$

Аналогичным образом выражается и сила \mathbf{F}_{21} , испытываемая первым элементом со стороны второго:



$$\mathbf{F}_{21} = \frac{J_2 J_1}{c^2 R_{21}^3} [d\mathbf{s}_1 [d\mathbf{s}_2 \mathbf{R}_{21}]], \quad (43.2)$$

Рис. 43

причем $\mathbf{R}_{21} = -\mathbf{R}_{12}$. Можно в основу всех рассуждений положить не формулы (42.1) и (42.2),

а этот закон взаимодействия элементов тока, и потом уже, вводя понятие магнитного поля токов, получить формулы предшествующего параграфа из (43.1) и (43.2).

2. Мы оставили открытым вопрос о размерности коэффициента пропорциональности c в формулах (42.1) и (42.2), носящего название *электродинамической постоянной*. Если принять определенные единицы измерения для длины, механической силы F и силы тока J , то тем самым однозначно фиксируется и размерность электродинамической постоянной c , ибо из (43.1) вытекает, что

$$[c^2] = \frac{[J^2]}{[F]}. \quad (43.3)$$

Мы будем преимущественно пользоваться так называемой *гауссовой абсолютной системой единиц*. В этой системе единиц механические величины (длина, сила F и т. д.) измеряют в единицах СГС, а силу тока измеряют в абсолютных *электростатических* единицах, в которых, согласно § 35, $[J] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-2}$. Стало быть, (43.3) принимает вид

$$[c^2] = \frac{ML^3 T^{-4}}{MLT^{-2}} = \left(\frac{L}{T}\right)^2, \quad (43.4)$$

т. е. c обладает *размерностью скорости*.

Как показали экспериментальные исследования (см. § 59), числовое значение электродинамической постоянной c в этих единицах равно $3 \cdot 10^{10}$ см/с. В гл. VII будет показано, что совпадение этой величины со скоростью света в вакууме отнюдь не случайно.

3. Чтобы уяснить содержание уравнений (43.1) и (43.2), рассмотрим ряд частных случаев. Если $d\mathbf{s}_1$ параллельно $d\mathbf{s}_2$, то силы взаимодействия стремятся сблизить $d\mathbf{s}_1$ и $d\mathbf{s}_2$ (*притяжение*), если же $d\mathbf{s}_1$ и $d\mathbf{s}_2$ антипараллельны, то эти силы стремятся

удалить их друг от друга (*отталкивание*) (рис. 44). При этом $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$. Однако силы эти даже в этом случае не удовлетворяют принципу равенства действия и противодействия, ибо направления их лежат, вообще говоря, не на одной прямой. Особенно же резко проявляется *нарушение принципа равенства действия и противодействия* в том случае, если, например, ds_1 параллельно \mathbf{R}_{12} , а ds_2 перпендикулярно \mathbf{R}_{12} (рис. 45). В этом случае $[ds_1 \mathbf{R}_{12}] = 0$, и поэтому $\mathbf{F}_{12} = 0$, тогда как $[ds_2 \mathbf{R}_{21}] \neq 0$ и $\mathbf{F}_{21} \neq 0$; элемент ds_1 испытывает силу со стороны элемента ds_2 , но сам на него не действует

Впрочем, в случае *постоянных* токов, по необходимости являющихся замкнутыми, это нарушение третьей аксиомы Ньютона связано лишь с представлением сил взаимодействия токов как сил попарного взаимодействия их элементов. Действительно, как мы покажем в § 51, силы взаимодействия двух замкнутых токов удовлетворяют принципу равенства действия и противодействия (см. также задачи 27 и 28 в конце параграфа). В общем же случае переменного электромагнитного поля можно и должно обобщить понятие количества движения так, чтобы справедливость этого принципа оказалась обеспеченной во всех электромагнитных явлениях¹⁾.

4. Выше уже упоминалось, что в пределах изучения замкнутых постоянных токов сила взаимодействия элементов токов не может быть определена однозначно. Математически это обстоятельство выражается в том, что если видоизменить закон взаимодействия токов добавлением ряда членов, интеграл которых по всякому замкнутому контуру обращается в нуль, то общая сила, испытываемая элементом со стороны замкнутого тока, остается неизменной.

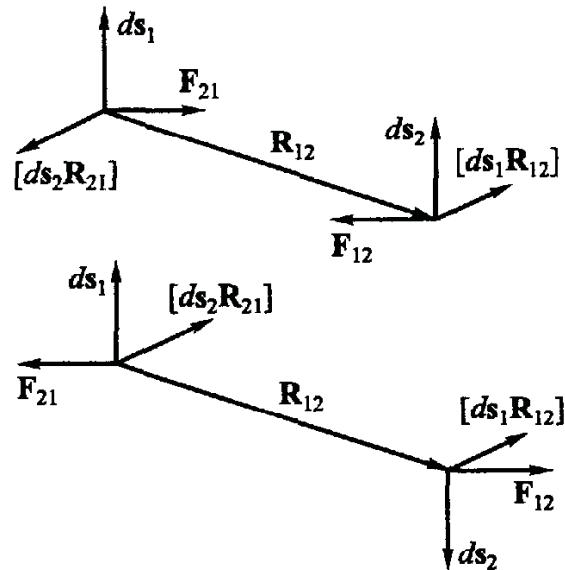


Рис. 44

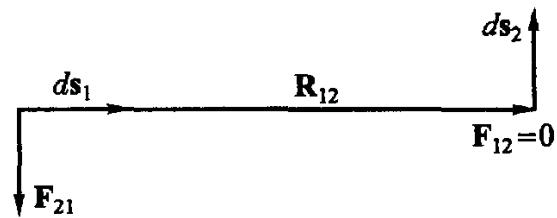


Рис. 45

¹⁾ В § 105 будет доказан обобщенный закон сохранения полного (механического и электромагнитного) количества движения (уравнение (105 10)). Так как закон сохранения количества движения эквивалентен закону равенства действия и противодействия, то тем самым будет доказана и справедливость этого последнего закона в его обобщенной форме

В частности, легко убедиться, что выражение силы \mathbf{F}_{12} может быть видоизменено следующим образом:

$$\mathbf{F}'_{12} = \mathbf{F}_{12} + \frac{J_1 J_2}{c^2} \{ \Phi(R_{12})(d\mathbf{s}_1 \mathbf{R}_{12}) d\mathbf{s}_2 + d[\mathbf{R}_{12}(d\mathbf{s}_2 \mathbf{R}_{12}) f(R_{12})] \}, \quad (43.5)$$

где $\Phi(R_{12})$ и $f(R_{12})$ суть произвольные скалярные функции от R_{12} , а $d[\mathbf{R}_{12}(d\mathbf{s}_2 \mathbf{R}_{12}) f(R_{12})]$ означает приращение (дифференциал) выражения в скобках при перемещении начальной точки радиуса-вектора \mathbf{R}_{12} на отрезок $d\mathbf{s}_1$ (так что $d\mathbf{R}_{12} = -d\mathbf{s}_1$). Действительно, при интегрировании по контуру тока J_1 последний член обращается в нуль как интеграл полного дифференциала по замкнутому пути. Далее, $\Phi(R_{12})\mathbf{R}_{12}$ всегда может быть представлено в виде градиента некоторой функции $\varphi(R_{12})$ от R_{12} [см. уравнения (7*) и (8*)]:

$$\Phi(R_{12})\mathbf{R}_{12} = \operatorname{grad} \varphi(R_{12}).$$

Следовательно,

$$\Phi(R_{12})(d\mathbf{s}_1 \mathbf{R}_{12}) = (d\mathbf{s}_1 \cdot \operatorname{grad} \varphi(R_{12})) = \frac{\partial \varphi(R_{12})}{\partial s_1} ds_1.$$

Интеграл же этого полного дифференциала по замкнутому контуру тока J_1 [а стало быть, и интеграл второго члена формулы (43.5)] также обращается в нуль.

Задача 27. Исходя из уравнений (43.1) и (43.2), показать непосредственным интегрированием, что равнодействующая сил, испытываемая одним из замкнутых токов со стороны другого замкнутого тока, удовлетворяет принципу равенства действия и противодействия.

Задача 28. Закон пондеромоторного взаимодействия элементов тока был впервые сформулирован Ампером, исходившим из предположения, что взаимодействие элементов тока должно удовлетворять третьему принципу Ньютона и должно быть направлено по линии их соединения. Найденный Ампером закон в наших обозначениях гласит:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{J_1 J_2}{c^2} \left\{ \frac{3}{R_{12}^5} (\mathbf{ds}_1 \mathbf{R}_{12})(\mathbf{ds}_2 \mathbf{R}_{12}) - \frac{2}{R_{12}^3} (\mathbf{ds}_1 \mathbf{ds}_2) \right\} \mathbf{R}_{12}.$$

Показать, что применение формулы Ампера к вычислению результирующей силы, действующей на элемент $d\mathbf{s}_2$ со стороны всех элементов замкнутого тока J_1 , дает тот же результат, что и применение формулы (43.1).

§ 44. Переход от линейных токов к токам конечного сечения

1. В предыдущих параграфах мы рассматривали элементы линейных токов. Очевидно, что при определении возбуждаемого током поля можно считать линейными те токи, размеры любого сечения которых достаточно малы по сравнению с расстоянием от этого сечения до рассматриваемых точек поля P . Разумеется,

ток может удовлетворять этому условию линейности лишь в том случае, если мы ограничиваемся рассмотрением достаточно удаленных от него точек поля. При определении же *пондеромоторных сил*, испытываемых током во внешнем магнитном поле \mathbf{H} , ток этот можно считать линейным в том случае, если поле \mathbf{H} не изменяется сколько-нибудь значительно на протяжении любого сечения тока.

Таким образом, формулы § 42, 43 применимы лишь в случае выполнения перечисленных условий. Так, например, при $R \rightarrow 0$ определяемая формулой (42.2) напряженность поля \mathbf{H} стремится к бесконечности, т. е. теряет смысл.

Однако достаточно незначительных преобразований формул § 42, 43, чтобы сделать их применимыми при произвольном R и при произвольно быстро изменяющейся от точки к точке напряженности внешнего поля \mathbf{H} . Для этого достаточно воспользоваться тем, что, согласно § 37, ток конечного сечения может быть разложен на совокупность бесконечно тонких *нитей тока*, и применить формулы § 42 к элементам этих нитей.

Сила тока dJ , протекающего по нити тока, согласно уравнению (36.2), равна

$$dJ = j dS,$$

где j — плотность тока, а dS — *перпендикулярное* к оси сечение нити. Стало быть,

$$dJ ds = j dS ds = j dV,$$

где ds — длина, а dV — объем бесконечно малого отрезка нити. Так как, наконец, ось нити тока, по определению, совпадает с линиями тока, то ds параллельно \mathbf{j} и

$$dJ ds = \mathbf{j} dV. \quad (44.1)$$

Таким образом, элемент *длины* каждой нити тока, совокупность которых образует ток конечного сечения J , эквивалентен *элементу объема* $\mathbf{j} dV$ этого тока J .

Поэтому напряженность $d\mathbf{H}$ поля элемента объема $\mathbf{j} dV$ тока J на основании (42.2) и (44.1) равна

$$d\mathbf{H} = \frac{dJ}{cR^3} [ds \mathbf{R}] = \frac{[\mathbf{j}R]}{cR^3} dV. \quad (44.2)$$

Общая же напряженность магнитного поля всего замкнутого тока J будет равняться сумме напряженностей полей, создаваемых его отдельными элементами:

$$\mathbf{H} = \int d\mathbf{H} = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j}R]}{R^3} dV, \quad (44.3)$$

где интегрирование должно быть распространено на весь объем тока (т. е. на объем обтекаемых током проводников), а \mathbf{R} есть расстояние рассматриваемой точки поля P от элемента тока dV .

Конечно, в случае линейных токов эта последняя формула совпадает с формулой (42.4).

Совершенно аналогичным путем, применив уравнение (42.1) к элементу нити тока объема dV и воспользовавшись уравнением (44.1), получим, что пондеромоторная сила, испытываемая элементом объема проводника dV , по которому протекает ток плотности \mathbf{j} , равна

$$\mathbf{F} = \frac{dJ}{c} [\mathbf{ds} \mathbf{H}] = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{H}] dV, \quad (44.4)$$

где \mathbf{H} есть напряженность магнитного поля в элементе dV . Иными словами, объемная *плотность пондеромоторных сил* равна

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{H}]. \quad (44.5)$$

2. В дальнейшем нам неоднократно придется переходить от рассмотрения линейных токов к токам конечного сечения и обратно. Как явствует из изложенного, в частности, из сравнения (42.4) с (44.3), переход этот всегда эквивалентен замене интегрирования по длине линейного тока интегрированием по объему тока конечного сечения:

$$J \oint \Phi ds \rightleftharpoons \oint \Phi \mathbf{j} dV, \quad (44.6)$$

где Φ может быть любой скалярной или векторной функцией точки. Если ток удовлетворяет условиям линейности, перечисленным в начале этого параграфа, то оба выражения в формуле (44.6) равносильны друг другу; в противном же случае они различны по своему содержанию, причем физический смысл имеет только *объемный* интеграл.

Заметим также, что в случае разветвленного контура тока только правая часть (44.6) сохраняет свой вид, тогда как в левой части необходимо учесть, что сила тока в различных участках его цепи может быть различной.

Соотношение (44.6) можно условно записать в форме, соответствующей уравнению (44.1), заменив в последнем dJ на J :

$$J ds \rightleftharpoons \mathbf{j} dV. \quad (44.7)$$

Однако соотношение (44.7), в сущности, приобретает смысл лишь по выполнении слева интегрирования по ds , а справа по dV , как это явно указывается в (44.6).

