

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ДИСПЕРСИЯ

§ 103. Пространственная дисперсия

До сих пор при обсуждении диэлектрических свойств вещества мы предполагали, что значение индукции $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ определяется значениями напряженности электрического поля $\mathbf{E}(t', \mathbf{r})$ в той же точке пространства \mathbf{r} , хотя (при наличии дисперсии) и не только в тот же, но и во все предшествующие моменты времени $t' \leq t$. Такое предположение справедливо не всегда. В общем случае значение $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ зависит от значений $\mathbf{E}(t', \mathbf{r}')$ в некоторой области пространства вокруг точки \mathbf{r} . Линейная связь \mathbf{D} с \mathbf{E} записывается тогда в виде, обобщающем выражение (77,3):

$$D_i(t, \mathbf{r}) = E_i(t, \mathbf{r}) + \int_0^{\infty} \int f_{ik}(\tau; \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_k(t - \tau, \mathbf{r}') dV' d\tau; \quad (103,1)$$

она представлена здесь сразу в форме, относящейся и к анизотропной среде. Такая *нелокальная* связь является проявлением, как говорят, *пространственной дисперсии* (в этой связи обычную — рассмотренную в § 77 — дисперсию называют *временной* или *частотной*). Для монохроматических компонент поля, зависимость которых от t дается множителями $e^{-i\omega t}$, эта связь принимает вид

$$D_i(\mathbf{r}) = E_i(\mathbf{r}) + \int f_{ik}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_k(\mathbf{r}') dV'. \quad (103,2)$$

Отметим сразу, что в большинстве случаев пространственная дисперсия играет гораздо меньшую роль, чем временная. Дело в том, что для обычных диэлектриков ядро f_{ik} интегрального оператора существенно убывает уже на расстояниях $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, больших только по сравнению с атомными размерами a . Между тем макроскопические поля, усредненные по физически бесконечно малым элементам объема, по определению должны мало меняться на расстояниях $\sim a$. В первом приближении можно тогда вынести $\mathbf{E}(\mathbf{r}') \approx \mathbf{E}(\mathbf{r})$ из-под знака интеграла по dV' в (103,1), в результате чего мы вернемся к (77,3). В таких случаях пространственная дисперсия может проявиться только в качестве малых поправок. Но эти поправки, как мы увидим, могут приводить к качественно новым физическим явлениям и потому быть существенными.

Другая ситуация может иметь место в проводящих средах (металлы, растворы электролитов, плазма): движение свободных

носителей тока приводит к нелокальности, простирающейся на расстояния, которые могут быть велики по сравнению с атомными размерами. В таких случаях существенная пространственная дисперсия может иметь место уже в рамках макроскопической теории¹⁾.

Проявлением пространственной дисперсии является и *доплеровское* уширение линии поглощения в газе. Если неподвижный атом имеет на частоте ω_0 линию поглощения с пренебрежимо малой шириной, то для движущегося атома эта частота сдвигается, в силу эффекта Доплера, на величину $k\mathbf{v}$, где \mathbf{v} — скорость атома ($v \ll c$). Это приводит в спектре поглощения газа как целого к появлению линии ширины $\Delta\omega \sim kv_T$, где v_T — средняя тепловая скорость атомов. В свою очередь, такое уширение означает, что диэлектрическая проницаемость газа имеет существенную пространственную дисперсию при $k \gtrsim |\omega - \omega_0|/v_T$.

В связи с формой записи (103,1) необходимо сделать следующее замечание. Никакие соображения симметрии (пространственной или временной) не могут исключить возможности электрической поляризации диэлектрика в переменном неоднородном магнитном поле. В связи с этим может возникнуть вопрос о том, не следует ли дополнить правую сторону равенства (103,1) или (103,2) членом с магнитным полем. В действительности, однако, в этом нет необходимости. Дело в том, что поля \mathbf{E} и \mathbf{B} нельзя считать полностью независимыми. Они связаны между собой (в монохроматическом случае) уравнением $\text{rot } \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}$. В силу этого равенства зависимость \mathbf{D} от \mathbf{B} можно рассматривать как зависимость от пространственных производных \mathbf{E} , т. е. как одно из проявлений нелокальности.

При учете пространственной дисперсии представляется целесообразным, не умаляя степени общности теории, писать уравнения Максвелла в виде

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (103,3)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{D} = 0, \quad (103,4)$$

¹⁾ Для изотропной проводящей среды условия пренебрежения пространственной дисперсией могут оказаться различными для поперечной и продольной проницаемостей. В первом случае характерным расстоянием r_0 , на котором ядро интеграла в (103,2) отлично от нуля, является меньшая из величин v/ω или l , где v — средняя скорость носителей тока, l — их длина свободного пробега. Для продольной проницаемости r_0 совпадает с меньшей из величин v/ω или $(lv/\omega)^{1/2}$ (последняя длина есть расстояние, которое носители тока проходят вдоль поля за счет диффузии за время $\sim 1/\omega$; коэффициент диффузии $D \sim lv$). Пространственная дисперсия незначительна, если $kr_0 \ll 1$.

не вводя наряду со средней напряженностью магнитного поля $\bar{\mathbf{h}} = \mathbf{V}$ еще и другую величину \mathbf{H} . Вместо этого все члены, возникающие в результате усреднения микроскопических токов, предполагаются включенными в определение \mathbf{D} . Использувавшееся ранее разделение среднего тока на две части согласно (79,3), вообще говоря, не однозначно. В отсутствие пространственной дисперсии оно фиксируется условием, чтобы \mathbf{P} было электрической поляризацией, локальным образом связанной с \mathbf{E} . В отсутствие такой связи удобнее полагать $\mathbf{M} = 0$, $\mathbf{V} = \mathbf{H}$ и

$$\overline{\rho \mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (103,5)$$

чему и отвечает представление уравнений Максвелла в виде (103,3—4)¹⁾.

Компоненты тензора $f_{ik}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — ядра интегрального оператора в (103,2) — удовлетворяют соотношениям симметрии

$$f_{ik}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = f_{ki}(\omega; \mathbf{r}', \mathbf{r}). \quad (103,6)$$

Это следует из таких же рассуждений, которые были проведены в § 96 для тензора $\varepsilon_{ik}(\omega)$. Разница состоит только в том, что перестановка индексов a, b в обобщенных восприимчивостях α_{ab} , означающая перестановку как тензорных индексов i, k , так и точек \mathbf{r} и \mathbf{r}' , приводит теперь к перестановке соответствующих аргументов в функциях $f_{ik}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ²⁾.

