

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
ფიზიკის მიმართულება

ფსევდო და წანაცვლებითი ალვენის ტალღების ზეარეკვლა წანაცვლებით დინებებში

დავით გოგიჩაიშვილი

ნაშრომი წარდგენილია
თსუ ბაკალავრის ხარისხის მოსაპოვებლად
ხელმძღვანელი: თსუ ასოც. პროფ. ა. თევზაძე

ივლისი, 2012

ფიზიკური მოდელი

- სამგანზომილებიანი იდეალური უკუმშვადი მაგნიტოჰიდროდინამიკური დინება;
- არაერთგვაროვანი დინება;
(სიჩქარის მუდმივი წრფივი წანაცვლება)

$$\mathbf{U}_0 = U_0 (S_y, 0, 0)$$

- მუდმივი ერთგვაროვანი მაგნიტური ველი;
(მიმართულია ნაკადის გასწვრივ)

$$\mathbf{B}_0 = B_0 (B_0, 0, 0)$$

კვლევის გეგმა

– არამოდალური ანალიზი;

წრფივ შეშფოთებათა დინამიკის შესწავლა წანაცვლების სიბრტყეში სივრცული ფურიე ჰარმონიკების დროში ევოლუციის ანალიზით.

– მკდ მოდების ანალიზი ელსასერის ცვლადებში;

მკდ განტოლებების სიმეტრიების გამოყენება ელსასერის ფორმალიზმის საშუალებით.

– რიცხვითი ანალიზი;

საწყისი მნიშვნელობის ამოცანის ამოხსნა რუნგე კუტა ინტეგრების მეთოდით (**Matlab ode45**).

განტოლებები წრფივი შეშფოთებისათვის

გავყოთ ფიზიკური სიდიდეები წონასწორულ და შეშფოთებულ ნაწილებად:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + S y \frac{\partial}{\partial x}\right) v_x + S v_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + S y \frac{\partial}{\partial x}\right) v_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{B_0}{4\pi\rho} \left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + S y \frac{\partial}{\partial x}\right) v_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{B_0}{4\pi\rho} \left(\frac{\partial b_z}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (\text{უკუმშვადი დინება})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + S y \frac{\partial}{\partial x}\right) b_y = B_0 \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + S y \frac{\partial}{\partial x}\right) b_z = B_0 \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

ρ – დინების შეუშფოთებელი სიმკვრივე

ρ – წნევის შეშფოთება

\mathbf{v} – სიჩქარის შეშფოთება

\mathbf{b} – მაგნიტური ველის შეშფოთება

არამოდულური ანალიზი

სივრცული ფურიე გარდაქმნა წანაცვლებული ფაზით:

$$\Psi(\mathbf{x}, y, z, t) = \Psi(k_x, k_y(t), k_z, t) \exp(ik_x x + ik_y(t)y + ik_z z)$$

$$k_y(t) = k_y(0) - Sk_x t$$

წრფივ შემოთებათა დროითი ევოლუცია ფურიე სივრცეში:

$$\frac{d\hat{v}_y}{d\tau} = 2\chi_p(\tau)\hat{v}_y + i\Omega_A\hat{b}_y, \quad \frac{d\hat{b}_y}{d\tau} = i\Omega_A\hat{v}_y,$$

$$\frac{d\hat{v}_z}{d\tau} = 2\chi_s(\tau)\hat{v}_y + i\Omega_A\hat{b}_z, \quad \frac{d\hat{b}_z}{d\tau} = i\Omega_A\hat{v}_z,$$

სადაც:

$$\tau = St, k_y(\tau) = k_y(0) - k_x \tau, \hat{v}_y = \frac{v_y}{V_A}, \hat{v}_z = \frac{v_z}{V_A}, \hat{b}_y = \frac{b_y}{B_0}, \hat{b}_z = \frac{b_z}{B_0},$$
$$\chi_p(\tau) = \frac{k_x k_y(\tau)}{k^2(\tau)}, \chi_s(\tau) = \frac{k_x k_z}{k^2(\tau)}, k^2(\tau) = k_x^2 + k_y(\tau)^2 + k_z^2, \Omega_A = \frac{k_x V_A}{S}.$$