3. Формулы (44.3) и (44.4) применимы, очевидно, во всех точках поля постоянных токов. В частности, определяемая ими напряженность поля \mathbf{H} в отличие от уравнений (42.2) и (42.4) всюду сохраняет конечное значение (если, разумеется, плотность тока \mathbf{j}

всюду конечна, как это следует из элементарных физических соображений) ¹⁾.

Для точек поля, лежащих вне токов ($R \neq 0$), это очевидно. Чтобы убедиться в конечности поля \mathbf{H} внутри токов, рассмотрим произвольную точку P' , лежащую внутри несущего ток проводника, и опишем вокруг нее сферу V' малого, но все же конечного радиуса R_0 . Поле, создаваемое в P точками, находящимися вне сферы V' , конечно, ибо эти токи находятся от P на конечном расстоянии, большем R_0 . Стало быть, нам достаточно убедиться в конечности поля \mathbf{H}' , созданного токами, находящимися внутри сферы V' . Из уравнения (44.3) следует:

$$|\mathbf{H}'| \leq \frac{1}{c} \int_{V'} \frac{\|[\mathbf{jR}]\|}{R^3} dV,$$

где $|\mathbf{H}'|$ и $\|[\mathbf{jR}]\|$ суть абсолютные величины соответствующих векторов, а интегрирование распространено по объему сферы V' . Но

$$\|[\mathbf{jR}]\| \leq j_m R,$$

где j_m обозначает максимальное значение плотности тока внутри сферы V' . Стало быть,

$$|\mathbf{H}'| \leq \frac{j_m}{c} \int_{V'} \frac{dV}{R^2}.$$

Введя сферические координаты R, ϑ и α с центром в P , получим

$$dV = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha dR$$

и

$$|\mathbf{H}'| \leq \frac{j_m}{c} \int_{V'} \frac{dV}{R^2} = \frac{j_m}{c} \int_0^{R_0} dR \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{4\pi R_0 j_m}{c}.$$

Таким образом, H' есть величина конечная, стремящаяся к нулю при уменьшении радиуса сферы R_0 , что и требовалось доказать.

Нетрудно также доказать непрерывность вектора \mathbf{H} , т. е. доказать, что разность значений вектора \mathbf{H} в смежных точках поля P и P' стремится к нулю, если расстояние PP' стремится к нулю.

Пусть обе точки P и P' лежат внутри сферы V' . При переходе из P в P' поле токов, лежащих вне V' , изменяется непрерывно, ибо токи эти находятся на конечном расстоянии от P и P' . Что же касается поля \mathbf{H}' токов, лежащих внутри V' , то напряженность этого поля, по доказанному, меньше $(4\pi j_m/c) R_0$; стало быть, и изменение \mathbf{H}' при переходе от P к P' не может быть больше этого значения. Если PP' стремится к нулю, то R_0 может быть выбрано сколь угодно малым, откуда и следует непрерывность вектора \mathbf{H} .

Задача 29. По бесконечному прямому круговому цилиндру протекает параллельно оси цилиндра постоянный ток, равномерно распределенный по его поверхности. Показать, что поле тока внутри цилиндра равно нулю.

¹⁾ Впрочем, иногда удобно пользоваться представлением о *поверхностных токах*, объемная плотность которых j бесконечна (ср. поверхностные заряды в электростатике). О поверхностных токах см. § 49; магнитное поле этих токов обладает поверхностями разрыва.

§ 45. Лоренцева сила

1. Элемент объема dV проводника, по которому протекает ток плотности j , испытывает в магнитном поле \mathbf{H} пондеромоторную силу \mathbf{F} , равную [см. уравнение (44.4)]:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} [\mathbf{j}\mathbf{H}] dV. \quad (44.4)$$

Сила эта отлична от нуля лишь в том случае, если $j \neq 0$, т. е. если в проводнике происходит движение электрических зарядов. С точки зрения электронной теории, все пондеромоторные силы, испытываемые в электромагнитном поле какими бы то ни было телами, должны в конечном счете сводиться к силам, приложенным к электрическим зарядам, входящим в состав этих тел. Соответственно этому и в рассматриваемом случае мы должны попытаться свести силу \mathbf{F} , испытываемую несущим ток проводником, к силам, испытываемым движущимися в нем зарядами.

С этой целью выразим плотность тока j через число n находящихся в единице объема «свободных» электронов (т. е. электронов, движением своим создающих ток) и через *среднюю* скорость этих электронов u ; согласно уравнению (40.1),

$$j = neu.$$

Направление тока j условно считается совпадающим с тем направлением, по которому двигались бы *положительные* заряды, если бы этот ток создавался их движением. Стало быть, вектор j направлен противоположно средней скорости u движения *отрицательных* электронов, так что если под e понимать *алгебраическую* величину заряда (для электронов $e < 0$), то можно написать

$$j = neu. \quad (45.1)$$

Внося это в уравнение (44.4), получим

$$\mathbf{F} = \frac{ne}{c} [\mathbf{u}\mathbf{H}] dV. \quad (45.2)$$

Такова результирующая сила, действующая на $n dV$ свободных электронов, заключенных в элементе объема проводника и обладающих средней скоростью u . Естественно предположить, что на каждый из этих $n dV$ электронов действует сила

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}], \quad (45.3)$$

где v есть *истинная* скорость электрона. Если тока нет, то электроны движутся беспорядочно, $u = 0$ и равнодействующая приложенных к ним сил равна нулю. Если же ток отличен от нуля, то равнодействующая (45.2) этих сил сообщает электронам соответствующее приращение количества движения, которое при

столкновении электронов с атомами (или ионами) проводника передается этому проводнику и вызывает его движение в магнитном поле (или стремится вызвать, если проводник закреплен). С точки зрения макроскопической теории, не вдающейся в рассмотрение внутреннего механизма явлений, это значит, что на проводник действует пондеромоторная сила (44.4).

2. Результаты изучения движения свободных электронов (в точном смысле этого слова, например, электронов, образующих катодные лучи) подтверждают правильность формулы (45.3), которая оказывается применимой к (точечным) электрическим зарядам, движущимся со скоростью v в произвольном (постоянном или переменном) магнитном поле H . Если мы учтем еще силу eE , испытываемую (точечным) зарядом в электрическом поле E , то общая сила, испытываемая зарядом e в произвольном электромагнитном поле, выразится формулой

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vH}] \right). \quad (45.4)$$

Эта формула была впервые дана Лоренцем, и поэтому силу F называют *лоренцевой силой*.

Допустив справедливость формулы (45.4), мы можем, очевидно, лишь в том случае сохранить данное в § 2 *определение напряженности электрического поля E*, согласно которому E равно силе, испытываемой помещенным в это поле единичным положительным пробным зарядом, если мы присовокупим к этому определению оговорку, что пробный заряд должен быть *неподвижным* ($v = 0$); в этом случае формула (45.4) совпадает с формулой (2.2).

3. Весьма существенно, что сила, испытываемая движущимся зарядом в магнитном поле, *перпендикулярна как к направлению его движения v, так и к направлению поля H*. Таким образом, сила эта лишь искривляет путь заряда, не изменяя числового значения его скорости, т. е. не совершая никакой механической работы. Это обстоятельство может показаться противоречащим тому факту, что работа, совершаемая при движении несущего ток проводника в магнитном поле, вообще говоря, отлична от нуля (электромотор!). Кажущееся противоречие это разрешится, если принять во внимание, что движение проводника в магнитном поле неизбежно сопровождается явлениями электромагнитной индукции. Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в § 76.

4. Заметим в заключение, что искривление пути электрических зарядов под действием силы (45.3) должно сказываться в перераспределении тока по сечению проводника при внесении этого проводника в магнитное поле. Это перераспределение тока, действительно, проявляется в так называемых гальваномагнитных, терромагнитных и родственных им явлениях. Мы рассмотр-

рим в виде примера только одно из этих явлений, так называемое явление Холла.

Пусть по однородной металлической пластинке или ленте шириной a протекает электрический ток плотности j в направлении оси y (рис. 46).

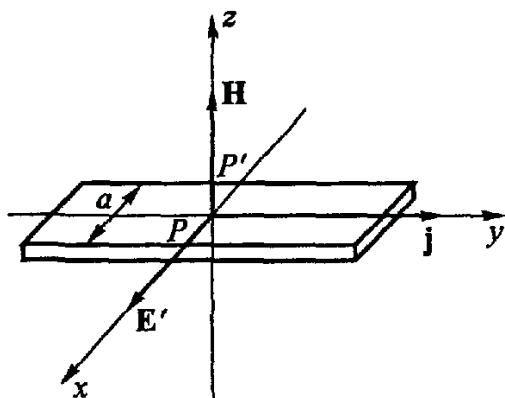


Рис. 46

Если поместить пластинку в однородное магнитное поле H , направленное по оси z , то электрические заряды, движением которых обусловливается ток, будут, согласно уравнению (45.2), испытывать добавочную силу

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{uH}],$$

где u — средняя скорость носителей тока. Эта добавочная сила будет отклонять ток по направлению оси x ; струя электронов будет «бить» в передний край пластиинки и вызывать там накопление отрицательных электрических зарядов. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока результирующая сила поля на-

копившихся у правого края отрицательных зарядов и поля избытка положительных зарядов, собравшихся у левого края, не уравновесит силы F . Обозначая это уравновешивающее поле через E' , получаем

$$eE' = -F = -\frac{e}{c} [\mathbf{uH}].$$

Из рассмотрения рис. 46 следует, что E' должно быть направлено по оси x ; стало быть, разность потенциалов между точками P и P' , лежащими на одном перпендикуляре к оси ленты, будет равна $\varphi_{P'}$

$$\varphi_{P'} - \varphi_P = E'_x a = \frac{1}{c} uaH,$$

или, выражая среднюю скорость электронов u через плотность тока j с помощью уравнения (45.1),

$$\varphi_{P'} - \varphi_P = \frac{jaH}{cen} = RjaH, \quad (45.5)$$

где коэффициент

$$R = \frac{1}{cen} \quad (45.6)$$

носит название *коэффициента Холла*¹⁾.

Поперечная разность потенциалов $\varphi_{P'} - \varphi_P$, возникающая в несущем ток проводнике при включении магнитного поля, может быть непосредственно измерена на опыте. Она оказывается, действительно, пропорциональной величинам j , H и a , как того требует формула (45.5). Числовое значение этой разности потенциалов весьма мало. Так, например, при пропускании тока в 10 А через золотую ленту шириной 1 см и толщиной 0,1 мм в магнитном

¹⁾ Более точные вычисления, учитывающие отличие скоростей отдельных электронов от их средней скорости, приводят лишь к незначительному изменению числового множителя в формуле (45.6): $R = 3\pi/(8cen)$, если применять к электронам классическую статистику. Если же применять к электронам статистику Ферми–Дирака (§ 41), то результат этих вычислений совпадает с (45.6).

поле напряженности 10 000 Гс эта разность потенциалов оказывается равной всего лишь 7 мкВ. Наиболее замечательно, однако, что знак коэффициента Холла R , который, согласно уравнению (45.6), должен быть отрицательным, ибо носителями тока в металлах являются отрицательные электроны ($e < 0$), в действительности оказывается различным для различных металлов. Так, $R < 0$ для Au, Cu, Pt, Ag, Ni и $R > 0$ для Fe, Co, Zn, Cd, Sb и т. д. Таким образом, дело обстоит так, как если бы носителями тока во второй из этих групп металлов были не отрицательные, а положительные заряды. Это заключение противоречит, однако, всей совокупности наших сведений о природе металлов и долгое время являлось одной из главнейших трудностей, противостоявших электронной теории металлов. Противоречие это вполне удовлетворительно разрешается квантовой теорией металлов.

П р и м е р. *Движение электронов в постоянном магнитном поле ($\mathbf{H} = \text{const}$).* Уравнение движения электрона в магнитном поле, согласно (45.3), гласит:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}].$$

Так как проекция силы \mathbf{F} на направление вектора \mathbf{H} неизменно равна нулю, то слагающая v_H скорости электрона по этому направлению будет постоянна. Так как, с другой стороны, *абсолютная* величина всей скорости \mathbf{v} тоже постоянна (ибо ускорение перпендикулярно скорости), то должна быть постоянной и перпендикулярная к вектору \mathbf{H} слагающая скорости v_{\perp} . Наконец, постоянной должна быть и абсолютная величина силы F , ибо

$$F = \frac{e}{c} |[\mathbf{v}\mathbf{H}]| = \frac{e}{c} v_{\perp} H = \text{const.}$$

Таким образом, движение электрона может быть разложено на два составляющих движения: равномерное движение по направлению поля \mathbf{H} со скоростью v_H и движение в плоскости, перпендикулярной \mathbf{H} , совершающееся с постоянным по величине ускорением

$$a = \frac{e}{cm} v_{\perp} H,$$

направленным перпендикулярно его скорости v_{\perp} . Но, как известно, движение с постоянным нормальным ускорением a представляет собой равномерное движение по кругу, радиус которого R может быть определен из соотношения

$$\frac{v_{\perp}^2}{R} = a = \frac{e}{cm} v_{\perp} H;$$

следовательно,

$$R = \frac{cmv_{\perp}}{eH} = \frac{cmv}{eH} \sin(\mathbf{v}, \mathbf{H}). \quad (45.7)$$

Совокупность равномерного поступательного движения со скоростью v_H и равномерного кругового движения со скоростью v_{\perp}

в плоскости, перпендикулярной \mathbf{H} , представляет собой движение с постоянной по абсолютной величине скоростью по винтовой линии, навитой на прямой круговой цилиндр радиуса R , ось которого параллельна \mathbf{H} . Угол между осью цилиндра и касательной к винтовой траектории электрона, конечно, постоянен и определяется начальными условиями движения. В частности, если начальная скорость электрона направлена перпендикулярно \mathbf{H} , то винтовая траектория электрона вырождается в окружность, плоскость которой перпендикулярна \mathbf{H} .

