



ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ასიმეტრიული მოდეების მდგრადობა და ვარსკვლავთწარმოშობა გალაქტიკის ფარული მასის ველში

სალომე მჭედლიძე

სამაგისტრო პროგრამა „ფუნდამენტური ფიზიკა“

ასტროფიზიკის კათედრა

ხელმძღვანელი: ალექსანდრე თევზაძე

(სამაგისტრო ნაშრომის დაცვა, 12.07.2017)

შესავალი

სამაგისტრო ნაშრომში შესწავლილია ჯინსის არამდგრადობა ფარული მასის გრავიტაციული პოტენციალის ნებისმიერი შესაძლო ასიმეტრიის პირობებში.

გალაქტიკის არა-რადიალური გრავიტაციული მდგრადობა შესწავლილია ასიმეტრიული გრავ. პოტენციალისათვის მულტიპოლური გაშლის გამოყენებით.

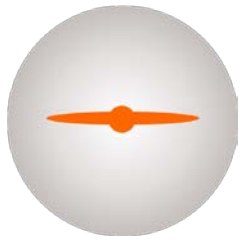
სფერულად სიმეტრიული გრავიტაციული მდგრადობა შესწავლილია საბაკალავრო ნაშრომში (თსუ 2015).

ნაჩვენებია, რომ გარეშე ველის ზეგავლენა დამოკიდებულია გრავ. პოტენციალის რადიალურ განაწილებაზე: ამოზნექილი პოტენციალი ხელს უწყობს არამდგრადობას, ჩაზნექილი კი აფერხებს.

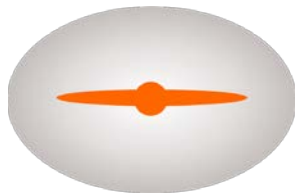
ფარული მასის ასიმეტრია

დაკვირვებები მიგვანიშნებენ, რომ გალაქტიკების ფარული მასის ჰალო არ არის სფერულად სიმეტრიული. თუმცა, ასიმეტრიის თვისებები არ არის კარგად შესწავლილი.

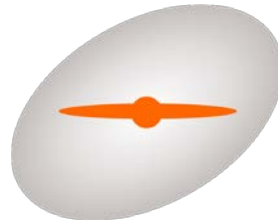
გალაქტიკის ფარული მასის არსებული **თეორიული მოდელები**



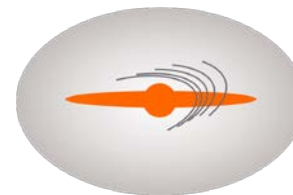
სფერული



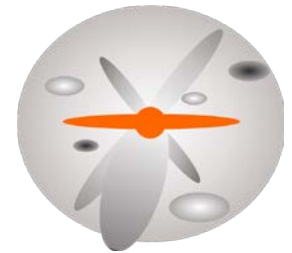
ელიფსოიდური



ტრი-
აქსიალური



კაუსტიკური
რგოლები



უცნობი
წარმოშობის
ასიმეტრიული
შემკვრივებები

გრავიტაციული მდგრადობა

- გრავიტაციული პოტენციალი:

ბარიონული ფონის შეშფოთება

ბარიონული
ფონი

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi' + \Phi_{\text{ext}}$$

ფარული მასის
პოტენციალი

- სიმკვრივის განაწილება: (ფარული მასის სიმკვრივე მუდმივია)

ბარიონული
ფონი

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

ბარიონული სიმკვრივის
შეშფოთება

გრავიტირებადი, კუმშვადი გარემოს ჰდ განტოლება გარეშე ველით:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \nabla^2 (c_s^2 \rho') - 4\pi G \rho_0 \rho' = \rho' \nabla^2 \Phi_{\text{ext}} + \nabla \Phi_{\text{ext}} \cdot \nabla \rho'$$

სფერული ჰარმონიკები

- სიმკვრივისა და გრავ. პონტეციალის გაშლა სფერული ჰარმონიკების გამოყენებით:

$$\rho'(\mathbf{r}) = \rho'(r, \varphi, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \rho_{lm}(r) Y_l^m(\varphi, \theta)$$

$$\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0(r, \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \bar{\rho}_{lm}(r) Y_l^m(\Omega)$$