ელსასერის ცვლადები

$$Z_p^+ = \vartheta_y - \bar{b}_y, \quad Z_p^- = \vartheta_y + \bar{b}_y, \quad Z_s^+ = \vartheta_z - \bar{b}_z, \quad Z_s^- = \vartheta_z + \bar{b}_z.$$

ამ ცვლადებში წრფივი შეშფოთებების აღმწერი დიფ. განტოლებათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{d Z_p^+}{d\tau} = -i\Omega_A Z_p^+ + \chi_p(\tau) Z_p^+ + \chi_p(\tau) Z_p^-$$

$$\frac{d Z_p^-}{d\tau} = -i\Omega_A Z_p^- + \chi_p(\tau) Z_p^- + \chi_p(\tau) Z_p^+$$

$$\frac{d Z_s^+}{d\tau} = -i\Omega_A Z_s^+ + \chi_s(\tau) Z_p^+ + \chi_s(\tau) Z_p^-$$

$$\frac{d Z_s^-}{d\tau} = i\Omega_A Z_s^- + \chi_s(\tau) Z_p^- + \chi_s(\tau) Z_p^+$$

სპექტრალური ენერგია

სპექტრალური ენერგია ელსასერის ცვლადებში:

$$\begin{aligned} E(k_x, k_y(\tau), \tau) &= \frac{\rho V_A^2}{2} (|\hat{v}_x|^2 + |\hat{v}_y|^2 + |\hat{v}_z|^2 + |\hat{b}_x|^2 + |\hat{b}_y|^2 + |\hat{b}_z|^2) = \\ &= \frac{1}{4} \rho V_A^2 \left(1 + \frac{k_y(\tau)^2}{k_x^2}\right) (|Z_p^+|^2 + |Z_p^-|^2) + \frac{1}{4} \rho V_A^2 \left(1 + \frac{k_z^2}{k_x^2}\right) (|Z_s^+|^2 + |Z_s^-|^2) + \\ &\frac{1}{4} \rho V_A^2 \frac{k_y(\tau) k_z}{k_x^2} (Z_p^+ Z_s^{+*} + Z_p^- Z_s^{-*} + Z_s^+ Z_p^{+*} + Z_s^- Z_p^{-*}) = E_p^+ + E_p^- + E_s^+ + E_s^- + E_{int} \end{aligned}$$

სადაც:

$$E_i^\pm = \frac{1}{4} \rho V_A^2 \left(1 + \frac{k_y(\tau)^2}{k_x^2}\right) |Z_i^\pm|^2, \quad i = p, s$$

$$E_{int} = \frac{1}{4} \rho V_A^2 \frac{k_y(\tau) k_z}{k_x^2} (Z_p^+ Z_s^{+*} + Z_p^- Z_s^{-*} + Z_s^+ Z_p^{+*} + Z_s^- Z_p^{-*})$$

ტალღების დინამიკის რაოდენობრივი აღწერა

ტალღების ამპლიტუდა და ფაზა:

$$Z_j^\pm(\tau) = |Z_j^\pm(\tau)| \exp\left(-i\phi_j^\pm(\tau)\right), j = p, s$$

განვსაზღვროთ ურთიერთსაწინააღმდეგოდ მიმართულ P-AW -სა და S-AW-ში არამდგრადობის ხარისხი:

$$\alpha_i = 1 - \frac{|Z_j^-|^2}{|Z_j^+|^2}, j = p, s$$

“მეისიერი სიხშირე”

$$\Omega_j^\pm(\tau) = \frac{d\phi_j^\pm(\tau)}{d\tau}, j = p, s.$$

დინამიური განტოლებებიდან გარკვეული გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ:

$$|Z_p^+(\tau)|^2 - |Z_p^-(\tau)|^2 = \frac{k_x^2 + k_y^2(0) + k_z^2}{k_x^2 + k_y^2(\tau) + k_z^2} (|Z_p^+(0)|^2 - |Z_p^-(0)|^2)$$