Ниже мы будем рассматривать неограниченную макроскопически однородную среду. В таком случае ядро интегрального оператора в (103,1) или (103,2) зависит только от разности $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Функции \mathbf{D} и \mathbf{E} целесообразно разложить тогда в интеграл Фурье не только по времени, но и по координатам, сведя их к совокупности плоских волн, зависимость которых от \mathbf{r} и t дается множителем $\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$. Для таких волн связь \mathbf{D} и \mathbf{E} принимает вид

$$D_i = \varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}) E_k, \quad (103,7)$$

где

$$\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ik} + \int_0^{\infty} \int f_{ik}(\tau, \boldsymbol{\rho}) e^{i(\omega\tau - \mathbf{k}\boldsymbol{\rho})} d^3\rho d\tau. \quad (103,8)$$

¹⁾ В свете сказанного можно с несколько иной точки зрения взглянуть на сделанное в § 79 утверждение о потере смысла проницаемостью μ в области оптических частот. В этой области эффекты, связанные с отличием магнитной проницаемости от 1, вообще говоря, неотличимы от эффектов пространственной дисперсии диэлектрической проницаемости.

²⁾ Как всегда при применении обобщенного принципа симметрии кинетических коэффициентов, если тело находится во внешнем магнитном поле или обладает магнитной структурой, правая сторона соотношения (103,6) должна быть взята при измененном знаке поля или для обращенной по времени структуры.

В таком описании пространственная дисперсия сводится к появлению зависимости тензора диэлектрической проницаемости от волнового вектора.

«Длина волны» $1/k$ определяет расстояния, на которых поле существенно меняется. Можно сказать поэтому, что пространственная дисперсия является выражением зависимости макроскопических свойств вещества от пространственной неоднородности электромагнитного поля, подобно тому, как частотная дисперсия выражает зависимость от временного изменения поля. При $k \rightarrow 0$ поле стремится к однородному, соответственно чему $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ стремится к обычной проницаемости $\varepsilon_{ik}(\omega)$ ¹⁾.

Из определения (103,8) видно, что

$$\varepsilon_{ik}(-\omega, -\mathbf{k}) = \varepsilon_{ki}^*(\omega, \mathbf{k}) \quad (103,9)$$

— соотношение, обобщающее (77,7). Симметрия же (103,6), выраженная в терминах функций $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$, дает теперь

$$\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}; \mathfrak{H}) = \varepsilon_{ki}(\omega, -\mathbf{k}; -\mathfrak{H}), \quad (103,10)$$

где в явном виде выписан параметр \mathfrak{H} — внешнее магнитное поле, если таковое имеется. Если среда обладает центром инверсии, компоненты ε_{ik} являются четными функциями вектора \mathbf{k} ; аксиальный же вектор при инверсии не меняется и потому равенство (103,10) сводится к

$$\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}; \mathfrak{H}) = \varepsilon_{ki}(\omega, \mathbf{k}; -\mathfrak{H}). \quad (103,11)$$

Пространственная дисперсия не сказывается на выводе формулы (96,5) для диссипации энергии. Поэтому условие отсутствия поглощения по-прежнему выражается эрмитовостью тензора $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$.

При наличии пространственной дисперсии диэлектрическая проницаемость является тензором (а не скаляром) даже в изотропной среде: выделенное направление создается волновым вектором. Если среда не только изотропна, но обладает также и центром инверсии, тензор ε_{ik} может быть составлен только из компонент вектора \mathbf{k} и единичного тензора δ_{ik} (при отсутствии центра симметрии может стать возможным также и член с единичным антисимметричным тензором e_{ikl} ; см. § 104). Общий вид такого тензора можно записать как

$$\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_t(\omega, k) \left(\delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2} \right) + \varepsilon_l(\omega, k) \frac{k_i k_k}{k^2}, \quad (103,12)$$

где ε_t и ε_l зависят только от абсолютной величины волнового вектора (и от ω). Если напряженность \mathbf{E} направлена по волновому вектору, то индукция $\mathbf{D} = \varepsilon_t \mathbf{E}$; если же $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, то $\mathbf{D} = \varepsilon_l \mathbf{E}$. Соот-

¹⁾ Более точно — зависимость от \mathbf{k} исчезает при $kr_0 \ll 1$, где r_0 — размеры области, в которой $f_{ik}(\omega, \rho)$ существенно отлочно от нуля.

ветственно, величины ε_l и ε_t называют *продольной* и *поперечной* *проницаемостями*. При $k \rightarrow 0$ выражение (103,12) должно стремиться к значению $\varepsilon(\omega)\delta_{ik}$, не зависящему от направления k ; ясно поэтому, что

$$\varepsilon_l(\omega, 0) = \varepsilon_t(\omega, 0) = \varepsilon(\omega). \quad (103,13)$$

Описание электромагнитных свойств изотропной среды с помощью проницаемостей ε_l и ε_t отвечает уравнениям Максвелла, представленным в виде (103,3—4). С другой стороны, при $k \rightarrow 0$, когда пространственная дисперсия исчезает, можно вернуться к описанию с помощью проницаемостей ε и μ . Поэтому между теми и другими величинами существует определенная связь (см. задачу 1).

Аналогия между формулами (103,8) и (77,5) позволяет перенести на каждую из компонент $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ как функцию комплексной переменной ω результаты исследования аналитических свойств, произведенного в §§ 77, 82. Они являются аналитическими функциями, не имеющими особенностей в верхней полуплоскости ω , и удовлетворяют (при каждом фиксированном значении \mathbf{k}) дисперсионным соотношениям Крамерса—Кронига. То же самое относится и к функциям $\varepsilon_l(\omega, k)$ и $\varepsilon_t(\omega, k)$ в (103,12). При этом надо иметь в виду, что функция ε_l при $k \neq 0$ не стремится при $\omega \rightarrow 0$ к бесконечности даже в проводящей среде, и потому вычитание (которое было необходимо при выводе (82,9)) здесь не требуется; обращение $\varepsilon(\omega)$ в проводнике в бесконечность при $\omega \rightarrow 0$ связано с однородностью ($k=0$) статического поля.