Итак, в постоянном однородном магнитном поле электрон описывает, вообще говоря, винтовую линию, ось которой совпадает с направлением поля. Заметим, что формула (45.7) дает возможность путем измерения R , v , H и $\sin(\mathbf{v}, \mathbf{H})$ определить отношение e/m заряда электрона к его массе. Возможность эта широко используется в экспериментальной физике для определения отношения e/m как для электронов, так и для других заряженных частиц (α -лучи, каналовые лучи и т. д.).

§ 46. Вектор-потенциал магнитного поля

1. Одно из основных уравнений магнитного поля — уравнение (44.3) — можно преобразовать к более удобному для вычисления виду. Подынтегральное выражение правой части этой формулы может быть, согласно уравнению (10*), записано следующим образом:

$$\frac{[\mathbf{jR}]}{R^3} = - \left[\mathbf{j} \cdot \operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right) \right] = \left[\operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{j} \right].$$

Напоминаем при этом, что в уравнении (44.3) \mathbf{R} означает радиус-вектор, проведенный из элемента тока $\mathbf{j} dV$ («точка истока») в ту «точку наблюдения» P , в которой определяется напряженность магнитного поля, и индекс a у знака градиента означает, что при определении градиента мы считаем неподвижной точку истока и переменной точку наблюдения.

С другой стороны, полагая в формуле (43₃*)

$$\varphi = \frac{1}{R} \quad \text{и} \quad \mathbf{a} = \mathbf{j},$$

получим

$$\operatorname{rot}_a \left(\frac{1}{R} \right) = \left[\operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{j} \right] + \frac{1}{R} \operatorname{rot}_a \mathbf{j},$$

где индекс a по-прежнему означает, что при образовании пространственных производных переменной считается лишь точка наблюдения P . Так как значение вектора \mathbf{j} в элементе dV (точка истока), очевидно, не зависит от перемещения точки

наблюдения P , то, стало быть¹⁾,

$$\operatorname{rot}_a \mathbf{j} = 0$$

и

$$\operatorname{rot}_a \left(\frac{\mathbf{j}}{R} \right) = \left[\operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right) \cdot \mathbf{j} \right] = \frac{[\mathbf{j} \mathbf{R}]}{R^3}.$$

Внося это в уравнение (44.3), получим

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \int \operatorname{rot}_a \left(\frac{1}{R} \right) dV.$$

Так как в этом выражении дифференцирование (образование ротора) производится по координатам точки наблюдения, а интегрирование — по объему проводников, обтекаемых током, то изменение порядка этих операций не может повлиять на результат вычислений. Стало быть, можно написать

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}_a \left(\frac{1}{c} \int \frac{1}{R} dV \right).$$

Если ввести обозначение

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{1}{R} dV, \quad (46.1)$$

то уравнение это примет вид

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (46.2)$$

где индекс a при знаке ротора опущен как излишний, ибо при заданном распределении токов вектор \mathbf{A} является функцией положения одной лишь точки наблюдения. Таким образом, напряженность магнитного поля может быть представлена в виде ротора некоторого вектора \mathbf{A} , который носит название *векторного потенциала* или *вектор-потенциала* токов.

2. Заметим, что для *линейных* токов (т. е. на расстояниях от токов, больших по сравнению с размерами их сечения) выражение векторного потенциала \mathbf{A} может быть преобразовано с помощью формулы (44.6) и принимает следующий вид:

$$\mathbf{A} = \frac{J}{c} \int_L \frac{ds}{R}. \quad (46.3)$$

¹⁾ Поясним это переходом к декартовым координатам. Пусть x_a, y_a, z_a суть координаты точки наблюдения P , а x_q, y_q, z_q — координаты элемента тока $j dV$, так что $dV = dx_q dy_q dz_q$. Вектор \mathbf{j} есть функция только от x_q, y_q, z_q : $\mathbf{j} = \mathbf{j}(x_q, y_q, z_q)$, тогда как $R = \sqrt{(x_a - x_q)^2 + (y_a - y_q)^2 + (z_a - z_q)^2}$. При определении div_a и rot_a дифференцировать нужно по координатам точки наблюдения, так что, например,

$$\operatorname{rot}_{ax} \mathbf{j} = \frac{\partial j_x(x_q, y_q, z_q)}{\partial y_a} - \frac{\partial j_y(x_q, y_q, z_q)}{\partial z_a} = 0.$$

3. Введением векторного потенциала \mathbf{A} значительно облегчается изучение магнитного поля постоянных токов, подобно тому, как введением скалярного потенциала φ облегчается изучение электрического поля стационарной системы электрических зарядов¹⁾. Аналогия между ролью векторного и скалярного потенциалов особенно отчетливо выявляется при сопоставлении формул для электростатического и магнитного полей:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \int \frac{\rho \mathbf{R}}{R^3} dV, & \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{j} \mathbf{R}]}{R^3} dV, \\ \varphi &= \int \frac{\rho dV}{R}, & \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j} dV}{R}, \\ \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} \varphi, & \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{A}.\end{aligned}$$

Из этого сопоставления явствует также, что вектор плотности тока играет для магнитного поля такую же роль, как скаляр плотности зарядов для поля электрического.

4. Переидем теперь от интегральных соотношений к дифференциальным уравнениям для вектор-потенциала.

Если ввести произвольную систему декартовых координат x, y, z , то уравнение (46.1) можно записать в следующей форме:

$$A_x = \frac{1}{c} \int \frac{j_x dV}{R}, \quad A_y = \frac{1}{c} \int \frac{j_y dV}{R}, \quad A_z = \frac{1}{c} \int \frac{j_z dV}{R}. \quad (46.4)$$

Каждое из этих выражений для каждой из слагающих вектора \mathbf{A} совершенно аналогично выражению скалярного потенциала электростатического поля:

$$\varphi = \int \frac{\rho dV}{R}.$$

В § 12 было показано, что это последнее выражение является решением (интегралом) дифференциального уравнения Пуассона (11.3):

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho.$$

Следовательно, и выражения (46.4) для слагающих вектор-потенциала являются решениями следующих дифференциальных уравнений Пуассона:

$$\nabla^2 A_x = -\frac{4\pi}{c} j_x, \quad \nabla^2 A_y = -\frac{4\pi}{c} j_y, \quad \nabla^2 A_z = -\frac{4\pi}{c} j_z.$$

Эти три уравнения для слагающих вектора \mathbf{A} , согласно (41*), равнозначны одному векторному уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (46.5)$$

¹⁾ Как мы убедимся в дальнейшем, магнитное поле токов, как и всякое вихревое поле, однозначным скалярным потенциалом не обладает.

которое и является искомым дифференциальным уравнением для векторного потенциала.

Нам остается только рассмотреть вопрос о том, при каких условиях интегральное выражение (46.1) для векторного потенциала *однозначно* вытекает из дифференциального уравнения (46.5). В § 12 были исследованы условия, при которых приведенное выше интегральное выражение для φ однозначно вытекает из уравнения Пуассона. Повторяя все рассуждения § 12 с заменой φ на A_x, A_y, A_z и ρ на $j_x/c, j_y/c, j_z/c$ и полагая, кроме того, $\sigma = 0$, мы придем к тому результату, что интегральное выражение (46.1) для \mathbf{A} является *единственным* решением дифференциального уравнения (46.5), удовлетворяющим следующим условиям:

- 1) как сам вектор \mathbf{A} , так и его пространственные производные конечны и непрерывны во всем пространстве;
- 2) в бесконечности каждая из слагающих A_k вектора \mathbf{A} удовлетворяет условиям типа (12.10):

$$RA_k \text{ и } R^2 \nabla A_k \text{ остаются конечными при } R \rightarrow \infty. \quad (46.6)$$

При этом, разумеется, предполагается, что плотность \mathbf{j} возбуждающих полей токов конечна во всем пространстве и настолько быстро убывает с R , что интеграл (46.1) сходится. Если же ввести в рассмотрение поверхностные токи, объемная плотность \mathbf{j} которых бесконечна, то выражение (46.1) нужно дополнить еще одним членом (см. § 49).

5. Заметим в заключение, что первые производные вектора \mathbf{A} по координатам связаны между собою соотношением

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (46.7)$$

Действительно, из уравнения (46.1) следует:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{c} \operatorname{div}_a \int \frac{\mathbf{j} dV}{R},$$

где индекс a у знака дивергенции означает, что пространственное дифференцирование производится по координатам точки наблюдения P . Но, как указывалось в начале этого параграфа, порядок операций интегрирования по объему токов и дифференцирования по точке наблюдения может быть изменен на обратный. Стало быть,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \operatorname{div}_a \left(\frac{\mathbf{j}}{R} \right) dV.$$

Применяя уравнение (43₂^{*}), можем написать

$$\operatorname{div}_a \left(\frac{\mathbf{j}}{R} \right) = \frac{1}{R} \operatorname{div}_a \mathbf{j} + \mathbf{j} \operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right) = \mathbf{j} \operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right),$$

ибо значение вектора \mathbf{j} от координат точки наблюдения P не зависит, ввиду чего $\operatorname{div}_a \mathbf{j} = 0$. С другой стороны, воспользовавшись формулой (10^{*}) и применив затем вторично формулу (43^{*}),

получим

$$\mathbf{j} \operatorname{grad}_a \left(\frac{1}{R} \right) = -\mathbf{j} \operatorname{grad}_q \left(\frac{1}{R} \right) = -\operatorname{div}_q \left(\frac{\mathbf{j}}{r} \right) + \frac{1}{R} \operatorname{div}_q \mathbf{j}.$$

Последний член снова равен нулю, ибо дивергенция вектора \mathbf{j} равна нулю [уравнение (37.4)]. Стало быть, окончательно:

$$\operatorname{div}_a \left(\frac{\mathbf{j}}{R} \right) = -\operatorname{div}_q \left(\frac{\mathbf{j}}{R} \right), \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \int \operatorname{div}_q \left(\frac{\mathbf{j}}{R} \right) dV.$$

Последний интеграл можно преобразовать по теореме Гаусса, ибо пространственное дифференцирование под знаком интеграла производится по тем же координатам точек истока, как и интегрирование (в отличие от предшествующего выражения для $\operatorname{div} \mathbf{A}$, в котором дифференцирование под знаком интеграла производилось по координатам точки наблюдения). Следовательно,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \oint \frac{j_n}{R} dS,$$

причем интегрирование должно быть распространено по поверхности всех обтекаемых током проводников. Но на поверхности проводников, согласно уравнению (37.6),

$$j_n = 0;$$

следовательно,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0,$$

что и требовалось доказать.

§ 47. Дифференциальные уравнения магнитного поля. Циркуляция напряженности магнитного поля

1. Так как дивергенция всякого ротора всегда равна нулю [уравнение (42₂^{*})], то из уравнения (46.2) непосредственно вытекает весьма важное уравнение:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \tag{47.1}$$

С другой стороны, образовывая ротор от обеих сторон того же уравнения (46.2), получаем на основании уравнения (42₃^{*}):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A},$$

или, ввиду уравнения (46.7),

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{A}. \tag{47.2}$$

Внося сюда выражение (46.5) для $\nabla^2 \mathbf{A}$, получаем окончательно:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \tag{47.3}$$

Уравнения (47.1) и (47.3) представляют собой полную систему основных дифференциальных уравнений магнитного поля постоянных токов (см. § 49).

2. Рассмотрим циркуляцию магнитного вектора \mathbf{H} по произвольной замкнутой линии L . На основании теоремы Стокса (27*) и уравнения (47.3) мы можем написать

$$\oint_L H_s ds = \int_S \text{rot}_n \mathbf{H} dS = \frac{4\pi}{c} \int_S j_n dS, \quad (47.4)$$

причем поверхностные интегралы могут быть распространены по *любой* из поверхностей, опирающихся на контур L (см. приложение, с. 593). Впрочем, нетрудно и непосредственно убедиться, что благодаря *замкнутости* постоянных токов значение этих поверхностных интегралов зависит лишь от контура L поверхности интегрирования S . Действительно, согласно уравнению (36.3), $j_n dS$ равно силе тока dJ , проходящего через элемент поверхности dS в направлении ее положительной нормали. Следовательно,

$$\oint_L H_s ds = \frac{4\pi}{c} \int_S j_n dS = \frac{4\pi}{c} \sum J, \quad (47.5)$$

где $\sum J$ есть алгебраическая сумма сил токов, пронизывающих контур L ; токи эти должны считаться положительными или отрицательными, в зависимости от того, составляют ли их направления с направлением положительного обхода контура L право- или левовинтовую систему (рис. 47).

Если же две поверхности S и S' опираются на один и тот же контур L , то совокупность этих поверхностей образует одну замкнутую поверхность, ограничивающую некоторый объем V . Благодаря замкнутости постоянных токов количество электричества $\sum J$, втекающего через S в единицу времени в объем V , должно равняться количеству электричества $\sum J$, вытекающего из этого объема через поверхность S' . Таким образом, величина $\sum J$ действительно будет одинакова для обеих поверхностей S и S' .

Итак, согласно уравнению (47.5), циркуляция вектора напряженности магнитного поля по кривой, не охватывающей токов, равна нулю, циркуляция же по кривой, охватывающей токи, равна помноженной на $4\pi/c$ сумме сил этих токов (взятых с надлежащими знаками). Эта теорема является одной из важнейших в теории магнитного поля.