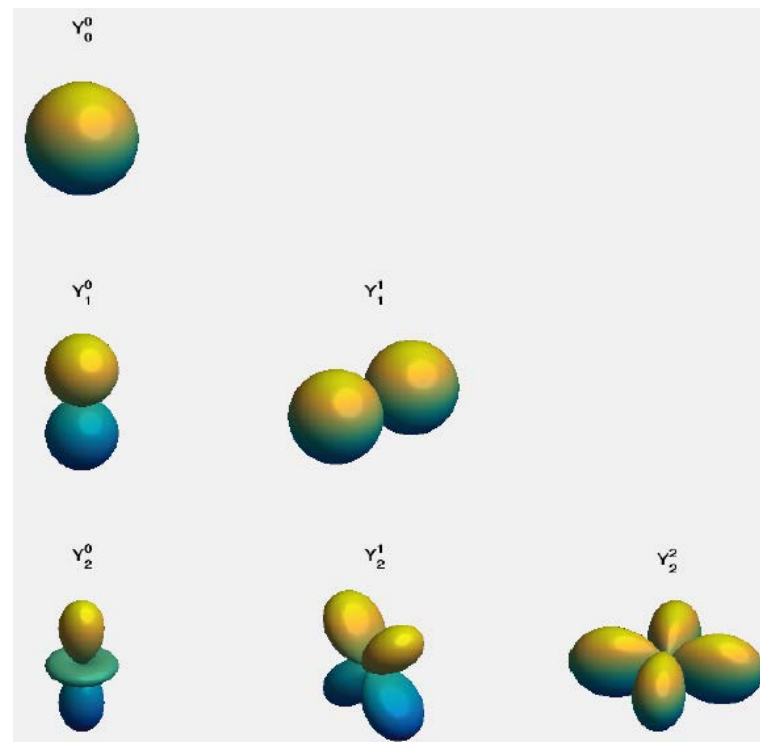
$$\Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Phi_{lm}(r) Y_l^m(\varphi, \theta)$$

სადაც

$$Y_l^m(\varphi, \theta) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\varphi}$$

სფერული
ფუნქცია

ასოცირებული
ლეჟანდრის
პოლინომი



ინტეგრალური ფორმები

ასოცირებული ლეჟანდრის პოლინომების კვადრატული ინტეგრალური ფორმები:

ორთოგონალობის პირობა

$$\longrightarrow \mathcal{I}_{ns}^m = \int_{-1}^1 P_n^m(x) P_s^m(x) dx = \frac{2(s+m)!}{(2s+1)(s-m)!} \delta_{n,s}.$$

$$\bullet \longrightarrow \mathcal{J}_{ns}^m = \int_{-1}^1 \frac{P_n^m(x) P_s^m(x)}{(1-x^2)} dx$$

$$\bullet \longrightarrow \mathcal{K}_{ns}^m = \int_{-1}^1 P_n^{m-1} P_s^{m+1} dx.$$

$$\bullet \longrightarrow \mathcal{L}_{ns} = \int_{-1}^1 \frac{P_n(x) P_s(x)}{(1-x^2)} dx$$

ინტეგრალური ფორმების თვისებები

კავშირი სხვადასხვა ფორმებს შორის:

$$\mathcal{J}_{ns}^m = \begin{cases} \frac{(k+m)!}{m(k-m)!} \mathcal{E}(n, s); & k = \text{Min}(n, s); \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad m \neq 0. \\ 0; & m = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{E}(n, s) = \begin{cases} 1, & |n - s| = 2k; \\ 0, & |n - s| = 2k + 1; \end{cases}$$

$$\mathcal{J}_{n+1, s+1}^m = \mathcal{J}_{ns}^m \frac{(k+m+1)}{(k-m+1)}$$

$$\sum_{l'=1}^{\infty} \mathcal{L}_{l-1, l'-1} = \sum_{l'=1}^{\infty} \text{even} \mathcal{L}_{k, k} + \sum_{l'=1}^{\infty} \text{odd} \mathcal{L}_{k-1, k}$$

$$\mathcal{J}_{n-1, s-1}^m = \mathcal{J}_{n, s}^m \frac{(k-m)}{(k+m)}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{l_1 l_2}^m &= \frac{(l_2 - m + 1)(m - l_2)}{(2l_2 + 1)(2l_1 + 1)} \mathcal{J}_{l_1+1, l_2+1}^m + \frac{(l_2 + m + 1)(l_2 + m)}{(2l_2 + 1)(2l_1 + 1)} \mathcal{J}_{l_1+1, l_2-1}^m \\ &+ \frac{(l_2 - m + 1)(l_2 - m)}{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)} \mathcal{J}_{l_1-1, l_2+1}^m - \frac{(l_2 + m + 1)(l_2 + m)}{(2l_2 + 1)(2l_1 + 1)} \mathcal{J}_{l_1-1, l_2-1}^m \end{aligned}$$