Средняя по времени (в объясненном в § 80 смысле) плотность энергии электромагнитного поля в прозрачной среде с пространственной дисперсией выражается прежней формулой (96,6); поскольку теперь $\mu \equiv 1$, то

$$\bar{U} = \frac{1}{16\pi} \left[\frac{\partial(\omega\varepsilon_{ik})}{\partial\omega} E_i E_k^* + |\mathbf{B}|^2 \right] \quad (103,14)$$

(\mathbf{E} и \mathbf{B} предполагаются представленными в комплексном виде). В плотности же потока энергии в такой среде появляется дополнительный член:

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}[\mathbf{E}^* \mathbf{B}] - \frac{\omega}{16\pi} \frac{\partial\varepsilon_{ik}}{\partial k} E_i^* E_k. \quad (103,15)$$

Эта формула выводится путем обобщения вывода формулы (80,11): теперь надо рассматривать волну, размытую как по небольшому интервалу частот, так и по направлениям волнового вектора (см. задачу 2).

Задачи

1. Найти связь между функциями $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ и предельными значениями функций $\varepsilon_l(\omega, k)$, $\varepsilon_t(\omega, k)$ при $k \rightarrow 0$.

Решение. Сравним выражения усредненного микроскопического тока $\overline{\rho v}$ в виде (103,5) и (79,3). Для монохроматического поля имеем в первом случае

$$\overline{\rho v}_i = -\frac{i\omega}{4\pi} [\varepsilon_{ik}(\omega, k) - \delta_{ik}] E_k,$$

а во втором:

$$\overline{\rho v} = -\frac{i\omega}{4\pi} [\varepsilon(\omega) - 1] E + \frac{ic}{4\pi} [\mu(\omega) - 1] [kH].$$

Подставив в первое выражение $\varepsilon_{ik}(\omega, k)$ из (103,12), а во второе $H = (c/\omega\mu) [kE]$ согласно уравнению Максвелла и приравняв оба выражения (при $k \rightarrow 0$) друг другу, получим равенство

$$1 - \frac{1}{\mu(\omega)} = \frac{\omega^2}{c^2} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_t(\omega, k) - \varepsilon_l(\omega, k)}{k^2}$$

(оно получается сравнением членов с k (kE)). Вместе с уже известным равенством (103,13) эта формула устанавливает искомое соответствие.

2. Вывести формулу (103,15) для средней (по времени) плотности потока энергии в среде с пространственной дисперсией.

Решение. Исходим, как и в § 80, из равенства (80,2), положив в нем $H = B$ (в соответствии с описанием поля уравнениями (103,3—4)), представив все величины в комплексном виде и усреднив по времени:

$$-\operatorname{div} \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [EH^*] = \frac{1}{8\pi} \operatorname{Re} \left(E^* \frac{\partial D}{\partial t} + B^* \frac{\partial B}{\partial t} \right). \quad (1)$$

Рассматриваем почти монохроматическую плоскую волну, в которой

$$E = E_0(t, r) e^{i(k_0 r - \omega_0 t)},$$

где $E_0(t, r)$ — функция, медленно меняющаяся в пространстве и во времени. Производную $\partial D_i / \partial t$ пишем в виде $\hat{f}_{ik} E_k$, введя оператор

$$\hat{f}_{ik} = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\varepsilon}_{ik}; \quad (2)$$

при воздействии на строго монохроматическую во времени и пространстве волну:

$$\hat{f}_{ik} E_k = f_{ik} E_k = -i\omega \varepsilon_{ik}(\omega, k) E_k.$$

Разложив $E_0(t, r)$ в интеграл Фурье по времени и координатам, представим ее в виде наложения компонент вида

$$E_{0\alpha q} e^{i(qr - \alpha t)},$$

причем $\alpha \ll \omega_0$, $q \ll k_0$. Далее поступаем, как при выводе формулы (80,10). Воздействуя оператором (2) на функцию

$$E_{\omega_0 + \alpha, k_0 + q} = E_{0\alpha q} \exp [i(k_0 + q)r - i(\omega_0 + \alpha)t],$$

пишем:

$$\begin{aligned} \hat{f}_{ik} E_{\omega_0 + \alpha, k_0 + q} &= f_{ik}(\omega_0 + \alpha, k_0 + q) E_{\omega_0 + \alpha, k_0 + q} \approx \\ &\approx \left[f_{ik}(\omega_0, k_0) + \alpha \frac{\partial f_{ik}(\omega_0, k_0)}{\partial \omega_0} + q \frac{\partial f_{ik}(\omega_0, k_0)}{\partial k_0} \right] E_{\omega_0 + \alpha, k_0 + q}. \end{aligned}$$

Произведя теперь обратное суммирование компонент Фурье, подставив $f_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = -i\omega\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ и опустив индекс 0 у ω_0 и \mathbf{k}_0 , получим:

$$\frac{\partial D_i}{\partial t} = -i\omega\varepsilon_{ik}E_k + \left[\frac{\partial(\omega\varepsilon_{ik})}{\partial\omega} \frac{\partial E_{0k}}{\partial t} - \omega \frac{\partial\varepsilon_{ik}}{\partial\mathbf{k}} \nabla E_{0k} \right] e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (3)$$

Второй член в квадратных скобках отличает это выражение от (80,10). Подставив (3) в равенство (1), приведем последнее к виду закона сохранения энергии

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = -\operatorname{div} \bar{\mathbf{S}}$$

с \bar{U} и $\bar{\mathbf{S}}$ из (103,14–15).

§ 104. Естественная оптическая активность

Если пространственная дисперсия слаба, тензор $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ можно разложить по степеням \mathbf{k} . Для обычных конденсированных диэлектрических сред это есть разложение по степеням a/λ , где a — атомные размеры, λ — длина волны поля.