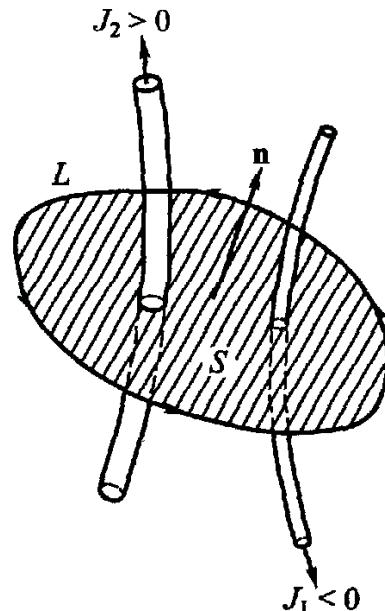


Рис. 47

Задача 30. Показать, исходя из уравнения (47.4), что напряженность поля тока силы J , протекающего по бесконечному прямолинейному круговому цилиндру радиуса r_0 , равна

$$H_e = \frac{2J}{cr} \quad (\text{при } r \geq r_0) \quad \text{и} \quad H_i = \frac{2J_r}{cr_0^2} \quad (\text{при } r \leq r_0),$$

где r есть расстояние точки поля от оси тока, причем силовые линии поля представляют собой концентрические току окружности. (См. также для сравнения задачу 25.)

§ 48. Поля потенциальные и поля соленоидальные. Сопоставление дифференциальных уравнений электрического и магнитного полей

1 В § 7 и 8 мы доказали, что необходимым и достаточным условием того, чтобы поле произвольного вектора \mathbf{a} было полем *потенциальным*, является равенство нулю циркуляции вектора по любому замкнутому контуру [уравнение (7.3)]:

$$\oint a_s ds = 0. \quad (48.1)$$

В этом и только в этом случае можно ввести однозначный скалярный потенциал ψ вектора \mathbf{a} , определяемый соотношением

$$\psi_1 - \psi_2 = \int_1^2 a_s ds, \quad (48.2)$$

причем вектор \mathbf{a} , согласно результатам § 10, оказывается равным градиенту этого потенциала, взятому с обратным знаком¹⁾:

$$\mathbf{a} = -\operatorname{grad} \psi. \quad (48.3)$$

Далее, в § 7 мы показали, что вектор, удовлетворяющий интегральному условию (48.1), удовлетворяет также дифференциальному уравнению

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0 \quad (48.4)$$

во всех точках пространства²⁾. Обратно, из уравнения (48.4) следует уравнение (48.1). Таким образом, условия (48.1) и (48.4)

¹⁾ Хотя рассуждения § 7, 8 и 10 относятся непосредственно к вектору напряженности электрического поля, однако, как уже указывалось там же, все эти рассуждения применимы ко всякому вектору \mathbf{a} , циркуляция которого по *произвольному* контуру тождественно равна нулю. Конечно, при этом встречающаяся в этих параграфах величина A уже не будет, вообще говоря, представлять собой работу сил поля; физический смысл ее будет зависеть от смысла вектора \mathbf{a} .

²⁾ Уравнение (48.4) может быть также непосредственно получено из (48.3) на основании известной формулы векторного анализа (42^{*}), согласно которой ротор градиента тождественно равен нулю.

эквивалентны друг другу, и следовательно, необходимым и достаточным условием того, чтобы поле вектора \mathbf{a} обладало однозначным скалярным потенциалом, является равенство нулю $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ во всех точках пространства. Поэтому поле потенциальное называется также полем *безвихревым*.

В частности, напряженность постоянного электрического поля \mathbf{E} удовлетворяет условию (48.1) [см. уравнение (7.3)] и поэтому обладает скалярным потенциалом φ , а также удовлетворяет дифференциальному уравнению типа (48.4):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (48.5)$$

[см. уравнение (7.6)].

2. Сопоставим систему уравнений для напряженностей магнитного и электростатического полей:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, & \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, & \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \end{array}$$

Магнитное поле, в отличие от поля электростатического, есть поле вихревое, и притом чисто вихревое в том смысле, что дивергенция его всюду равна нулю. Такие поля называются также *соленоидальными*. Поэтому скалярным потенциалом (по крайней мере, однозначным скалярным потенциалом, — см. дальше) магнитное поле не обладает. Подобно тому, как потенциальное электростатическое поле полностью определяется заданием силы его истоков (т. е. заданием его дивергенции как функции координат), так вихревое магнитное поле полностью определяется заданием *мощности его вихрей*, т. е. заданием ротора поля как функции координат. Согласно уравнению (47.3) вихри магнитного поля расположены в участках поля, обтекаемых токами, и только в них, причем мощность этих вихрей (т. е. ротор) пропорциональна плотности тока \mathbf{j} . Иными словами, обтекаемые токами участки поля могут быть названы *вихревым пространством* магнитного поля.

§ 49. Пограничные условия в магнитном поле токов. Поверхностные токи. Поверхностный ротор. Поле бесконечного соленоида

1. С целью установления пограничных условий, которым должен удовлетворять вектор магнитного поля на поверхностях разрыва, предположим сначала, что во всех проводниках и, в частности, в проводящих ток тонких слоях, если такие существуют, объемная плотность токов \mathbf{j} всюду остается конечной. Будем затем стремить толщину dl этих обтекаемых током слоев к нулю и потребуем, чтобы уравнения поля (47.1) и (47.3) оставались справедливыми в этих слоях и в предельном случае при $dl = 0$.

Этим требованием искомые пограничные условия определяются однозначно.

Действительно, на основании этого требования из уравнения (47.1) получим, согласно уравнению (6.7), пограничные условия для нормальной слагающей вектора \mathbf{H} :

$$\operatorname{Div} \mathbf{H} = H_{2n} - H_{1n} = 0. \quad (49.1)$$

Интегрируя же уравнение (47.3) по поверхности S , получим на основании теоремы Стокса (27*) уравнение (47.4)

$$\oint_L H_s ds = \frac{4\pi}{c} \int j_n dS.$$

Возьмем произвольный слой толщины dl , отделяющий среду 1 от среды 2, и рассмотрим элемент нормального сечения этого слоя $dS = dl dt$, заштрихованный на рис. 48. Применим

интегральное уравнение (47.4) к этому элементу. Направление положительного обхода этого участка выберем, например, так, как указано на рисунке.

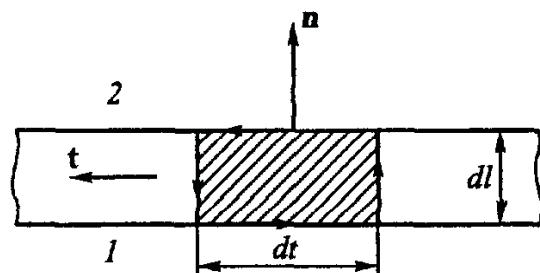


Рис. 48

Если мы станем стремить к нулю толщину слоя dl , оставляя длину рассматриваемого участка dt неизменной, то площадь этого участка будет также стремиться к нулю. Левая же часть уравнения (47.4) при $dl \rightarrow 0$

сведется (вплоть до величин второго порядка малости) к

$$\oint L_s ds = (H_{2t} - H_{1t}) dt,$$

где H_1 и H_2 суть значения вектора \mathbf{H} в первой и второй средах, а t — единичный вектор, касательный к поверхности раздела и лежащий в плоскости сечения слоя.

Что же касается правой части уравнения (47.4), то она пропорциональна силе тока, протекающего через площадку $dl dt$, и поэтому сведется к нулю при $dl = 0$, если объемная плотность тока j конечна, как мы всегда до сих пор предполагали. Однако в ряде случаев, если токи сосредоточены в слое весьма малой толщины, удобно рассматривать предельный случай токов, протекающих по бесконечно тонким поверхностям, т. е. *токов поверхностных* (ср. объемные и поверхностные электрические заряды).

2. Под *плотностью i поверхностных токов*, в отличие от плотности j токов объемных, мы будем понимать количество электричества, протекающего в единицу времени через *единицу длины отрезка*, расположенного на поверхности, по которой

текет ток, и перпендикулярного направлению тока. Если \mathbf{i} отлично от нуля, то сила тока, протекающего через заштрихованную площадку $dt dl$ (см. рис. 48), в пределе при $dl \rightarrow 0$ окажется, очевидно, равной

$$\lim j_n dS = \lim j_n dt dl = i_N dt, \quad (49.2)$$

где i_N есть перпендикулярная к \mathbf{t} слагающая плотности поверхностного тока. Мы ввели здесь индекс N вместо n , чтобы сохранить за \mathbf{n} значение нормали к поверхности раздела (\mathbf{n} направлено из среды 1 в среду 2). Под \mathbf{N} нужно понимать единичный вектор, касательный к поверхности и перпендикулярный к касательному же вектору \mathbf{t} .

Внося полученные выражения в (47.4), найдем после сокращения на dt искомое пограничное условие:

$$\frac{4\pi i_N}{c} = H_{2t} - H_{1t}.$$

Из рассмотрения рис. 48, в котором, соответственно избранному нами направлению обхода заштрихованной площадки $dt dl$, вектор \mathbf{N} должен быть направлен на читателя, можно убедиться, что взаимно перпендикулярные единичные векторы \mathbf{t} , \mathbf{N} , \mathbf{n} составляют правовинтовую систему (рис. 49), так что

$$\mathbf{t} = [\mathbf{N}\mathbf{n}].$$

Стало быть,

$$H_t = \mathbf{H}\mathbf{t} = \mathbf{H}[\mathbf{N}\mathbf{n}] = \mathbf{N}[\mathbf{n}\mathbf{H}], \quad i_N = \mathbf{N}\mathbf{i}.$$

Внося это в предшествующее уравнение, получим

$$\frac{4\pi N_i}{c} = \mathbf{N}[\mathbf{n}(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)].$$

Так как \mathbf{N} может иметь произвольное направление в плоскости раздела, то

$$\frac{4\pi i}{c} = [\mathbf{n}\mathbf{H}_2] - [\mathbf{n}\mathbf{H}_1]. \quad (49.3)$$

Это уравнение и представляет собой то пограничное условие, которому при наличии поверхностных токов на поверхности раздела должны удовлетворять *касательные* слагающие вектора \mathbf{H} (ибо лишь эти слагающие и входят в выражение $[\mathbf{n}\mathbf{H}]$).

При отсутствии поверхностных токов это пограничное условие принимает вид

$$[\mathbf{n}(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] = 0. \quad (49.4)$$

Это уравнение означает, что слагающие напряженности поля \mathbf{H} , касательные к произвольной поверхности, непрерывны,

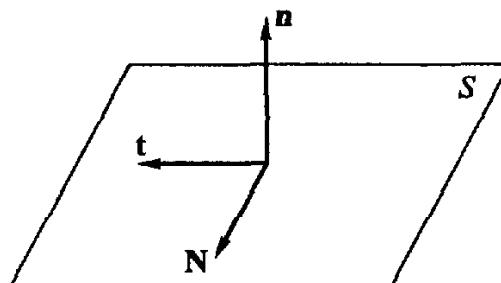


Рис. 49

т. е. что при отсутствии поверхностных токов для любого касательного направления \mathbf{t}

$$H_{2t} = H_{1t}. \quad (49.5)$$

Очевидно, что уравнения (49.4) и (49.5) эквивалентны друг другу.

3. Из предшествующего ясно, что, вообще говоря, если два произвольных вектора \mathbf{a} и \mathbf{j} связаны соотношением

$$\text{rot } \mathbf{a} = 4\pi \mathbf{j},$$

то на поверхностях разрыва этих векторов связывающее их соотношение принимает вид

$$[\mathbf{n}(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)] = 4\pi \mathbf{i},$$

где \mathbf{i} получается из \mathbf{j} предельным переходом типа (49.2). Поэтому левую часть последнего уравнения принято называть *поверхностным ротором* вектора \mathbf{a} и, в отличие от обычного ротора, обозначать через *Rot* с прописной буквы R :

$$\text{Rot } \mathbf{a} = [\mathbf{n}(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)] \quad (49.6)$$

(ср. определение поверхности дивергенции в § 6). По аналогии с уравнением (6.8) мы, таким образом, можем выразить только что сформулированное положение в следующем символическом виде:

$$\text{rot } \mathbf{a} = 4\pi \mathbf{j} \rightarrow \text{Rot } \mathbf{a} = 4\pi \mathbf{i}. \quad (49.7)$$

4. Итак, пограничные условия (49.1) и (49.3) для магнитного поля постоянных токов могут быть записаны следующим образом:

$$\text{Div } \mathbf{H} = 0, \quad \text{Rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}. \quad (49.8)$$

Пограничные условия (4.3) и (7.7) для стационарного электрического поля в вакууме на основании эквивалентности уравнений типа (49.4) и (49.5) могут быть записаны так:

$$\text{Div } \mathbf{E} = 4\pi\sigma, \quad \text{Rot } \mathbf{E} = 0. \quad (49.9)$$

Уравнения

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \text{Rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}, \\ \text{div } \mathbf{H} &= 0, & \text{Div } \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B})$$

представляют собой *полную систему* дифференциальных уравнений магнитного поля постоянных токов. Другими словами, системой (B) магнитное поле определяется *однозначно*, если известно распределение токов \mathbf{j} и \mathbf{i} и если на бесконечности удовлетворено условие

$$HR^2 \text{ при } R \rightarrow \infty \text{ остается конечным,} \quad (49.10)$$

означающее, что все возбуждающие поле токи расположены в конечной области пространства [ср. (12.10) и (46.6)]; обратно, если задана напряженность поля \mathbf{H} в каждой точке пространства, то системой (B) однозначно определяется распределение токов \mathbf{i} и \mathbf{j} .