გრავიტაციული მდგრადობა

მდგრადობის განტოლების მულტიპოლური სახე:

$$\frac{c_s^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \rho_{00}}{\partial r} \right) + \omega^2 \rho_{00} + 4\pi G \frac{\bar{\rho}_{00}}{\sqrt{4\pi}} \rho_{00} + \frac{\rho_{00}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\Phi_{00}}{\sqrt{4\pi}} + \frac{\partial \rho_{00}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Phi_{00}}{\sqrt{4\pi}} \right) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \rho_{lm} T_{lm} = 0$$

მულტიპოლური
ანიზოტროპიის პარამეტრი

დაშვება 1: გალაქტიკები იმყოფებიან ნეიტრალური მდგრადობის მდგომარეობაში სიმეტრიული შეშფოთებებისათვის ($l=m=0, \omega=0$):

$$\frac{c_s^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \rho_{00}}{\partial r} \right) + 4\pi G \frac{\bar{\rho}_{00}}{\sqrt{4\pi}} \rho_{00} + \frac{\rho_{00}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\Phi_{00}}{\sqrt{4\pi}} + \frac{\partial \rho_{00}}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Phi_{00}}{\sqrt{4\pi}} \right) = 0$$

დაშვება 2: ხილული მასის სიმეტრიულ და ასიმეტრიულ კომპონენტებს გააჩნიათ ერთნაირი რადიალური განაწილება :

ასიმეტრიის
პარამეტრი

$$\alpha_{lm} = \frac{\rho_{lm}}{\rho_{00}} = \text{constant}$$

ზოგადი დისპერსიული განტოლება

$$\omega^2 = - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \alpha_{lm} T_{lm}$$

მულტიპოლური ანიზოტროპიის პარამეტრის ზოგადი ფორმა:

$$\begin{aligned} T_{l,m} = & (-1)^m \sqrt{4\pi} G \bar{\rho}_{l,-m} + (-1)^m \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - l(l+1) + r^2 \frac{\partial}{\partial r} [\ln(\rho_{00})] \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\Phi_{l,-m}}{\sqrt{4\pi}} \\ & + \frac{\Phi_{lm}}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{2r^2} [l(l+1) - m^2] + \sum_{l'=1}^{\infty} \frac{\Phi_{l'm}}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{8r^2} \sqrt{\frac{1}{2l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \sqrt{\frac{1}{2l'+1} \frac{(l'-m)!}{(l'+m)!}} \times \\ & \left\{ \left[-4m^2(2l+1)(2l'+1) - 2(l-m+1)(l'-m+1)(m^2 - ll') \frac{(k+m+1)}{(k-m+1)} \right. \right. \\ & + 2(l+m)(l'+m)((l'+1)(l+1) - m^2) \frac{(k-m)}{(k+m)} \left. \right] \frac{(k+m)!}{m(k-m)!} \\ & - 2(l-m+1)(l'+m)(l(l'+1) + m^2) \frac{(p+m)!}{m(p-m)!} \\ & - 2(l+m)(l'-m+1)(l'(l+1) + m^2) \frac{(q+m)!}{m(q-m)!} \left. \right\} \mathcal{E}(l, l') + \\ & + \sum_{l'=1}^{\text{odd}} \frac{\Phi_{l'0}}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{8r^2} \sqrt{\frac{1}{2l+1}} \sqrt{\frac{1}{2l'+1}} \left\{ 2ll'(l+1)(l'+1) [\mathcal{L}_{k+1,k+2} - \mathcal{L}_{p,p+1} - \mathcal{L}_{q,q+1} + \mathcal{L}_{k-1,k}] \right\} \\ & + \sum_{l'=2}^{\text{even}} \frac{\Phi_{l'0}}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{8r^2} \sqrt{\frac{1}{2l+1}} \sqrt{\frac{1}{2l'+1}} \left\{ 2ll'(l+1)(l'+1) [\mathcal{L}_{k+1,k+1} - \mathcal{L}_{pp} - \mathcal{L}_{qq} + \mathcal{L}_{k-1,k-1}] \right\}. \end{aligned}$$