С точностью до членов первого порядка малости такое разложение имеет вид

$$\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ik}^{(0)}(\omega) + i\gamma_{ikl}k_l, \quad (104,1)$$

где $\varepsilon_{ik}^{(0)} = \varepsilon_{ik}(\omega, 0)$, а γ_{ikl} — некоторый тензор третьего ранга, зависящий от частоты (при $\omega \rightarrow 0$ компоненты этого тензора, не связанного с каким-либо разложением по ω , стремятся к постоянным значениям). Отвечающая пронизаемости (104,1) связь между \mathbf{D} и \mathbf{E} в монохроматическом ($\propto e^{-i\omega t}$) поле в координатном представлении имеет вид

$$D_i = \varepsilon_{ik}^{(0)}E_k + \gamma_{ikl} \frac{\partial E_k}{\partial x_l}. \quad (104,2)$$

Применив к (104,1) требование симметрии (103,10), найдем (в отсутствие внешнего поля):

$$\gamma_{ikl}(\omega) = -\gamma_{kil}(\omega). \quad (104,3)$$

Условие же эрмитовости в отсутствие диссипации дает $\gamma_{ikl}^* = -\gamma_{kil}$; вместе с (104,3) отсюда находим, что $\gamma_{ikl}^* = \gamma_{ikl}$. Таким образом, условие отсутствия поглощения требует вещественности тензора γ_{ikl} .

Если, следуя введенным в § 97 обозначениям, представить волновой вектор плоской волны в виде $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}/c$, выражение (104,1) запишется в виде

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^{(0)} + i \frac{\omega}{c} \gamma_{ikl}n_l. \quad (104,4)$$

Введем вместо антисимметричного тензора второго ранга $\gamma_{ikl}n_l$ дуальный ему аксиальный вектор *гирации* \mathbf{g} согласно

$$\frac{\omega}{c} \gamma_{ikl}n_l = e_{ikl}g_l, \quad (104,5)$$

т. е. напишем ε_{ik} в виде

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^{(0)} + ie_{ikl}g_l, \quad (104,6)$$

формально совпадающем с использованной в § 101 формой записи. Разница заключается в том, что там вектор g зависел только от свойств среды (и приложенного магнитного поля), между тем как здесь вектор гирации зависит и от волнового вектора поля. Согласно (104,5) компоненты этого вектора являются линейными функциями компонент n :

$$g_i = g_{ik}n_k. \quad (104,7)$$

Подставив (104,7) в (104,5), найдем

$$\frac{\omega}{c} \gamma_{ikl}n_l = e_{ikm}g_{ml}n_l,$$

откуда ввиду произвольности n

$$\frac{\omega}{c} \gamma_{ikl} = e_{ikm}g_{ml}, \quad (104,8)$$

чем устанавливается связь между компонентами истинного тензора третьего ранга γ_{ikl} и псевдотензора второго ранга g_{ik} ¹⁾.

Конкретная кристаллографическая симметрия тела накладывает определенные ограничения на компоненты тензора γ_{ikl} (или g_{ik}) и, в частности, может приводить к тождественному равенству нулю всех компонент. Так, тензор γ_{ikl} не может существовать у тел, обладающих центром симметрии. Действительно, при изменении знака всех трех координат (инверсии) все компоненты тензора третьего ранга (и соответственно псевдотензора второго ранга) меняют знак, между тем как симметрия тела требовала бы их неизменности при этом преобразовании.

О телах с отличным от нуля тензором g_{ik} говорят, что они обладают *естественной оптической активностью* или *естественной гиротропией*. Таким образом, существование оптической активности во всяком случае требует отсутствия у тела центра симметрии.

Рассмотрим сначала естественную оптическую активность изотропных тел. Если жидкость (или газ) состоит из вещества, не имеющего стереоизомеров, то она симметрична не только по отношению к любому повороту, но и по отношению к отражению (инверсии) в любой точке, и естественная активность в ней исключена. Оптически активными являются лишь жидкости из веществ с двумя стереоизомерными формами, причем оба изомера должны

¹⁾ В компонентах

$$g_{xx} = \frac{\omega}{c} \gamma_{yzx}, \quad g_{xy} = \frac{\omega}{c} \gamma_{yzy}, \quad g_{yx} = \frac{\omega}{c} \gamma_{zxx} \quad \text{и т. д.}$$

содержаться в жидкости в различных количествах; такая жидкость не обладает центром симметрии.

В изотропном теле (а также в кристаллах с кубической симметрией) псевдотензор g_{ik} сводится к псевдоскаляру:

$$g_{ik} = f\delta_{ik}, \quad \gamma_{ikl} = \frac{c}{\omega} fe_{ikl}. \quad (104,9)$$

Псевдоскаляр есть величина, меняющая знак при инверсии координат. Два стереоизомерных вещества формально переходят друг в друга в результате операции инверсии; поэтому их значения величины f имеют противоположные знаки.

Таким образом, у оптически активного изотропного тела вектор гирации $\mathbf{g} = f\mathbf{n}$, и связь между индукцией и напряженностью электрического поля волны дается формулой

$$\mathbf{D} = \epsilon^{(0)}\mathbf{E} + if[\mathbf{E}\mathbf{n}]. \quad (104,10)$$

Так как $\mathbf{Dn} = 0$, то отсюда следует, что и $\mathbf{En} = 0$. Другими словами, в такой волне поперечна (по отношению к направлению \mathbf{n}) не только индукция \mathbf{D} , как во всякой среде, но и напряженность \mathbf{E} .

Изменение показателя преломления n при учете естественной активности вещества является малой величиной. Поэтому при ее определении можно положить в малом члене $[\mathbf{E}\mathbf{g}]$ в (104,10) $n = n_0 = \sqrt{\epsilon^{(0)}}$. Тогда задача о вычислении разности $n - n_0$ формально совпадает с рассмотренной в § 101 задачей об изменении n под влиянием магнитного поля, отличаясь от нее лишь смыслом вектора \mathbf{g} и тем, что он всегда параллелен направлению \mathbf{n} (ось z в § 101). Поэтому по аналогии с формулой (101,19) мы можем сразу написать

$$n_{\pm}^2 = n_0^2 \pm g = n_0^2 \pm fn_0. \quad (104,11)$$

Этим двум значениям соответствуют (ср. (101,21)) следующие отношения обеих компонент вектора \mathbf{E} (или \mathbf{D}):

$$E_x = \pm iE_y, \quad (104,12)$$

т. е. круговая левая и правая поляризация волн. Отметим также, что величина вектора \mathbf{n} не зависит от его направления; поэтому направления \mathbf{n} и лучевого вектора \mathbf{s} совпадают.