Второе утверждение очевидно; для доказательства же первого предположим, что существуют два решения \mathbf{H} и \mathbf{H}' системы (B) при заданных \mathbf{j} и \mathbf{i} . Внося оба решения в (B) и вычитая затем соответственные уравнения одно из другого, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}'' &= 0, & \operatorname{Rot} \mathbf{H}'' &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{H}'' &= 0, & \operatorname{Div} \mathbf{H}'' &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B}')$$

где $\mathbf{H}'' = \mathbf{H} - \mathbf{H}'$. Далее, полагая $\mathbf{H}'' = \operatorname{rot} \mathbf{A}''$, что всегда возможно, ввиду $\operatorname{div} \mathbf{H}'' = 0$, получаем на основании (44*) и (B') следующую цепь равенств:

$$\mathbf{H}''^2 = \mathbf{H}'' \operatorname{rot} \mathbf{A}'' = \operatorname{div} [\mathbf{A}'' \mathbf{H}''] + \mathbf{A}'' \operatorname{rot} \mathbf{H}'' = \operatorname{div} [\mathbf{A}'' \mathbf{H}''].$$

Стало быть, интеграл от H''^2 по произвольному объему, ограниченному поверхностью S , будет на основании (17*) равен

$$\int H''^2 dV = \int \operatorname{div} [\mathbf{A}'' \mathbf{H}''] dV = \oint [\mathbf{A}'' \mathbf{H}'']_n dS, \quad (49.11)$$

причем поверхностный интеграл должен быть взят лишь по пограничной поверхности S , ибо во всем поле, согласно (B'), вектор \mathbf{H}'' , а стало быть, и вектор \mathbf{A}'' остаются непрерывными.

Если теперь распространить интегрирование на объем *полного поля* (с. 84), то на основании (49.10) интеграл по пограничной поверхности S обратится в нуль¹⁾. Стало быть, $\int H''^2 dV = 0$, откуда следует, что $\mathbf{H}'' = \mathbf{H} - \mathbf{H}'$ во всех точках поля обращается в нуль. Этим и доказывается однозначность решения системы (B).

5. Заметим, что при наличии поверхностных токов выражения (44.3) и (46.1) для напряженности поля \mathbf{H} и для вектор-потенциала \mathbf{A} принимают вид

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{jR}]}{R^3} dV + \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{iR}]}{R^3} dS, \quad (49.12)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}}{R} dV + \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{i}}{R} dS, \quad (49.13)$$

где поверхностные интегралы должны быть распространены по всем поверхностям, обтекаемым поверхностными токами. В справедливости этих обобщенных выражений легко убедиться путем предельного перехода от токов объемных к токам поверхностным.

¹⁾ Так как \mathbf{H} выражается через производные вектор-потенциала \mathbf{A} , то при условии (49.10) этот вспомогательный вектор всегда может быть выбран так, чтобы на бесконечности удовлетворялось условие:

AR при $R \rightarrow \infty$ остается конечным [см. также уравнение (46.6)].

В дальнейшем мы повсюду, если только явно не будет оговорено противное, будем считать поверхностные электрические токи отсутствующими ($i = 0$).

Пример. *Магнитное поле бесконечного цилиндрического соленоида.* Предположим, что ток J циркулирует по проводнику, намотанному по винтовой линии на поверхность цилиндра сечения S . Такой обтекаемый током цилиндр называется цилиндрическим соленоидом.

Пусть на единицу длины цилиндра приходится n витков проводника. Если ход винтовой линии достаточно мал, то каждый виток соленоида можно приближенно заменить замкнутым кольцеобразным током той же силы. Если к тому же сечение проводника мало по сравнению с сечением цилиндра, то можно приближенно считать, что по бесконечно тонкой поверхности цилиндра циркулирует равномерно распределенный *поверхностный* ток плотности

$$i = nJ. \quad (49.14)$$

Линии этого тока представляют собой окружности, образованные сечением поверхности цилиндра плоскостями, перпендикулярными его оси.

Предположим, что наш соленоид представляет собою цилиндр бесконечной длины. В этом случае поле вне соленоида H_e равно нулю, а поле внутри соленоида H_i однородно и равно

$$H_i = \frac{4\pi}{c} i = \frac{4\pi}{c} nJ, \quad H_e = 0, \quad (49.15)$$

причем \mathbf{H}_i направлено по оси соленоида и составляет с направлением тока в соленоиде правовинтовую систему. Действительно, выражения (49.15), очевидно, удовлетворяют уравнениям $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ и $\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$, соответствующим отсутствию объемных токов. Далее, \mathbf{H} всюду параллельно поверхности соленоида, т. е. поверхности разрыва поля, и поэтому $\operatorname{Div} \mathbf{H} = 0$. Наконец, как легко убедиться, при указанном направлении \mathbf{H}_i выражения (49.15) удовлетворяют на поверхности соленоида также и уравнению $\operatorname{Rot} \mathbf{H} = (4\pi/c) \mathbf{i}$. Таким образом, выражения (49.15) удовлетворяют всем уравнениям системы (B) и, ввиду полноты этой системы, представляют собою единственное решение задачи¹⁾.

¹⁾ Собственно говоря, приведенное выше доказательство однозначности системы (B) неприменимо непосредственно к полю бесконечного соленоида, ибо в этом случае токи не сосредоточены в конечном участке пространства, \mathbf{H} не исчезает в бесконечности, и нельзя утверждать, что входящие в (49.11) величины \mathbf{H}'' и \mathbf{A}'' будут исчезать в бесконечности. Если, однако, рассматривать поле бесконечного соленоида как предельный случай поля очень длинного конечного соленоида (а только такое рассмотрение и имеет физический смысл), то из доказанной однозначности поля сколь угодно длинного, но конечного соленоида вытекает однозначность поля и в предельном случае бесконечного соленоида.

Очевидно, что формулы (49.15) приближенно применимы и к полю *конечного* соленоида в тех его участках, расстояние которых от концов соленоида велико как по сравнению с расстоянием до ближайших участков соленоида, так и по сравнению с попечником соленоида. В сущности, только этот случай и имеют в виду, когда говорят о поле «бесконечного» соленоида.

Задача 31. Решить задачу 29, исходя из дифференциальных уравнений поля (\mathbf{B}), и, кроме того, показать, что поле вне полого цилиндра совпадает с полем линейного тока той же силы, протекающего по оси цилиндра.

§ 50. Пондеромоторные силы, испытываемые в магнитном поле замкнутым током. Потенциальная функция тока во внешнем магнитном поле

1. При определении механических сил, испытываемых замкнутым током J во внешнем магнитном поле, ограничимся сначала тем случаем, когда это поле не изменяется сколько-нибудь существенно на протяжении любого сечения тока J , так что ток этот можно считать *линейным* (с. 206).

Поставим себе прежде всего задачу определить работу, совершающую пондеромоторными силами магнитного поля \mathbf{H} при произвольном перемещении контура тока J . Перемещение это, вообще говоря, может быть связано с деформацией контура тока.

Пусть каждый элемент ds контура L тока J испытывает некоторое произвольное бесконечно малое перемещение \mathbf{q} , конечно, не нарушающее связности контура (рис. 50), причем *сила тока J остается при этом перемещении постоянной* (виртуальное перемещение). Работа, совершаяя силами магнитного поля при этом перемещении элемента ds , будет, согласно уравнению (44.4), равна

$$\mathbf{qF} = \frac{J}{c} \mathbf{q} [ds \mathbf{H}];$$

общая же работа δA , связанная с перемещением всех элементов контура тока, будет равна

$$\delta A = \oint \mathbf{F} \mathbf{q} = \frac{J}{c} \oint_L \mathbf{q} [ds \mathbf{H}] = \frac{J}{c} \oint_L \mathbf{H} [\mathbf{q} ds],$$

но

$$[\mathbf{q} ds] = \delta \mathbf{S},$$

где $\delta \mathbf{S}$ есть элемент площади, описанный элементом контура ds при его перемещении \mathbf{q} (рис. 50), причем порядок сомножителей ds и \mathbf{q} в выражении для $\delta \mathbf{S}$ выбран так, что направление вектора $\delta \mathbf{S}$ (т. е. направление *положительной* нормали \mathbf{n} к элемен-

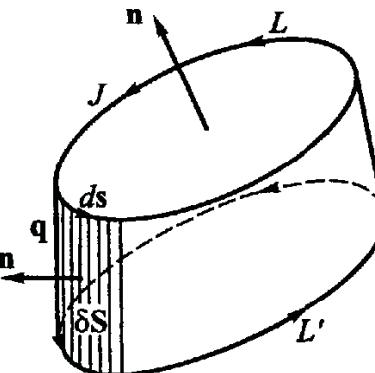


Рис. 50

ту $\delta\mathbf{S}$) образует с направлением тока в контуре L' правовинтовую систему. Стало быть,

$$\delta A = \frac{J}{c} \int_{\Delta} \mathbf{H} \delta \mathbf{S} = \frac{J}{c} \int_{\Delta} H_n \delta S,$$

где интегрирование должно быть распространено по всем элементам δS поверхности Δ , описанной контуром тока L при перемещении его точек на расстояние \mathbf{q} в положение L' .

Обозначим через Φ поток магнитного вектора, или, выражаясь короче, *магнитный поток* через контур тока L (т. е. через произвольную поверхность S , опирающуюся на этот контур):

$$\Phi = \int_S H_n dS, \quad (50.1)$$

где \mathbf{n} есть *положительная* нормаль к S , образующая с направлением тока правовинтовую систему. Этот поток зависит лишь от расположения контура L , но не от формы поверхности S , ибо, согласно уравнениям (46.2) и (27*),

$$\Phi = \int_S H_n dS = \int_S \text{rot}_n \mathbf{A} dS = \oint_L A_s dS. \quad (50.2)$$

Таким образом, магнитный поток Φ через контур L равен циркуляции вектор-потенциала \mathbf{A} по этому контуру.

Пользуясь обозначением (50.1), можем написать

$$\int_{\Delta} H_n dS = \delta\Phi,$$

ибо изменение магнитного потока через контур тока равно, очевидно, магнитному потоку через поверхность Δ , описанную контуром при его перемещении. Стало быть,

$$\delta A = \frac{J}{c} \delta\Phi. \quad (50.3)$$

Таким образом, мы приходим к следующему весьма простому результату: работа пондеромоторных сил магнитного поля при произвольном перемещении тока равна умноженному на J/c изменению магнитного потока через контур этого тока. Значит, в частности, такие перемещения тока, при которых магнитный поток через его контур не испытывает изменения, не связаны с работой магнитного поля.

2. Если ввести обозначение:

$$U = -\frac{J}{c} \Phi, \quad (50.4)$$

то уравнение (50.3) примет вид

$$\delta A = -(\delta U)_J, \quad (50.5)$$

где индекс J при δU означает, что при определении приращения функции U силу токов J нужно считать постоянной.

Следовательно, работа пондеромоторных сил магнитного поля равна убыли функции U , которая, таким образом, играет роль *потенциальной или силовой функции* тока в магнитном поле. В частности, путем обычных в аналитической механике способов рассуждения легко убедиться, исходя из уравнения (50.5), что если функция U выражена в зависимости от каких-либо «обобщенных» координат q_i , характеризующих положение контура тока, то «обобщенная» (в смысле аналитической механики) пондеромоторная сила θ_i , действующая на ток по направлению какой-либо из этих координат q_i , будет равна

$$\theta_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (50.6)$$

Эти свойства потенциальной или силовой функции U могут побудить отождествить ее с *потенциальной энергией* магнитного поля. Однако такое заключение было бы *неосновательным*, ибо, как мы убедимся в следующей главе, перемещения проводника в магнитном поле сопровождаются не только работой пондеромоторных сил этого поля, но также и работой сил электродвижущих, индуцируемых полем в движущемся проводнике; ввиду этого изменение энергии магнитного поля при перемещении проводников нельзя определить по работе одних только пондеромоторных сил поля.

Поэтому, если мы иногда и будем для краткости называть U потенциальной «энергией», то лишь в том смысле, что пондеромоторные силы магнитного поля связаны с U той же зависимостью, с какой силы *консервативного* поля сил связаны с потенциальной энергией этого поля.

Хотя потенциальная силовая функция U и не равна энергии магнитного поля, тем не менее введением в рассмотрение этой функции значительно облегчается изучение пондеромоторных сил, действующих в магнитном поле на замкнутые токи, ибо устраняется необходимость в каждом отдельном случае производить сложное суммирование сил, действующих на отдельные элементы тока.

В частности, исходя из уравнений (50.5) и (50.6), путем обычных, хорошо известных рассуждений легко убедиться, что устойчивое равновесие контура постоянного тока соответствует *минимуму потенциальной функции* U , т. е., согласно уравнению (50.4), *максимуму магнитного потока* Φ .

3. Формулы, полученные нами для токов линейных, легко обобщить на случай токов объемных, т. е. на тот случай, когда

нельзя пренебречь изменением напряженности магнитного поля на протяжении сечения тока. С этой целью внесем сначала (50.2) в уравнение (50.4):

$$U = -\frac{J}{c} \oint \mathbf{A} d\mathbf{s}, \quad (50.7)$$

а затем выполним в полученном уравнении переход к объемным токам, согласно формуле (44.6):

$$U = -\frac{1}{c} \int \mathbf{A} \mathbf{j} dV. \quad (50.8)$$

Это и является искомым представлением формулы (50.4).