თუ ტალღები დაბალანსებულია საწყის მომენტში $|Z_p^+(0)| = |Z_p^-(0)|$ ისინი დაბალანსებულები რჩებიან დროის შემდეგ მომენტებში.

შემოვიტანოთ ახალი აღნიშვნა:

$$|Z_p^+(\tau)| = \exp\left(\int_0^\tau d\tau' \chi_p(\tau')\right) |\hat{Z}_p^+(\tau)| = \sqrt{\frac{k_x^2 + k_y^2(0) + k_z^2}{k_x^2 + k_y^2(\tau) + k_z^2}} |\hat{Z}_p^+(\tau)|$$

დინამიური განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$\frac{d\hat{Z}_p^+}{d\tau} = -i\Omega_A \hat{Z}_p^+ + \chi_p(\tau) \hat{Z}_p^-, \quad \frac{d\hat{Z}_p^-}{d\tau} = -i\Omega_A \hat{Z}_p^- + \chi_p(\tau) \hat{Z}_p^+,$$

ახალ აღნიშვნებში ბალანსს ექნება შემდეგი სახე:

$$|\hat{Z}_p^+(\tau)|^2 - |\hat{Z}_p^-(\tau)|^2 = |\hat{Z}_p^+(0)|^2 - |\hat{Z}_p^-(0)|^2$$

დავწეროთ ორი დინამიური განტოლება $|\dot{Z}_p^+(\tau)|^2 + |\dot{Z}_p^-(\tau)|^2$

სრული ნორმალიზებული ინტენსივობისთვის და ფაზათა სხვაობისთვის

$\Delta\phi_p(\tau) = \phi_p^+(\tau) - \phi_p^-(\tau)$ ურთიერთსაწინააღმდეგოდ მიმართული

P-AW-ებისთვის:

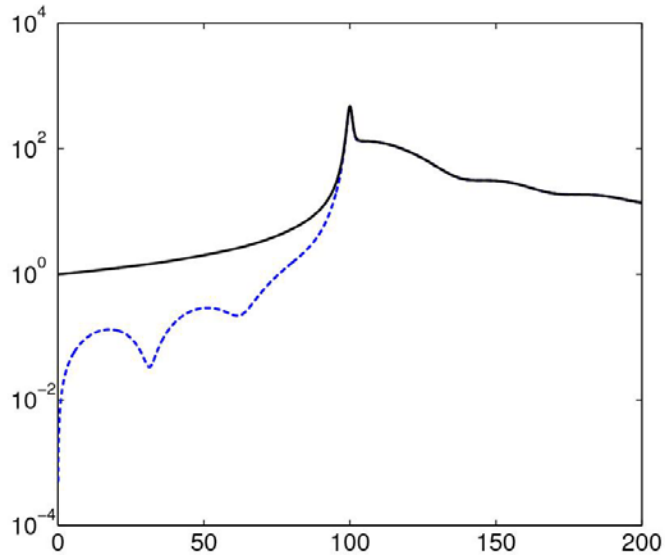
$$\frac{d \ln(|\dot{Z}_p^+(\tau)|^2 + |\dot{Z}_p^-(\tau)|^2)}{d\tau} = \Gamma(\tau) \chi_p(\tau) \cos \Delta\phi_p$$

$$\frac{d\Delta\phi_p}{d\tau} = 2\Omega_A - \frac{\chi_p(\tau)}{\Gamma(\tau)} \sin \Delta\phi_p$$