Таким образом, мы видим, что оптические свойства естественно-активного изотропного тела имеют сходство со свойствами, приобретаемыми неактивным телом в магнитном поле: оно обладает двойным круговым преломлением, а при распространении в нем линейно поляризованной волны происходит вращение ее плоскости поляризации. Угол вращения на единицу длины пути луча равен $\omega f/2c$.

У двух стереоизомерных модификаций вещества знак постоянной f , а с нею и направления вращения, противоположен; в связи с этим говорят о *право- и левовращающих стереоизомерах*.

В отличие от вращения плоскости поляризации в магнитном поле, в естественно-активных веществах величина и знак вращения не зависят от направления распространения луча. Поэтому, если линейно поляризованный световой луч проходит дважды — туда и обратно — один и тот же путь в естественно-активной среде, то в результате он окажется поляризованным в первоначальной плоскости.

Перейдем к естественно-активным кристаллам. Не входя здесь в систематический разбор всех возможных случаев симметрии (см. задачу к этому параграфу), отметим, что естественная активность исключается наличием центра симметрии, но она возможна при существовании плоскости симметрии или зеркально-поворотной оси. Подчеркнем, что условия существования естественной активности у кристаллов не совпадают, следовательно, с условиями, допускающими существование кристаллов в двух зеркально-изомерных (*энантиоморфных*) формах; последние являются более жесткими и требуют отсутствия не только центра, но и плоскостей симметрии. Таким образом, кристалл может быть оптически активным и в то же время совпадать со своим зеркальным изображением.

В естественно-активном кристалле (одно- или двухосном) при распространении света с произвольным направлением волнового вектора мы имеем дело практически с обычным двойным преломлением линейно поляризованных волн; учет активности сводится в основном к замене строго линейной поляризации на эллиптическую с малым (первого порядка малости) отношением осей.

Исключение составляют лишь направления оптических осей, вдоль которых, без учета активности, оба корня уравнения Френеля совпадают. В этих направлениях явление естественной активности кристаллов аналогично активности изотропных тел: имеет место двойное круговое преломление первого порядка и соответственное вращение плоскости поляризации линейно поляризованных волн. При отклонении волнового вектора от направления оптической оси эти явления быстро спадают.

Для количественного расчета явлений естественной активности в кристаллах удобнее пользоваться не выражением \mathbf{D} через \mathbf{E} , а обратными формулами, выражающими \mathbf{E} через \mathbf{D} (как мы это делали и в § 101). С точностью до величин первого порядка эти формулы гласят:

$$E_i = \varepsilon_{ik}^{(0)-1} D_k + i [\mathbf{DG}]_i, \quad (104,13)$$

где вектор \mathbf{G} связан с ранее введенным вектором \mathbf{g} посредством

$$G_i = - \frac{1}{|\varepsilon^{(0)}|} \varepsilon_{ik}^{(0)} g_k$$

(см. (101,9)). Ввиду формального совпадения этого выражения с выражением (101,7) остаются без изменения также и уравнения (101,11—12). В этих уравнениях G_z есть проекция вектора \mathbf{G} на направление \mathbf{n} . Если представить \mathbf{G} в виде

$$G_i = G_{ik}n_k \quad (104,14)$$

(аналогичном (104,7)), то эта проекция пропорциональна

$$\mathbf{nG} = G_{ik}n_i n_k. \quad (104,15)$$

Этой квадратичной формой определяются оптические свойства естественно-активного кристалла. Сам по себе тензор G_{ik} не должен обязательно быть симметричным, но если разделить его на симметричную и антисимметричную части, то при образовании формы (104,15) антисимметричная часть выпадает. Поэтому при исследовании оптических свойств естественно-активных кристаллов можно считать тензор G_{ik} симметричным.

Задача

Найти ограничения, налагаемые кристаллической симметрией на компоненты тензора G_{ik} .

Решение. При всяком повороте псевдотензор G_{ik} ведет себя как истинный тензор; в частности, наличие оси симметрии выше второго порядка приводит, как и для истинного симметричного тензора второго ранга, к полиной изотропии в плоскости, перпендикулярной к оси. Поведение же псевдотензора G_{ik} при отражениях определяется тем, что он дуален истинному тензору третьего ранга: при всяком отражении, меняющем знак компоненты истинного тензора второго ранга, такая же компонента G_{ik} остается неизменной, и наоборот. Так, при отражении в плоскости yz компоненты G_{xx} , G_{zz} , G_{yz} меняют знак, а G_{xy} , G_{xz} остаются неизменными.

Ниже указаны неисчезающие компоненты тензора G_{ik} для всех кристаллических классов, допускающих естественную активность. Ось z выбрана вдоль оси симметрии третьего, четвертого или шестого порядка или вдоль единственной оси второго порядка (в классах C_2 , C_{2v}), а в классе C_s — перпендикулярно к плоскости симметрии; при наличии трех взаимно перпендикулярных осей симметрии координатные оси совпадают с ними.

Класс C_1 : все компоненты G_{ik} .

Класс C_2 : G_{xx} , G_{yy} , G_{zz} , G_{xy} ; надлежащим выбором осей x , y можно обратить G_{xy} в нуль.

Класс C_s : G_{xz} , G_{yz} ; надлежащим выбором осей x , y можно обратить одну из этих величин в нуль.

Класс C_{2v} : G_{xy} (плоскости xz и yz совпадают с плоскостями симметрии).

Класс D_2 : G_{xx} , G_{yy} , G_{zz} .

Классы C_3 , C_4 , C_6 , D_3 , D_4 , D_6 : $G_{xx} = G_{yy}$, G_{zz} .

Класс S_4 : $G_{xx} = -G_{yy}$, G_{xy} ; надлежащим выбором осей x , y можно обратить одну из этих величин в нуль.

Класс D_{2d} : G_{xy} (оси x , y лежат в вертикальных плоскостях симметрии).

Классы T , O : $G_{xx} = G_{yy} = G_{zz}$.

Отметим, что в одноосных кристаллах классов S_4 и D_{2d} скаляр (104,15) обращается в нуль, если вектор \mathbf{n} направлен вдоль оси z , поскольку $G_{zz} = 0$. Это значит, что в этих кристаллах отсутствуют эффекты естественной активности вдоль оптической оси.