Два последних уравнения можно истолковать в том смысле (со всеми только что сделанными оговорками), что каждый элемент тока $J d\mathbf{s}$ (или $\mathbf{j} dV$) обладает в магнитном поле потенциальной «энергией» $-\frac{J}{c} \mathbf{A} d\mathbf{s}$ (или $-\frac{1}{c} \mathbf{A} \mathbf{j} dV$) и что потенциальная функция U замкнутого тока равна сумме «энергий» отдельных его элементов.

При мер. Рамка в однородном магнитном поле. Рассмотрим произвольный плоский контур (рамку) площади S , обтекаемый током силы J . Пусть эта рамка помещена в однородное магнитное поле \mathbf{H} и закреплена так, что может вращаться около оси, перпендикулярной полю \mathbf{H} (рис. 51).

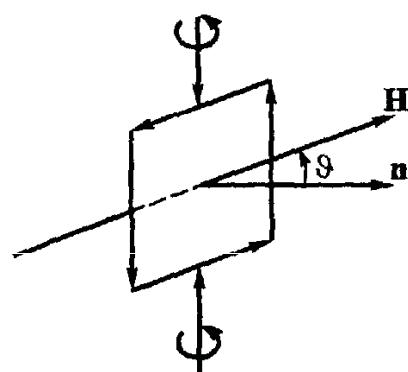


Рис 51

Пусть ϑ есть угол между \mathbf{H} и положительной нормалью к рамке \mathbf{n} , т. е. нормалью, образующей с направлением тока в рамке правовинтовую систему. Тогда магнитный поток через рамку будет равен $\Phi = HS \cos \vartheta$, а потенциальная функция рамки будет равна

$$U = -\frac{1}{c} JSH \cos \vartheta. \quad (50.9)$$

Обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате ϑ , как известно (см. пример в § 18), есть не что иное, как момент N приложенных к рамке сил, стремящийся повернуть рамку около оси вращения:

$$N = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{c} JSH \sin \vartheta.$$

Положения равновесия рамки соответствуют $N = 0$, т. е. $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$. Первое из этих положений соответствует минимуму, второе — максимуму потенциальной функции U , и, стало быть, лишь первое положение равновесия является устойчивым. Отсюда следует, что пондеромоторные силы магнитного поля стремятся повернуть плоскость тока так, чтобы положительная нормаль

к ней совпада с направлением магнитного поля \mathbf{H} . В частности, два взаимодействующих контура тока будут стремиться устремиться так, чтобы плоскости их были параллельны друг другу, а направление обоих токов было одинаково.

§ 51. Пондеромоторное взаимодействие токов. Коэффициент взаимной индукции

1. Рассмотрим теперь взаимодействие двух замкнутых линейных токов J_1 и J_2 , обтекающих контуры L_1 и L_2 . Пусть \mathbf{H}_1 и \mathbf{A}_1 быть значения напряженности и векторного потенциала поля первого тока, а \mathbf{H}_2 и \mathbf{A}_2 — соответственные величины для второго тока. Далее, обозначим через Φ_{12} магнитный поток поля первого тока через контур второго тока:

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} H_{1n} dS_2 = \oint_{L_2} A_{1s} ds_2 = \oint_{L_2} \mathbf{A}_1 d\mathbf{s}_2, \quad (51.1)$$

где S_2 есть поверхность, опирающаяся на контур L_2 , а $d\mathbf{s}_2$ — элемент длины этого контура [ср. уравнение (50.2)]. Магнитный поток, посыпаемый вторым током через контур первого тока, мы обозначим соответственно через Φ_{21} :

$$\Phi_{21} = \int_{S_1} H_{2n} dS_1 = \oint_{L_1} \mathbf{A}_2 d\mathbf{s}_1. \quad (51.2)$$

Внося в уравнение (51.1) значение (46.3) вектор-потенциала линейного тока J_1 :

$$\mathbf{A}_1 = \frac{J_1}{c} \oint_{L_1} \frac{d\mathbf{s}_1}{R},$$

получим

$$\Phi_{12} = \frac{J_1}{c} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\mathbf{s}_1 d\mathbf{s}_2}{R},$$

где интегрирование должно быть произведено по обоим контурам L_1 и L_2 , причем каждый элемент длины $d\mathbf{s}_1$ контура L_1 должен быть скалярно помножен на каждый элемент $d\mathbf{s}_2$, и полученное произведение разделено на расстояние R элементов $d\mathbf{s}_1$ и $d\mathbf{s}_2$ друг от друга. Совершенно аналогичным путем найдем

$$\Phi_{21} = \frac{J_2}{c} \oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{d\mathbf{s}_2 d\mathbf{s}_1}{R}.$$

2. Двойной интеграл, входящий в выражения для Φ_{12} и Φ_{21} , обозначается обыкновенно через L_{12} и L_{21} :

$$L_{12} = L_{21} = \oint\limits_{L_1} \oint\limits_{L_2} \frac{ds_1 ds_2}{R}, \quad (51.3)$$

и носит название *коэффициента взаимной индукции* контуров L_1 и L_2 (смысл этого названия выяснится в гл. V, когда будет установлена связь между коэффициентом L_{12} и индукционным взаимодействием токов). Внося это обозначение в выражения для Φ_{12} и Φ_{21} , получим

$$\Phi_{12} = \frac{1}{c} J_1 L_{12}, \quad \Phi_{21} = \frac{1}{c} J_2 L_{21}. \quad (51.4)$$

Коэффициент взаимной индукции есть, конечно, *чисто геометрическая величина*, зависящая лишь от конфигурации и взаимного расположения контуров L_1 и L_2 и от выбора направления положительного обхода каждого из этих контуров¹⁾.

Однако на основании равенства (51.4) можно сказать, что коэффициент взаимной индукции контуров L_1 и L_2 численно равен магнитному потоку, посыпаемому через один из этих контуров (например L_2) током силы c , циркулирующим по другому контуру L_1 :

$$\Phi_{12} = L_{12} \quad (\text{при } J_1 = c). \quad (51.5)$$

3. Согласно уравнениям (50.4) и (51.4) потенциальная функция U_{12} тока J_2 в поле тока J_1 равна

$$U_{12} = -\frac{J_2}{c} \Phi_{12} = -\frac{1}{c^2} L_{12} J_1 J_2. \quad (51.6)$$

Точно таким же образом выразится и потенциальная функция U_{21} тока J_1 в поле тока J_2 :

$$U_{21} = -\frac{J_1}{c} \Phi_{21} = -\frac{1}{c^2} L_{21} J_2 J_1. \quad (51.7)$$

Величина U_{12} (или равная ей величина U_{21}) играет роль *взаимной потенциальной энергии* токов J_1 и J_2 в том смысле, что работа *пондеромоторных* сил взаимодействия этих токов при перемещении любого из них или обоих одновременно равна убыли функции U_{12} . В частности, обобщенные пондеромоторные силы взаимодействия этих токов θ_i , согласно уравнению (50.6), равны взятым с обратным знаком производным от U_{12} по соответствующим обобщенным координатам q_i . Так как, согласно (50.5), при определении работы этих сил по изменению величины U_{12} , силу

¹⁾ При перемене направления одного из токов (например J_1) и при сохранении неизменным направления другого тока знак коэффициента L_{12} изменяется на обратный, ибо изменяется направление вектора ds_1 .

токов J_1 и J_2 нужно считать постоянной, то [ср. уравнения (50.5) и (50.4)]

$$\delta A = -(\delta U_{12})_J = \frac{1}{c^2} J_1 J_2 \delta L_{12} \quad (51.8)$$

и

$$\theta = -\frac{(\partial U_{12})_J}{\partial q_i} = \frac{1}{c^2} J_1 J_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial q_i}. \quad (51.9)$$

4. Из приведенных формул яствует, между прочим, что механическое взаимодействие *замкнутых токов* (в отличие от взаимодействия элементов тока, — см. § 43) удовлетворяет принципу *равенства действия и противодействия*, ибо силы, испытываемые каждым из взаимодействующих токов, определяются производными от *одной и той же* функции $U_{12} = U_{21}$, зависящей лишь от *относительного* расположения обоих контуров.

Поясним это утверждение на простейшем примере. Пусть $q = l$ — расстояние между центрами двух параллельных круговых токов L_1 и L_2 . Силы F_1 и F_2 , действующие соответственно на контуры L_1 и L_2 по направлению возрастания расстояния l , равны

$$F_1 = -\frac{\partial U_{21}}{\partial l},$$

$$F_2 = -\frac{\partial U_{12}}{\partial l} = F_1.$$

Если $-\frac{\partial U_{21}}{\partial l} > 0$, то силы F_1 и F_2 стремятся увеличить расстояние l , т. е. сводятся к взаимному отталкиванию контуров L_1 и L_2 ; в противном же случае они сводятся к притяжению этих контуров. Существенно, однако, что в обоих случаях силы F_1 и F_2 численно равны и противоположны по направлению, т. е. удовлетворяют третьему закону Ньютона.

Подобно этому если $q = \alpha$ равно углу между плоскостями двух контуров L_1 и L_2 , то обобщенная сила $N = -\partial U/\partial \alpha$ представляет собой момент пары сил, стремящейся увеличить угол α . Как и в предшествующем случае, легко убедиться, что моменты пар N_1 и N_2 , приложенных к L_1 и L_2 , численно равны и противоположны по направлению.

5. Если токи J_1 и J_2 нельзя считать линейными, т. е. если поле одного из этих токов заметно изменяется на протяжении сечения другого тока, то взаимную потенциальную «энергию» токов U можно определить, исходя из уравнения (50.8). Если j_1 есть плотность тока в первом токе объема V_1 , а j_2 — плотность тока во втором токе объема V_2 , то, согласно (50.8), потенциальная функция U_{12} тока J_2 в поле тока J_1 будет равна

$$U_{12} = -\frac{1}{c} \int_{V_2} \mathbf{A}_1 \mathbf{j}_2 dV, \quad (51.10)$$

а потенциальная функция U_{21} тока J_1 в поле тока J_2 будет равна

$$U_{21} = -\frac{1}{c} \int_{V_1} \mathbf{A}_2 \mathbf{j}_1 dV. \quad (51.11)$$

Внося в эти уравнения выражения (46.1) вектор-потенциалов \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 токов \mathbf{j}_1 и \mathbf{j}_2 :

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{c} \int_{V_1} \frac{\mathbf{j}_1 dV}{R} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}_2 = \frac{1}{c} \int_{V_2} \frac{\mathbf{j}_2 dV}{R},$$

получаем

$$U_{12} = -\frac{1}{c^2} \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\mathbf{j}_1 \mathbf{j}_2 dV_1 dV_2}{R} = U_{21}, \quad (51.12)$$

где R есть расстояние между элементом dV_1 объема V_1 , плотность тока в котором равна \mathbf{j}_1 , и элементом dV_2 объема V_2 , плотность тока в котором равна \mathbf{j}_2 .

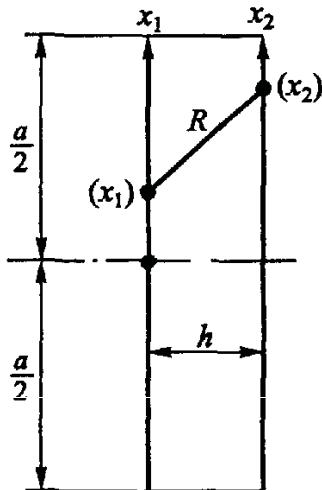


Рис. 52

При мер. Два одинаковых контура L_1 и L_2 имеют форму квадратов со стороной a . Стороны обоих квадратов параллельны друг другу, а центры квадратов лежат на расстоянии d друг от друга на прямой, перпендикулярной их плоскостям. Определить коэффициент взаимной индукции L_{12} этих квадратов и силу \mathbf{F} , с которой притягиваются контуры, если по ним текут одинаково направленные токи J_1 и J_2 .

В двойном интеграле формулы (51.3)

$$L_{12} = \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{ds_1 ds_2}{R},$$

все члены, относящиеся к взаимно перпендикулярным парам элементов ds_1 и ds_2 , равны нулю. Поэтому в рассматриваемом случае выражение для L_{12} сводится к сумме интегралов, относящихся к парам параллельных сторон квадратов L_1 и L_2 .