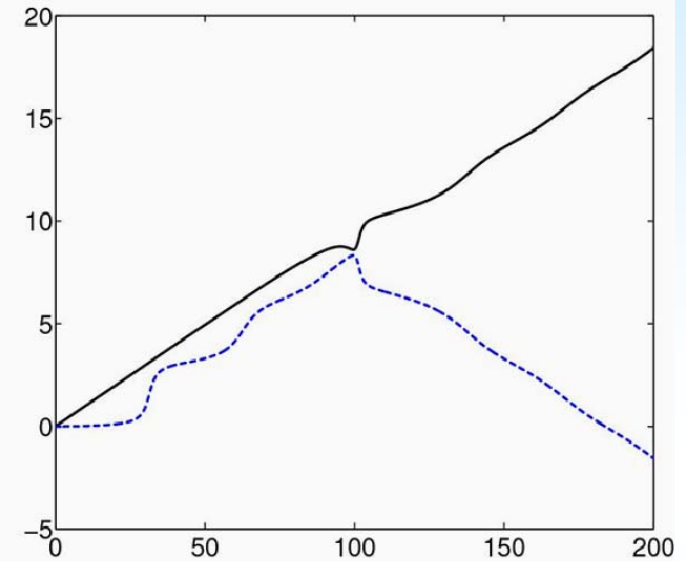
$$\Gamma(\tau) = \frac{2|\dot{Z}_p^+||\dot{Z}_p^-|}{|\dot{Z}_p^+|^2 + |\dot{Z}_p^-|^2}$$

აქ, და შემდეგ გრაფიკებზეც, სადაც სპეციალურად ნახსენები არაა იგულისხმება, რომ საწყისი შემფოთება შეესაბამება მხოლოდ P-AW+-ს.