В двухосном кристалле класса C_{2v} оптические оси лежат в одной из плоскостей симметрии. Но для векторов \mathbf{n} , лежащих в плоскостях xz или yz ,

скаляр (104,15) в данном случае тоже обращается в нуль, так что и здесь эффекты вдоль оптических осей отсутствуют. Единственным кристаллическим классом, допускающим явление вращения плоскости поляризации вдоль оптической оси и в то же время не допускающим энантиоморфизм, является моноклинный класс C_s .

§ 105. Пространственная дисперсия в оптически неактивных средах

В кристаллах, симметрия которых не допускает естественной оптической активности, первые (после нулевого) члены разложения проницаемости $\epsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ по степеням \mathbf{k} оказываются квадратичными.

Как обычно в кристаллооптике, для дальнейшего использования удобнее писать это разложение для обратного тензора $\eta_{ik} = \epsilon_{ik}^{-1}$. Напишем его в виде

$$\eta_{ik} = \eta_{ik}^{(0)}(\omega) + \beta_{iklm}(\omega) k_l k_m. \quad (105,1)$$

Тензор β_{iklm} можно считать симметричным по второй паре индексов, поскольку он умножается на симметричное произведение $k_l k_m$. В силу же (103,10) (с $\mathfrak{S} = 0$) тензор β_{iklm} симметричен и по первой паре индексов:

$$\beta_{iklm} = \beta_{kilm} = \beta_{ikml}. \quad (105,2)$$

Он, однако, не должен быть симметричным по отношению к перестановке обеих пар. В отсутствие поглощения из эрмитовости тензора η_{ik} и его симметричности следует, что тензор β_{iklm} веществен, что и предполагается ниже.

В изотропной среде тензор β_{iklm} должен выражаться только через единичный тензор, т. е. имеет вид

$$\beta_{iklm} = \beta_1 \delta_{ik} \delta_{lm} + \frac{\beta_2}{2} (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{kl} \delta_{im});$$

он содержит только две независимые компоненты. В изотропном теле также и $\eta_{ik}^{(0)} = \eta^{(0)} \delta_{ik}$ и, таким образом, тензор (105,1) принимает вид

$$\eta_{ik} = (\eta^{(0)} + \beta_1 k^2) \delta_{ik} + \beta_2 k_i k_k, \quad (105,3)$$

в соответствии с общим выражением (103,12) диэлектрического тензора в изотропной среде с пространственной дисперсией. Распространение волн в среде определяется уравнениями (97,21). Но при подстановке (105,3) в эти уравнения анизотропный член с β_2 выпадает ввиду ортогональности векторов \mathbf{D} и \mathbf{k} в плоской волне, т. е. среда остается, как и должно быть, оптически изотропной.

Но уже в кубических кристаллах тензор β_{iklm} не сводится к единичному тензору; в зависимости от кристаллического класса

он имеет для этих кристаллов 3 или 4 независимые компоненты. Без учета пространственной дисперсии кубические кристаллы оптически изотропны; учет квадратичной по k дисперсии приводит к появлению в них нового свойства—оптической анизотропии (*H. A. Lorentz*, 1878).

В кубическом кристалле $\eta_{ik}^{(0)} = \delta_{ik}/\epsilon^{(0)}$ и разложение (105,1) принимает вид

$$\eta_{ik} = \frac{1}{\epsilon^{(0)}} \delta_{ik} + \beta_{iklm} k_l k_m. \quad (105,4)$$

Подставив это выражение в уравнения (97,21), получим

$$\left[\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} \right) \delta_{\alpha\beta} - \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \beta_{\alpha\beta 33} \right] D_\beta = 0, \quad (105,5)$$

где $n_0^2 = \epsilon^{(0)}$, а ось x_3 декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 направлена вдоль волнового вектора. По смыслу разложения (105,4), второй член в квадратных скобках в этих уравнениях надо рассматривать как малую поправку (об особом случае обращения $1/n_0^2$ в нуль см. § 106). Тогда в нем можно заменить n^2 на n_0^2 :

$$\left[\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} \right) \delta_{\alpha\beta} - \frac{\omega^2 n_0^2}{c^2} \beta_{\alpha\beta 33} \right] D_\beta = 0. \quad (105,6)$$

Эти уравнения—такого же вида, как и для волн в некубическом кристалле без учета пространственной дисперсии. Их определитель представляет собой квадратное по n^{-2} уравнение, определяющее показатели преломления двух волн с одинаковым направлением k и различными поляризациями. Таким образом, пространственная дисперсия в кубическом кристалле снимает «вырождение по поляризации»—скорости двух волн становятся различными и зависящими от направления.

В конце § 84 была упомянута возможность существования продольных электромагнитных волн в прозрачной изотропной среде. Последовательная формулировка условия, определяющего связь между частотой и волновым вектором (закон дисперсии) этих волн, требует учета пространственной дисперсии; оно гласит

$$\epsilon_l(\omega, k) = 0. \quad (105,7)$$

При малых k решение этого уравнения имеет вид

$$\omega(k) = \omega_{l0} + \frac{1}{2} \alpha k^2, \quad (105,8)$$

где α —постоянная, а ω_{l0} —значение частоты, обращающее в нуль проницаемость $\epsilon(\omega) = \epsilon_l(\omega, 0)$. При этом скорость распространения волны

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \alpha \mathbf{k} \quad (105,9)$$

пропорциональна первой степени волнового вектора.

Задача

Найти соотношения между компонентами тензора β_{iklm} в негиротропных кристаллах кубической системы.

Решение. Естественная гиротропия отсутствует в кристаллических классах T_d , T_h , O_h .

В классах T_d и T_h выбираем оси x , y , z по трем осям симметрии 2-го порядка. Отличные от нуля компоненты тензора:

$$\begin{aligned} \beta_1 &\equiv \beta_{xxxx} = \beta_{yyyy} = \beta_{zzzz}, & \beta_2 &\equiv \beta_{xxzz} = \beta_{yyxx} = \beta_{zzyy}, \\ \beta_3 &\equiv \beta_{xyxy} = \beta_{yzyz} = \beta_{zxzx}, & \beta_4 &\equiv \beta_{zzxx} = \beta_{xxyy} = \beta_{yyzz}. \end{aligned}$$

В классе O_h три оси C_2 становятся осями C_4 , в результате чего дополнительно становится $\beta_2 = \beta_4$.