Для двух параллельных прямых длиной a , находящихся на расстоянии h друг от друга (рис. 52), имеем

$$\begin{aligned} L(a, h) &= \iint \frac{ds_1 ds_2}{R} = \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + h^2}} = \\ &= \int_{-a/2}^{+a/2} \left[\lg \left\{ x_1 - x_2 + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + h^2} \right\} \right]_{x_1=-a/2}^{x_1=a/2} dx_2, \end{aligned}$$

где x_1 и x_2 суть текущие координаты точек обоих отрезков, отсчитываемые от их центров. Интегрирование по частям каждого из членов разности,

получаемой после подстановки вместо x_1 его значений $\pm a/2$, дает

$$\begin{aligned} \int_{-a/2}^{+a/2} \lg \left\{ \pm \frac{a}{2} - x_2 + \sqrt{\left(\pm \frac{a}{2} - x_2 \right)^2 + h^2} \right\} dx_2 = \\ = \left[x_2 \lg \left\{ \pm \frac{a}{2} - x_2 + \sqrt{\left(\pm \frac{a}{2} - x_2 \right)^2 + h^2} \right\} \right]_{x_2=-a/2}^{x_2=a/2} + \\ + \left[\sqrt{\left(\pm \frac{a}{2} - x_2 \right)^2 + h^2} \right]_{x_1=-a/2}^{x_1=a/2} \pm \\ \pm \frac{a}{2} \left[\lg \left\{ x_2 \pm \frac{a}{2} + \sqrt{\left(x_2 \mp \frac{a}{2} \right)^2 + h^2} \right\} \right]_{x_2=-a/2}^{x_2=a/2} \end{aligned}$$

Подставляя для x_2 значения $\pm a/2$, получим для $L(a, h)$ всего $3 \cdot 4 = 12$ членов, которые после сокращения и приведения сведутся к трем:

$$\begin{aligned} L(a, h) = 2h - 2\sqrt{a^2 + h^2} + a \lg \frac{\sqrt{a^2 + h^2} + a}{\sqrt{a^2 + h^2} - a} = \\ = 2h - 2\sqrt{a^2 + h^2} + 2a \lg \frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h}. \end{aligned}$$

Комбинируя попарно параллельные стороны квадратов L_1 и L_2 , получим четыре пары отрезков, расстояние h между которыми равно d , и другие четыре пары, для которых $h = \sqrt{a^2 + d^2}$; первые четыре пары обтекаются параллельными, а вторые четыре противоположно направленными токами. Таким образом, коэффициент взаимной индукции этих квадратов равен

$$L_{12} = 4L(a, d) - 4l(a, \sqrt{a^2 + d^2})$$

или

$$\begin{aligned} L_{12} = 8 \left(d - 2\sqrt{a^2 + d^2} + \sqrt{2a^2 + d^2} + \right. \\ \left. + a \lg \frac{a + \sqrt{a^2 + d^2}}{d} - a \lg \frac{a + \sqrt{2a^2 + d^2}}{\sqrt{a^2 + d^2}} \right) \end{aligned}$$

Чтобы определить силу F притяжения между квадратами, достаточно воспользоваться формулой (51.9), положив в ней обобщенную координату q , равной $-d$, ибо сила F действует в направлении, обратном координате d , т. е. стремится уменьшить расстояние между квадратами d . Стало быть,

$$F = -\frac{\partial U}{\partial q} = \frac{\partial U}{\partial d} = -\frac{1}{c^2} J_1 J_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial d}.$$

Выполнив дифференцирование, мы после некоторых алгебраических преобразований получим

$$F = \frac{8}{c^2} J_1 J_2 \left(\frac{a^2 + 2d^2}{d\sqrt{a^2 + d^2}} - \frac{d\sqrt{2a^2 + d^2}}{a^2 + d^2} - 1 \right). \quad (51.13)$$

Дальнейшие примеры на вычисление взаимной индукции, а также коэффициента самоиндукции будут приведены в § 81.

§ 52. Коэффициент самоиндукции. Полная потенциальная функция системы токов

1. Перейдем теперь к рассмотрению пондеромоторных сил взаимодействия элементов одного и того же тока (например тока J_1) и постараемся определить потенциальную функцию U_{11} этих сил, которую с соответствующими оговорками можно назвать собственной потенциальной «энергией» J_1 .

Конечно, рассматривая взаимодействие смежных элементов тока, мы уже не можем считать этот ток линейным и должны исходить не из формулы (50.7), а из формулы (50.8). Снабдив для определенности в этой формуле \mathbf{A} и \mathbf{j} индексом 1, получим

$$U_{11} = -\frac{1}{2c} \int_{V_1} \mathbf{A}_1 \mathbf{j}_1 dV, \quad (52.1)$$

где перед интегралом, в отличие как от (50.8), так и от формул § 51, стоит фактор $c/2$, а не $1/c$. Появление фактора $1/2$ объясняется тем, что взаимодействие каждой пары элементов тока $\mathbf{j}_1 dV$ и $\mathbf{j}'_1 dV'$ дважды учитывается в интеграле (52.1): оно входит составной частью как в $\mathbf{A}_1 \mathbf{j}_1 dV$, так и в $\mathbf{A}'_1 \mathbf{j}'_1 dV'$, ибо значение \mathbf{A}_1 в элементе объема dV включает в себя поле элемента $\mathbf{j}'_1 dV'$. Это обстоятельство непосредственно выявляется, если внести в (52.1) выражение (46.1) вектор-потенциала \mathbf{A}_1 :

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{c} \int_{V_1} \frac{\mathbf{j}'_1 dV'}{R};$$

тогда уравнение (52.1) принимает вид

$$U_{11} = -\frac{1}{2c^2} \int_{V_1} \int_{V_1} \frac{\mathbf{j}_1 \mathbf{j}'_1 dV dV'}{R}, \quad (52.2)$$

где интегрирование как по dV , так и по dV' должно быть распространено на весь объем V_1 тока J_1 , т. е., другими словами, должна быть взята сумма подынтегральных выражений для всех возможных попарных комбинаций элементов объема V_1 . При этом, очевидно, две комбинации элементов dV и dV' , отличающиеся только порядком сомножителей, все же должны считаться различными. R есть, конечно, расстояние между элементами dV и dV' .

2. Так как распределение тока по сечению проводника зависит только от геометрических и физических свойств этого проводника, а не от силы тока в нем, то плотность тока в каждом из элементов объема проводника пропорциональна J_1 , т. е.

$$U_{11} = -\frac{1}{2c^2} \int_{V_1} \int_{V_1} \frac{\mathbf{j}_1 \mathbf{j}'_1 dV dV'}{R} = -\frac{1}{2c^2} L_{11} J_1^2, \quad (52.3)$$

где L_{11} есть так называемый *коэффициент самоиндукции* проводника, зависящий только от геометрической *конфигурации* проводника (если он однороден, в противном случае L_{11} зависит также от соотношения электропроводностей отдельных элементов объема проводника), но не от силы тока в нем.

Из этого уравнения вытекает следующее выражение для коэффициента самоиндукции проводника¹⁾:

$$L_{11} = \frac{1}{J_1^2} \int \int \frac{\mathbf{j}_1 \mathbf{j}'_1 dV dV'}{R}. \quad (52.4)$$

Заметим, что совершенно аналогичным образом из (51.6) и (51.12) вытекает следующее выражение для коэффициента взаимной индукции двух объемных токов L_1 и J_2 :

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1}{J_1 J_2} \int \int \frac{\mathbf{j}_1 \mathbf{j}_2 dV_1 dV_2}{R}, \quad (52.5)$$

которое переходит в (51.3), если эти токи можно считать линейными.

3. Собственную потенциальную «энергию» тока U_{11} можно было бы также определить, разбивая ток J_1 на совокупность бесконечно тонких нитей тока dJ_1 , выражая потенциальную функцию каждой нити с помощью уравнения (50.4):

$$dU = -\frac{dJ_1}{c} \Phi,$$

где Φ означает магнитный поток, посыпаемый всем током J_1 через контур данной нити, и, наконец, суммируя dU по всем нитям:

$$U_{11} = -\frac{1}{2c} \sum dJ_1 \Phi.$$

Перед знаком суммы нужно ввести множитель $1/2$ потому, что взаимодействие каждой пары нитей тока учитывается в сумме дважды.

Если через Φ_{11} обозначить *среднее* значение магнитного потока через отдельные нити тока, то последнее уравнение можно записать в форме, аналогичной уравнению (51.6):

$$U_{11} = -\frac{1}{2c} \Phi_{11} \sum dJ_1 = -\frac{J_1}{2c} \Phi_{11}. \quad (52.6)$$

¹⁾ Совершенно неправильно указание, встречающееся в некоторых курсах физики, что для определения коэффициента самоиндукции L_{11} контура L_1 достаточно в формуле (51.3) отождествить контур L_2 с контуром L_1 , т. е что

$$L_{11} = \oint_{L_1} \oint_{L_1} \frac{ds_1 ds_2}{R}$$

Легко убедиться, что это выражение обращается в бесконечность, т. е не имеет смысла.

Величину Φ_{11} можно назвать (средним) магнитным потоком, посылаемым током J_1 через свой собственный контур; в сущности, правильнее сказать, что величина Φ_{11} по определению должна удовлетворять уравнению (52.6) и может быть определена из сравнения этого уравнения с (52.3):

$$\Phi_{11} = \frac{1}{c} J_1 L_{11}. \quad (52.7)$$

Это последнее соотношение вполне соответствует уравнению (51.4). Стало быть, можно сказать, что коэффициент L_{11} самоиндукции произвольного замкнутого проводника L_1 численно равен магнитному потоку Φ_{11} , посыпаемому через контур этого проводника циркулирующим по нему током силы c :

$$\Phi_{11} = L_{11} \quad \text{при} \quad J_1 = c. \quad (52.8)$$

Однако при этом нужно помнить, что Φ_{11} есть *среднее* значение магнитного потока через контуры отдельных нитей, на которые может быть разложен ток J_1 , и что как Φ_{11} , так и L_{11} существенно зависят от формы и *размеров сечения* проводника L_1 . Для бесконечно же тонкого линейного контура величины Φ_{11} и L_{11} обращаются в бесконечность, т. е. теряют смысл.

4. Возвращаясь к случаю системы двух токов, заметим, что общая потенциальная «энергия» U этой системы равна, очевидно, сумме их взаимной «энергии» U_{12} ($= U_{21}$) и собственных потенциальных «энергий» U_{11} и U_{22} каждого из них:

$$U = U_{11} + U_{12} + U_{22} = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + \frac{1}{2} L_{22} J_2^2 \right). \quad (52.9)$$

Ввиду того, что $L_{12} = L_{21}$, можно также написать

$$U = -\frac{1}{2c^2} (L_{11} J_1^2 + L_{12} J_1 J_2 + L_{21} J_2 J_1 + L_{22} J_2^2) = -\frac{1}{2c^2} \sum_{i,k} L_{ik} J_i J_k. \quad (52.10)$$

Последнее выражение останется применимым и к системе произвольного числа (например n) токов, если только распространить в нем суммирование на все возможные пары индексов i и k ($i, k = 1, 2, \dots, n$).

5. Полную потенциальную функцию системы токов можно непосредственно выразить через плотность токов и вектор-потенциал поля токов. С этой целью предварительно представим выражения (51.10) и (51.11) в симметричной форме: ввиду равенства U_{12} и U_{21} [см. уравнение (51.12)] можно написать

$$U_{12} = \frac{1}{2} (U_{12} + U_{21}) = -\frac{1}{2c} \int_{V_2} \mathbf{A}_1 \mathbf{j}_2 \, dV - \frac{1}{2c} \int_{V_1} \mathbf{A}_2 \mathbf{j}_1 \, dV.$$

Приняв, далее, во внимание (52.1), получим

$$U = U_{11} + U_{12} + U_{22} = -\frac{1}{2c} \int_{V_1} \mathbf{A}_1 \mathbf{j}_1 dV - \frac{1}{2c} \int_{V_1} \mathbf{A}_2 \mathbf{j}_1 dV - \\ - \frac{1}{2c} \int_{V_2} \mathbf{A}_1 \mathbf{j}_2 dV - \frac{1}{2c} \int_{V_2} \mathbf{A}_2 \mathbf{j}_2 dV,$$

или, так как $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}$, где \mathbf{A} есть вектор-потенциал результирующего поля обоих токов,

$$U = -\frac{1}{2c} \int_{V_1} \mathbf{A} \mathbf{j}_1 dV - \frac{1}{2c} \int_{V_2} \mathbf{A} \mathbf{j}_2 dV = -\frac{1}{2c} \int \mathbf{A} \mathbf{j} dV. \quad (52.11)$$

Последний интеграл должен быть, очевидно, распространен по объему обоих токов J_1 и J_2 . Если других токов в поле нет, то мы можем распространить интегрирование на объем всего поля, ибо вне токов $j = 0$ и соответствующие члены интеграла обращаются в нуль.

Как уже указывалось в связи с формулой (50.8), выражение потенциальной функции U можно при желании истолковать в том смысле, что каждый элемент объема тока обладает в магнитном поле потенциальной «энергией» $-\frac{1}{c} \mathbf{A} \mathbf{j} dV$.

§ 53. Магнитные силовые линии

1. Описание свойств магнитного поля, как и поля электрического, часто весьма облегчается введением в рассмотрение так называемых *силовых линий* этого поля. По определению, магнитными силовыми линиями называются линии, направление касательных к которым в каждой точке поля совпадает с направлением напряженности поля \mathbf{H} в той же точке¹⁾. Дифференциальное уравнение этих линий, очевидно, будет иметь вид [ср. уравнение (10.3)]

$$\frac{dx}{H_x} = \frac{dy}{H_y} = \frac{dz}{H_z}. \quad (53.1)$$

Магнитные силовые линии, как и линии электрические, проводятся обычно с таким расчетом, чтобы в любом участке поля число линий, пересекающих перпендикулярную к ним площадку единичной поверхности, было по возможности пропорционально напряженности поля на этой площадке; однако, как увидим ниже, требование это далеко не всегда выполнимо.

¹⁾ Так как магнитное поле не обладает потенциалом, то магнитные силовые линии в отличие от линий электростатического поля не могут быть определены как ортогональные траектории поверхностей уровня.

2 Основываясь на уравнении (3.6)

$$\oint_S E_n dS = 4\pi \sum_i e_i,$$

мы пришли в § 10 к следующему выводу: электрические силовые линии могут начинаться или кончаться только в тех точках поля, в которых расположены электрические заряды¹⁾. Применив же теорему Гаусса (17*) к потоку магнитного вектора, мы на основании уравнения (47.1) получим

$$\oint_S H_n dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{H} dV = 0. \quad (53.2)$$

Таким образом, в отличие от потока электрического вектора \mathbf{E} поток магнитного вектора \mathbf{H} через произвольную замкнутую поверхность всегда равен нулю. Это положение является математическим выражением того факта, что *магнитных зарядов*, подобных зарядам электрическим, *не существует*: *магнитное поле возбуждается не магнитными зарядами, а движением зарядов электрических* (т. е. токами). Основываясь на этом положении и на сравнении уравнения (53.2) с уравнением (3.6), нетрудно убедиться путем приведенных в § 10 рассуждений, что *магнитные силовые линии ни в каких точках поля не могут ни начинаться, ни кончаться*.