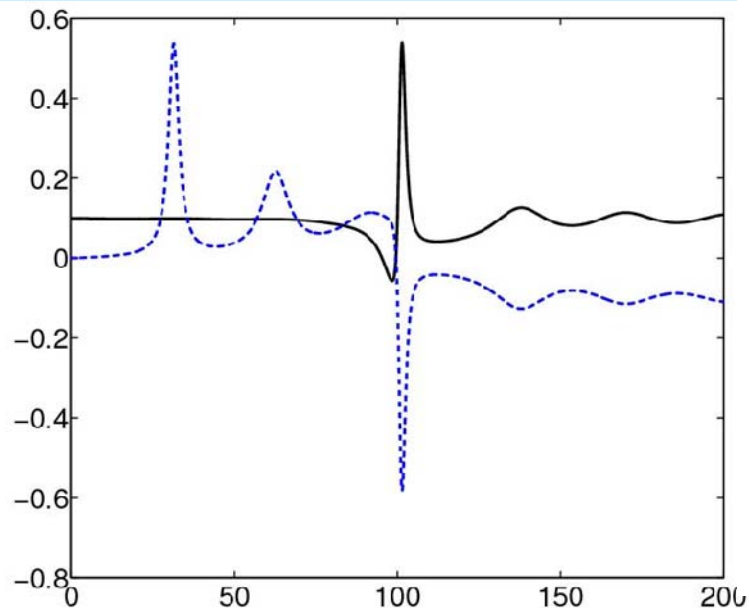
2 განზომილებიანი შემთხვევა



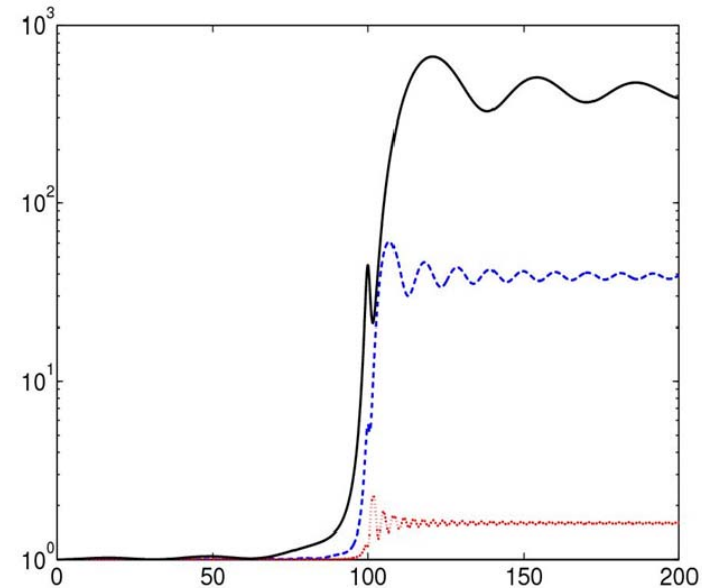
სურ. 1: $|Z_p^+|$ (უწყვეტი შავი) და $|Z_p^-|$ (წყვეტილი ლურჯი)



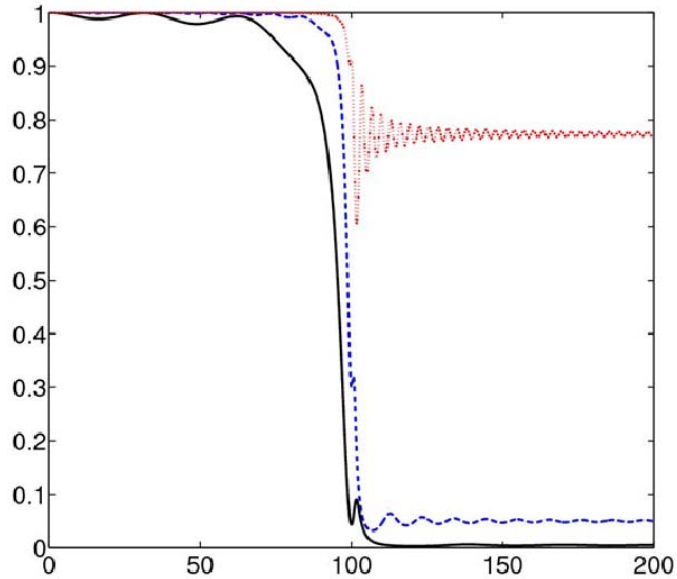
სურ. 2: ϕ_p^+ (უწყვეტი შავი) და (წყვეტილი ლურჯი) ϕ_p^-



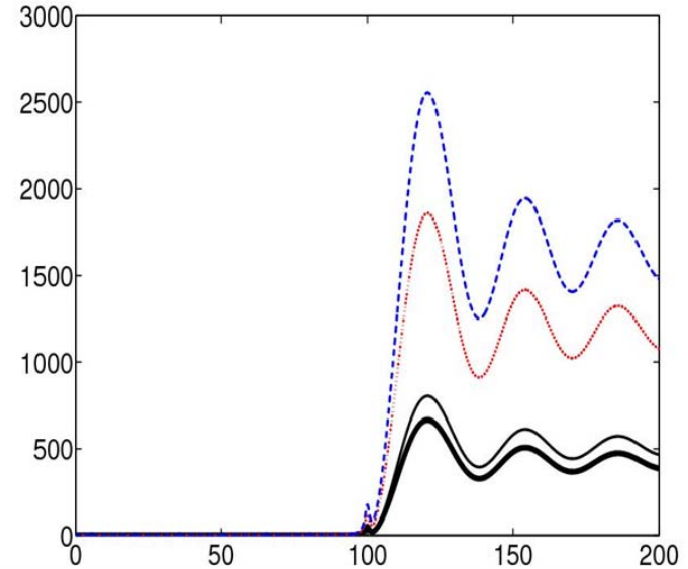
სურ. 3: მყისიერი სისშირეები Ω_p^+ (უწყვეტი შავი) და Ω_p^- (წყვეტილი ლურჯი)



სურ. 4: ნორმალიზირებული სპექტრალური ენერგია $\frac{E_p(\nu)}{E(\nu)}$ $\Omega_A = 0.1$ (უწყვეტი შავი), $\Omega_A = 0.3$ (წყვეტილი ლურჯი) და $\Omega_A = 1$ (პუნქტირიანი წითელი).