§ 106. Пространственная дисперсия вблизи линии поглощения

В двух предыдущих параграфах эффекты пространственной дисперсии рассматривались как малые поправки, как это обычно и имеет место. Ситуация меняется, однако, вблизи узкой линии поглощения в кристалле, где согласно (84,7) $\varepsilon^{(0)}(\omega)$ резко возрастает. В этой области учет пространственной дисперсии меняет картину даже качественно.

Дело в том, что добавление в диэлектрическую проницаемость членов со степенями k повышает порядок алгебраического дисперсионного уравнения, определяющего зависимость $k(\omega)$. Поэтому при формальном его решении возникают дополнительные корни. Вдали от линии поглощения эти корни лежат в области больших k , т. е. вне области применимости теории, и потому должны быть отброшены. Но вблизи линии поглощения проницаемость меняется существенно уже при малых k и могут возникнуть дополнительные корни, имеющие реальный физический смысл, т. е. возникают новые поперечные волны.

Мы ограничимся, для простоты, рассмотрением изотропных сред и начнем со случая, когда среда не гиротропна—не обладает естественной оптической активностью (С. И. Пекар, 1957; В. Л. Гинзбург, 1958).

Как уже было указано в предыдущем параграфе, изотропная среда остается оптически изотропной и при учете пространственной дисперсии. Это значит, что закон дисперсии поперечных электромагнитных волн в такой среде дается обычным уравнением $n^2 = \varepsilon$, причем под ε надо понимать поперечную проницаемость ε_t :

$$n^2 = \varepsilon_t(\omega, k). \quad (106,1)$$

В § 103 было указано, что как функции частоты $\varepsilon_t(\omega, k)$ и $\varepsilon_l(\omega, k)$ удовлетворяют тем же соотношениям Крамерса—Кронига, что и функция $\varepsilon(\omega)$ без пространственной дисперсии. Поэтому можно утверждать, что вблизи линии поглощения функция $\varepsilon_t(\omega, k)$ имеет такой же вид, как и в (84,7), но с постоянными,

зависящими от k ; запишем ее в виде

$$\epsilon_t(\omega, k) = \frac{A(k)}{\omega_t(k) - \omega}, \quad A(k) > 0.$$

Если величина A относительно мала¹⁾, то может иметь смысл учесть, наряду с полюсным членом, также и постоянный (не зависящий от ω) член в ϵ_t ; обозначим его $a(k)$ и будем считать, что $a > 0$, т. е. вдали от линии поглощения среда оптически прозрачна. Теоретическая допустимость одновременного учета постоянного и полюсного членов в ϵ_t требует, чтобы они сравнивались друг с другом в области частот $|\omega - \omega_t| \ll \omega_t$, где только и применимо полюсное выражение; другими словами, должно быть $A \ll a\omega_t$.

Поскольку k по-прежнему предполагается малым, можно разложить функции по его степеням. При этом достаточно заменить $a(k)$ и $A(k)$ постоянными значениями $a \equiv a(0) > 0$, $A \equiv A(0) > 0$, оставив поправочный член лишь в разложении функции $\omega_t(k)$ в малой разности $\omega_t - \omega$:

$$\omega_t(k) \approx \omega_0 + vk^2.$$

Тогда проницаемость:

$$\epsilon_t(\omega, k) = a + \frac{A}{\omega_0 + vk^2 - \omega}. \quad (106,2)$$

Отметим, что это выражение как функция частоты проходит через нуль в области $\omega > \omega_t$. При $k=0$ это происходит при $\omega = \omega_{t0} = \omega_0 + A/a$. Поскольку при $k=0$ проницаемости ϵ_t и ϵ_l совпадают, то ω_{t0} есть предельная (при $k \rightarrow 0$) частота продольной волны (ср. (105,8)). Корень же функции $\epsilon_t(\omega, k)$ при $k \neq 0$ прямого физического смысла не имеет.

Дисперсионное уравнение (106,1) принимает теперь вид

$$(n^2 - a)(\beta n^2 - \omega + \omega_0) = A, \quad (106,3)$$

где введено обозначение $\beta = v\omega^2/c^2 \approx v\omega_0^2/c^2$; эта величина может иметь оба знака. Решения этого уравнения можно рассматривать как результат пересечения двух ветвей спектра — обычной световой волны с $n^2 = a$ и волны с $n^2 = (\omega - \omega_0)/\beta$, связанной с полюсом диэлектрической проницаемости; эти ветви показаны на рис. 58 штрихпунктирными прямыми. «Взаимодействие» этих ветвей, сила которого определяется величиной A , приводит к раздвижению линий²⁾.

¹⁾ Например, в силу каких-либо приближенных правил отбора, уменьшающих матричные элементы, определяющие значение A .

²⁾ В микроскопической теории полюс диэлектрической проницаемости отражает существование бозевских элементарных возбуждений в диэлектрике — *экситонов*; знак постоянной β совпадает со знаком эффективной массы экситона (см. IX § 66). Соответствующую ветвь спектра воли называют *экситонной*. Область спектра вблизи виртуального пересечения обеих ветвей называют *поляритонной*.

На рис. 58 сплошными линиями схематически показаны зависимости $n^2(\omega)$, определяемые корнями уравнения (106,3); штриховые линии — функции $n^2(\omega)$ без учета пространственной дисперсии ($\beta=0$). Распространяющимся в среде волнам отвечают, конечно, лишь положительные¹⁾ корни n^2 . При $\beta > 0$ (рис. 58, а) верхняя