3. Из этого обстоятельства обычно делается вывод, что магнитные силовые линии в отличие от линий электрических должны быть линиями замкнутыми либо идти из бесконечности в бесконечность.

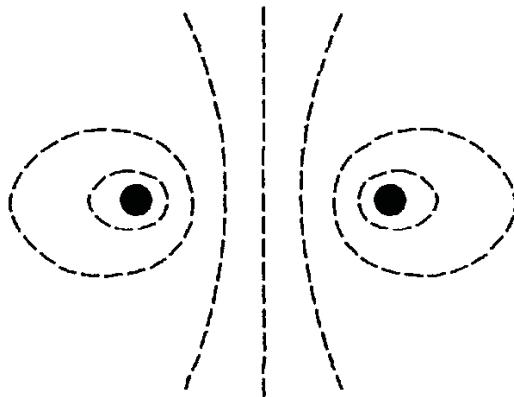


Рис. 53

Действительно, оба эти случая возможны. Согласно результатам решения задачи 25 в § 42 силовые линии в поле бесконечного прямолинейного тока представляют собой перпендикулярные току окружности с центром на оси тока. С другой стороны (см. задачу 26), направление магнитного вектора \mathbf{H} в поле кругового тока во всех точках, лежащих на оси тока, совпадает с направлением

этой оси. Таким образом, ось кругового тока совпадает с силовой линией, идущей из бесконечности в бесконечность; чертеж, приведенный на рис. 53, представляет собой разрез кругового тока меридиональной плоскостью (т. е. плоскостью, перпендикуляр-

¹⁾ См., впрочем, оговорку о точках неопределенности в примечании к с. 55

ной плоскости тока и проходящей через его центр), на котором штриховыми линиями изображены силовые линии этого тока

Возможен, однако, и третий случай, на который не всегда обращается внимание, а именно: силовая линия может не иметь ни начала, ни конца и вместе с тем не быть замкнутой и не идти из бесконечности в бесконечность. Этот случай имеет место, если силовая линия заполняет собой некоторую поверхность и при этом, пользуясь математическим термином, заполняет ее всюду плотно. Проще всего пояснить это на конкретном примере.

4. Рассмотрим поле двух токов — кругового плоского тока J_1 и бесконечного прямолинейного тока J_2 , идущего по оси тока J_1 (рис. 54). Если бы существовал один лишь ток J_1 , то силовые линии поля \mathbf{H}_1 этого тока лежали бы в меридиональных плоскостях и имели бы вид, изображенный на предыдущем рисунке. Рассмотрим одну из этих линий, изображенную на рис. 54 штриховой линией. Совокупность всех подобных ей линий, которые могут быть получены вращением меридиональной плоскости вокруг оси J_2 , образует собой поверхность S некоторого кольца

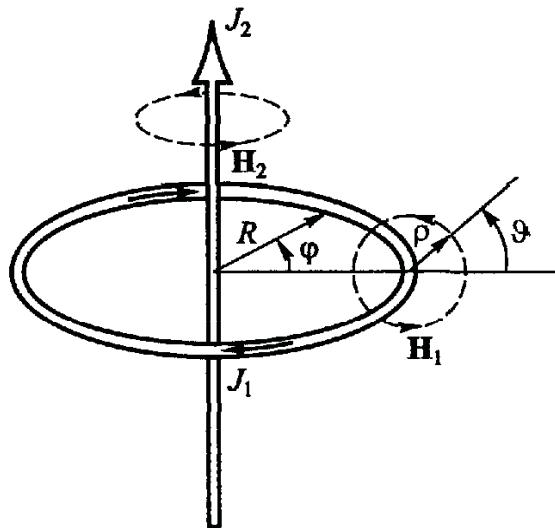


Рис 54

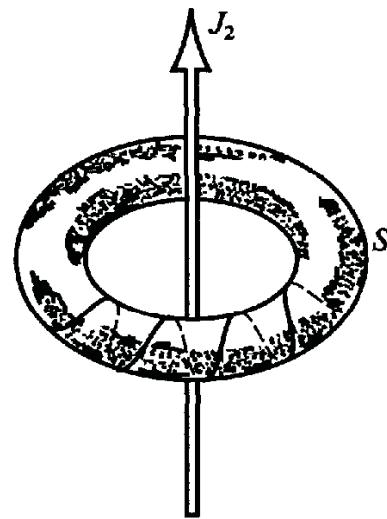


Рис 55

или тора (рис. 55)¹⁾. Силовые же линии поля \mathbf{H}_2 прямолинейного тока J_2 представляют собой концентрические окружности. Стало быть, в каждой точке поверхности S как \mathbf{H}_1 , так и \mathbf{H}_2 касательны к этой поверхности; следовательно, и вектор напряженности результирующего поля $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ тоже касателен к ней. Это значит, что каждая силовая линия поля \mathbf{H} , проходящая через одну какую-нибудь точку поверхности S , должна лежать на этой поверхности *всеми* своими точками. Линия эта, очевидно, будет представлять собой *винтовую* линию на поверх-

¹⁾ Сечение этого тора плоскостью, проходящей через ток J_2 , не является круговым

ности тора S (рис. 55). Ход этой винтовой линии будет зависеть от соотношения сил токов J_1 и J_2 и от положения и формы поверхности S . Очевидно, что лишь при некотором определенном подборе этих условий винтовая линия эта будет замыкаться; вообще же говоря, при продолжении линии новые витки ее будут ложиться между прежними витками. При неограниченном продолжении линии она подойдет как угодно близко к любой раз пройденной точке, но никогда вторично в нее не вернется. А это и значит, что, оставаясь незамкнутой, линия эта всюду плотно заполнит поверхность тора S ¹⁾.

5. Чтобы строго доказать возможность существования незамкнутых силовых линий, введем на поверхности тора S ортогональные криволинейные координаты φ (азимут меридиональной плоскости) и ϑ (полярный угол в меридиональной плоскости с вершиной, расположенной на пересечении этой плоскости с осью кольца, — рис. 54).

Напряженность полей H_1 и H_2 на поверхности тора является функцией одного лишь угла ϑ , причем вектор H_1 направлен по направлению возрастания (или убывания) этого угла, а вектор H_2 — по направлению возрастания (или убывания) угла φ . Пусть $\rho(\vartheta)$ есть расстояние данной точки поверхности S от центральной линии тора, а $R(\vartheta)$ — расстояние ее от вертикальной оси тока J_2 . Как нетрудно убедиться, элемент длины линии, лежащей на S , выразится формулой

$$ds^2 = r^2(\vartheta) d\vartheta^2 + R^2(\vartheta) d\varphi^2, \quad \text{где} \quad r^2(\vartheta) = \rho^2(\vartheta) + \left(\frac{d\rho}{d\vartheta} \right)^2.$$

Соответственно этому дифференциальное уравнение линий сил [ср. уравнение (53.1)] на поверхности S примет вид

$$\frac{r(\vartheta) d\vartheta}{H_1(\vartheta)} = \frac{R(\vartheta) d\varphi}{H_2(\vartheta)}.$$

Приняв во внимание, что H_1 и H_2 пропорциональны силам токов J_1 и J_2 , и интегрируя, получим

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{H_2(\vartheta)}{H_1(\vartheta)} \frac{r(\vartheta)}{R(\vartheta)} d\vartheta = \frac{J_2}{J_1} \{F(\vartheta) - F(\vartheta_0)\},$$

где $F(\vartheta)$ есть некоторая функция угла ϑ , не зависящая от J_1 и J_2 .

Чтобы линия была замкнутой, т. е. чтобы она возвращалась в начальную точку, необходимо, чтобы некоторому целому числу n оборотов линии вокруг тора соответствовало целое же число m оборотов ее вокруг вертикальной оси. Иными словами, необходимо, чтобы можно было найти два таких целых числа n и m , чтобы возрастанию угла ϑ на $2\pi n$ соответствовало возрастание угла φ на $2\pi m$:

$$\varphi - \varphi_0 = 2\pi m = \frac{J_2}{J_1} \{F(2\pi n + \vartheta_0) - F(\vartheta_0)\}.$$

Примем теперь во внимание, что $F(\vartheta)$ представляет собой интеграл периодической функции угла ϑ с периодом 2π . Как известно, интеграл перио-

¹⁾ Указанное свойство поверхностей магнитных линий положено в основу системы удержания и нагрева термоядерной плазмы ТОКАМАК (ТОрoidalная КАмера с МАгнитными Катушками). См. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. — М. Наука, 1976.

дической функции в общем случае является суммой функции периодической и функции линейной¹⁾. Значит,

$$F(\vartheta) = K\vartheta + \Phi(\vartheta),$$

где K есть некоторая постоянная, $\Phi(\vartheta)$ есть функция с периодом 2π . Стало быть,

$$F(2\pi n + \vartheta) = K \cdot 2\pi n + K\vartheta + \Phi(\vartheta).$$

Внося это в предыдущее уравнение, получим условие замкнутости силовых линий на поверхности тора S :

$$m = \frac{J_2}{J_1} Kn.$$

Здесь K есть величина, от J_1 и J_2 не зависящая. Очевидно, что два целых числа n и m , удовлетворяющих этому условию, могут быть найдены лишь в том случае, если величина $\frac{J_2}{J_1} K$ является числом *рациональным* (целым или дробным); это будет иметь место лишь при определенном соотношении между силами токов J_1 и J_2 . Вообще говоря, $\frac{J_2}{J_1} K$ будет величиной иррациональной и, стало быть, силовые линии на рассматриваемой поверхности тора S будут незамкнутыми. Однако и в этом случае всегда можно подобрать целое число n так, чтобы $\frac{J_2}{J_1} Kn$ как угодно мало отличалось от некоторого целого числа m . Это значит, что незамкнутая силовая линия после достаточного числа оборотов как угодно близко подойдет к любой, раз пройденной точке поля. Аналогичным путем можно показать, что линия эта после достаточного числа оборотов как угодно близко подойдет к любой на перед заданной точке поверхности S , а это значит по определению, что она всюду плотно заполняет эту поверхность.

6. Существование незамкнутых магнитных силовых линий, всюду плотно заполняющих некоторую поверхность S , делает, очевидно, не возможным точное графическое изображение поля с помощью этих линий. В частности, далеко не всегда можно удовлетворить требованию, чтобы число линий, пересекающих перпендикулярную им единичную площадку, было пропорционально напряженности поля на этой площадке. Так, например, в только что рассмотренном случае одна и та же незамкнутая линия бесконечное число раз пересечет любую конечную площадку, пересекающую поверхность кольца S ²⁾.

¹⁾ Ибо в периодическую функцию может входить постоянный член, интеграл которого представляет собой линейную функцию независимого переменного.

²⁾ Из этого явствует также условность понятия силовых *трубок*, т. е. нитей малого, но все же *конечного* сечения, поверхность которых образована силовыми линиями. В случае незамкнутости этих линий силовая трубка при продолжении должна бесконечное число раз *пересечь самое себя* (ибо сечение ее конечно, а силовые линии, образующие поверхность трубы, при продолжении сколько угодно раз как угодно близко подойдут к раз пройденным ими точкам).

Впрочем, при надлежащей осмотрительности пользование понятием силовых линий является хотя и приближенным, но все же удобным и наглядным способом описания магнитного поля.

7. Согласно уравнению (47.5), циркуляция вектора напряженности магнитного поля по кривой, не охватывающей токов, равна нулю, циркуляция же по кривой, охватывающей токи, равна умноженной на $4\pi/c$ сумме сил охватываемых токов (взятых с надлежащими знаками). Циркуляция вектора \mathbf{H} по силовой линии не может равняться нулю (ввиду параллельности элемента длины силовой линии ds и вектора \mathbf{H} величина $H_s ds$ существенно положительна). Следовательно, каждая *замкнутая магнитная силовая линия должна охватывать* хотя бы один из несущих ток проводников. Больше того, незамкнутые силовые линии, плотно заполняющие некоторую поверхность S (если только они не идут из бесконечности в бесконечность), также должны *обиваться вокруг токов*. Действительно, интеграл вектора \mathbf{H} по почти замкнутому витку такой линии существенно положителен. Стало быть, циркуляция \mathbf{H} по замкнутому контуру, получаемому из этого витка добавлением замыкающего его произвольно малого отрезка, отлична от нуля. Следовательно, контур этот должен пронизываться током.

§ 54. Топология¹⁾ вихревого (магнитного) поля. Условные перегородки

1. Чтобы разобраться в геометрических, или, вернее, топологических, свойствах магнитного поля, рассмотрим сначала тот случай, когда в поле имеется лишь один замкнутый проводник, обтекаемый током J . Вихрь магнитного поля $\text{rot } \mathbf{H}$ отличен от нуля лишь внутри обтекаемого током проводника. Поэтому пространство, занятное током, можно назвать *вихревым пространством* или ввиду замкнутости тока *вихревым кольцом*.

С чисто топологической точки зрения, все замкнутые линии или контуры (как совпадающие с магнитными силовыми линиями, так и не совпадающие с ними), если только они расположены *вне* вихревого пространства, делятся на два класса в зависимости от того, не охватывают или охватываются они вихревое кольцо. Если мы мысленно *выделим из поля вихревое пространство* или условимся считать его непроницаемым, то контуры разных классов не могут быть приведены в совпадение друг с другом путем непрерывной деформации без нарушения их целостности. Любые же

¹⁾ Топология (*analysis situs*) — отрасль математики, изучающая свойства фигур и геометрических образов, остающиеся неизменными при непрерывной деформации этих фигур.