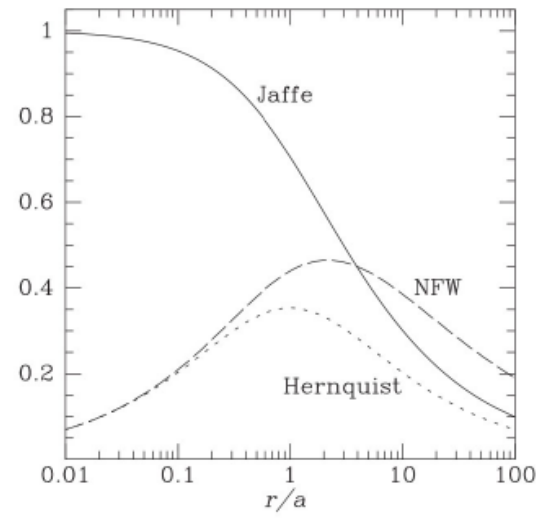
სფერული სიმეტრიული მდგომარეობა

სფერულად სიმეტრიული მდგომარეობა:
 არსებული თეორიული მოდელები
 (*Jaffe, Hernquist, Navarro-Frenk-White*)

$$\frac{\partial}{\partial r} (\ln \rho_{00}) \equiv f_{00}$$

$$\frac{\partial f_{00}}{\partial r} + \left[\frac{2}{r} - \frac{4\pi G \rho_0^d}{c_s^2} \left(\frac{1}{r(1+\frac{r}{a})} - \frac{a}{r^2} \ln \left(1 + \frac{r}{a} \right) \right) \right] f_{00} + f_{00}^2 =$$

$$-\frac{4\pi G \rho_0^b}{c_s^2} \left[\ln \left(1 + \frac{r}{a} \right) - \frac{r}{a(1+\frac{r}{a})} + \frac{\rho_0^d}{\rho_0^b} \frac{1}{ar(1+\frac{a}{r})^2} \right]$$



მაღალი რივის ასიმეტრიებისათვის ($l \gg 1$) არა-რადიალური მოდელების მდგრადობა არ არის დამოკიდებული რადიალურ განაწილებაზე.

დაბალი რიგის ჰარმონიკები

დიპოლური ანიზოტროპიები:

$$T_{10} = 4\pi G \frac{\bar{\rho}_{10}}{\sqrt{4\pi}} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - 1 + r^2 \frac{\partial}{\partial r} \ln(\rho_{00}) \frac{\partial}{\partial r} \right] \frac{\Phi_{10}}{\sqrt{4\pi}} + \frac{\Phi_{10}}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{3r^2} [\mathcal{L}_{23} - \mathcal{L}_{01}] + \frac{\Phi_{20}}{\sqrt{4\pi}} \frac{3}{r^2} \frac{1}{\sqrt{15}} [\mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{11}] .$$

$$T_{10} = f(\Phi_{10}, \Phi_{20})$$

$$T_{11} = -4\pi G \frac{\bar{\rho}_{1,-1}}{\sqrt{4\pi}} - \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - 2 + r^2 \frac{\partial}{\partial r} \ln(\rho_{00}) \frac{\partial}{\partial r} \right] \frac{\Phi_{1,-1}}{\sqrt{4\pi}} - \frac{1}{r^2} \frac{\Phi_{11}}{\sqrt{4\pi}} - \sum_{\nu=3}^{\text{odd}} \frac{\sqrt{6}}{r^2} \frac{\Phi_{\nu,1}}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{(2\nu+1) \frac{(\nu-1)!}{(\nu+1)!}} .$$

$$T_{11} = f(\Phi_{1,-1}, \Phi_{11}, \Phi_{31}, \Phi_{51}, \dots)$$

კვადრუპოლური ასიმეტრია:

$$T_{20} = 4\pi G \frac{\bar{\rho}_{20}}{\sqrt{4\pi}} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - 3 + r^2 \frac{\partial}{\partial r} \ln(\rho_{00}) \frac{\partial}{\partial r} \right] \frac{\Phi_{20}}{\sqrt{4\pi}} + \frac{3}{r^2} \frac{\Phi_{10}}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{15}} [\mathcal{L}_{23} - \mathcal{L}_{12}] + \frac{18}{r^2} \frac{\Phi_{30}}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{35}} [\mathcal{L}_{34} - \mathcal{L}_{23}] + \frac{9}{5r^2} \frac{\Phi_{20}}{\sqrt{4\pi}} [\mathcal{L}_{33} - \mathcal{L}_{11}]$$