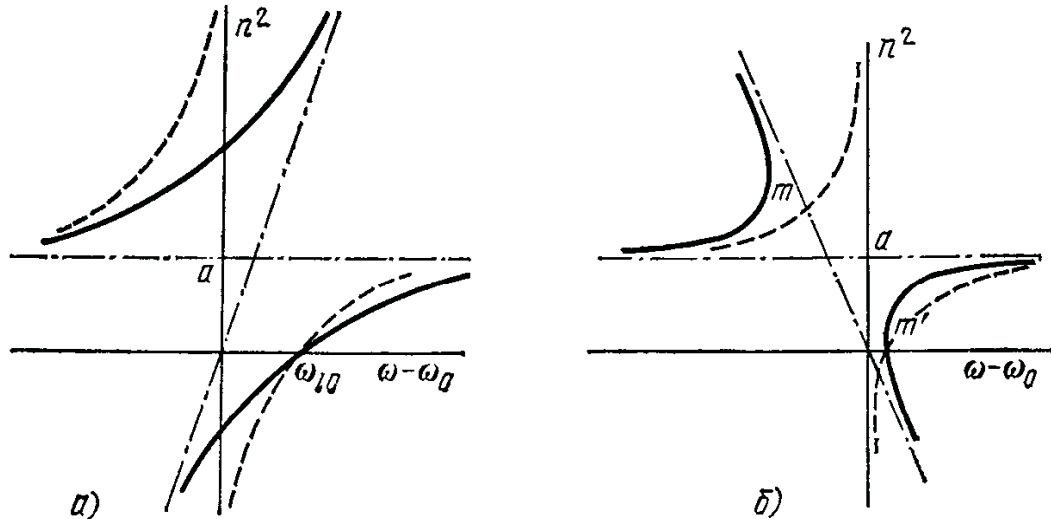


Рис. 58.

сплошная кривая проникает в область $\omega > \omega_0$, тем самым создавая здесь дополнительную волну, которой не было бы без учета пространственной дисперсии; при $\omega > \omega_0$ в среде возможно распространение двух различных электромагнитных волн. На рис. 58, б изображены кривые зависимости $n^2(\omega)$ для случая $\beta < 0$. Левее точки m с координатами

$$n_m^2 = a + \sqrt{\frac{A}{|\beta|}}, \quad \omega_m - \omega_0 = -|\beta| \left(a + 2 \sqrt{\frac{A}{|\beta|}} \right)$$

(точка, в которой $dn^2/d\omega = \infty$ и два корня сливаются) имеется два положительных корня и в среде могут распространяться две различные волны. То же самое относится к области между точкой m' с координатами

$$n_{m'}^2 = a - \sqrt{\frac{A}{|\beta|}}, \quad \omega_{m'} - \omega_0 = -|\beta| \left(a - 2 \sqrt{\frac{A}{|\beta|}} \right)$$

и точкой $\omega = \omega_0$.

Если величина A не достаточно мала, сохранение постоянного члена в (106,2), строго говоря не последовательно. Опустив этот член (т. е. положив в написанных формулах $a=0$), мы придем к картине, отличающейся от рис. 58 тем, что горизонтальной асимптотой всех кривых становится сама ось абсцисс (вместо

¹⁾ Для наглядности на рисунке изображены также и отрицательные корни. Напомним, что чисто мнимые значения n отвечают волнам, для которых среда непрозрачна (хотя в ней и нет поглощения); можно сказать, что волна полностью отражается от среды.

линии $n^2 = a$). Область $\omega \geq \omega_0$ оказывается при этом вне рассмотрения.

Обратимся к изучению ситуации вблизи линии поглощения в гиротропной среде (В. Л. Гинзбург, 1958).

Диэлектрическую проницаемость $\epsilon^{(0)}$ без учета пространственной дисперсии представим в виде полюсного выражения

$$\epsilon^{(0)}(\omega) = \frac{A}{\omega_0 - \omega}. \quad (106,4)$$

Мы не будем теперь предполагать специальной малости коэффициента A и соответственно этому не пишем постоянного члена. Для связи между \mathbf{E} и \mathbf{D} следует пользоваться формулой вида (104,13), выраженной через обратный тензор $\eta_{ik} = \epsilon_{ik}^{-1}$. В изотропной среде

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon^{(0)}} \mathbf{D} + iF [\mathbf{D}\mathbf{n}], \quad (106,5)$$

где вектор оптической активности записан в виде $\mathbf{G} = F\mathbf{n}$. Вблизи линии поглощения компоненты тензора η_{ik} проходят просто через нуль и нет оснований для нарушения сходимости его разложения по волновому вектору.

Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2} \right)^2 = F^2 n^2, \quad (106,6)$$

где $n_0^2 = \epsilon^{(0)}$ (ср. (101,12)). Подставив сюда $\epsilon^{(0)}$ из (106,4), получим уравнение

$$\left(\frac{1}{n^2} + \frac{\omega - \omega_0}{A} \right)^2 = F^2 n^2. \quad (106,7)$$

На рис. 59 сплошными линиями схематически показана зависимость корней n^2 этого уравнения от $\omega - \omega_0$. Один из них существует как при $\omega < \omega_0$, так и при $\omega > \omega_0$, где без учета пространственной дисперсии вещественных значений n нет (штриховая кривая на рисунке — функция $n_0^2(\omega)$). Два других существуют лишь при $\omega < \omega_m$ — левее точки m , в которой

$$\omega_0 - \omega_m = 3A \left(\frac{F}{2} \right)^{2/3},$$

$$n_m^2 = \left(\frac{2}{F} \right)^{2/3}.$$

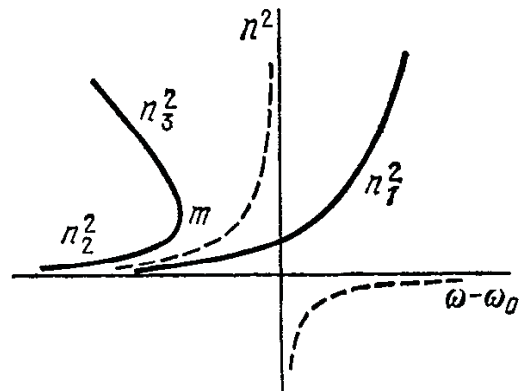


Рис. 59.

Кривые функций $n_2^2(\omega)$ и $n_3^2(\omega)$ проходят над линией $n_0^2(\omega)$, а кривая функции $n_1^2(\omega)$ — под ней. Поэтому (как это ясно из уравнений (101,11), определяющих индукцию \mathbf{D} в волне) волны 2 и 3 обладают круговой поляризацией одного, а волна 1 — другого знака.

Подчеркнем в заключение, что сами формулы (106,2) и (106,4) для проницаемости, а потому и основанные на них результаты, относятся лишь к частотам, достаточно далеким от центра линии: $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$, где γ — ширина линии. При $|\omega - \omega_0| \leq \gamma$ необходимо учитывать поглощение, т. е. мнимую часть проницаемости. Это может существенно изменить картину.