$$T_{20} = f(\Phi_{10}, \Phi_{20}, \Phi_{30})$$

ანიზოტროპიის პარამეტრის წყაროები

ღერძულად სიმეტრიული შეშფოთებებისათვის (მაგალითად დიპოლური ასიმეტრია $(l,m)=(1,0)$) ანიზოტროპიის პარამეტრი გამოითვლება მომიჯნავე ჰარმონიკებით:

$$T_{l,0} = f(\Phi_{l-1,0}, \Phi_{l,0}, \Phi_{l+1,0})$$

$T_{2,0}$

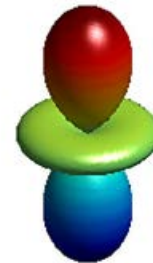
Y_2^0



Y_1^0



Y_2^0



Y_3^0



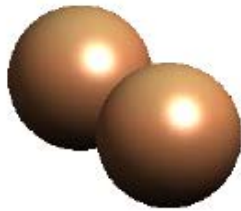
ანიზოტროპიის პარამეტრის წყაროები

ღერძულად არასიმეტრიული შეშფოთებებისათვის (მაგალითად $(l,m)=(1,1)$) ანიზოტროპიის პარამეტრი გამოითვლება ჰარმონიკების ჯამით:

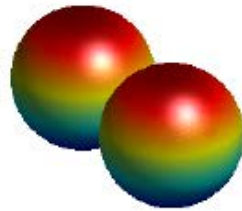
$$T_{l,1} = f(\Phi_{l,\pm 1}, \Phi_{l+1,1}, \Phi_{l+2,1}, \dots)$$

$T_{2,1}$

Ψ_1^1



Ψ_1^1



Ψ_2^1



Ψ_3^1



Ψ_4^1



Ψ_4^1



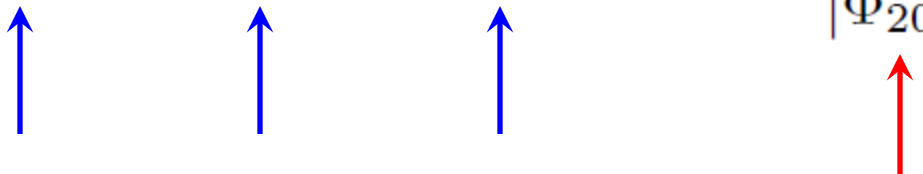
...

ფარული მასა კვადრუპოლური ასიმეტრიით

განვიხილოთ ფარული მასის ჰალო კვადრუპოლური ასიმეტრიით

$$\Phi_{20} \neq 0 \quad \Phi_{lm} = 0, \quad l \neq 2, m \neq 0$$

ხილული ნივთიერების გრავიტაციული მდგრადობის დისპერსია

$$A_1 \alpha_{10} + A_2 \alpha_{20} + A_3 \alpha_{30} + \dots = -\frac{4\pi}{|\Phi_{20}|} \omega^2$$


სადაც:

$$A_l \equiv \frac{4\pi T_{l0}}{|\Phi_{20}|}$$

დასკვნა

- ▶ შესწავლილია კუმშვადი იზოთერმული გარემოს მდგრადობა გალაქტიკის ფარული მასის ველში;
- ▶ მიღებულია ჯინსის არამდგრადობის დისპერსიული განტოლება სფერული ჰარმონიკების მეშვეობით;
- ▶ სფერულად სიმეტრიული განაწილება ვერ მოქმედებს მაღალი რიგის მულტიპოლების მდგრადობის მახასიათებლებზე;
- ▶ ფარული მასის ასიმეტრიასა და ბარიონული მასის ასიმეტრიას შორის არ არსებობს ტრივიალური კავშირი;
- ▶ ხილული მასის განაწილებაში დაკვირვებული მულტიპოლური ასიმეტრიების გამოყენებით (მაგ. ვარსკვლავების მასების განაწილების ასიმეტრია) შესაძლებელია ფარული მასის ასიმეტრიის თვისებების დადგენა;

მადლობა ყურადღებისთვის