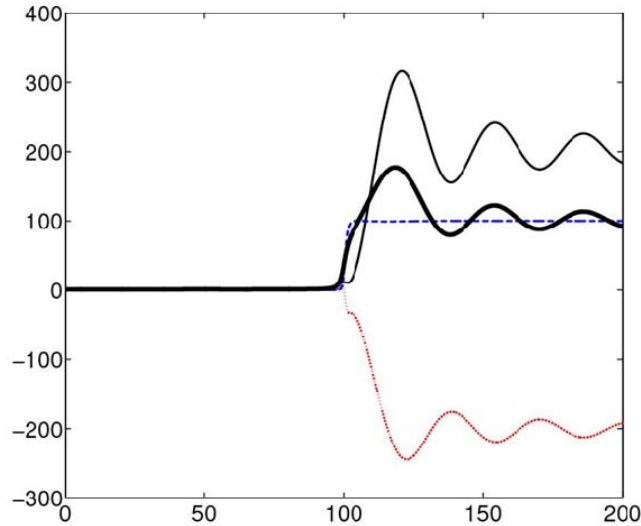


სურ. 5: დისბალანსის ხარისხი, $\alpha_p = 1 - \frac{|z_p^-|^2}{|z_p^+|^2}$
 $\Omega_A = 0.1$ (უწყვეტი შავი), $\Omega_A = 0.3$
(წყვეტილი ლურჯი) და $\Omega_A = 1$
(პუნქტირიანი წითელი).



სურ. 6: ნორმალიზირებული სპექტრალური ენერგია,
 $\frac{E_p(t)}{E(0)}$, $Z_p^-(0) = 0$ (მსხვილი უწყვეტი შავი),
 $Z_p^-(0) = 1$ (უწყვეტი შავი),
 $Z_p^-(0) = i$ (წყვეტილი ლურჯი),
 $Z_p^-(0) = -1$ (პუნქტირიანი წითელი).

3 განზომილებიანი შემთხვევა



სურ. 7: ნორმალიზირებული სპექტრალური ენერგიები:

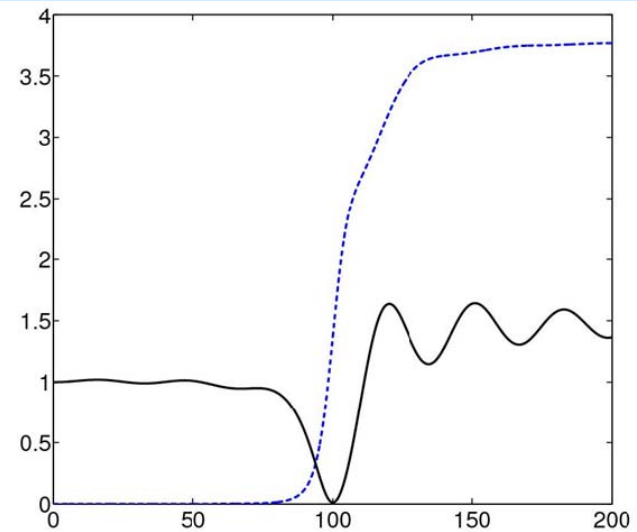
$$\frac{E(\nu)}{E(0)} \quad (\text{მსხვილი უწყვეტი შავი}),$$

$$\frac{E_P(\nu)}{E(0)} \quad (\text{უწყვეტი შავი}),$$

$$\frac{E_F(\nu)}{E(0)} \quad (\text{წყვეტილი ლურჯი}),$$

$$\frac{E_{int}(\nu)}{E(0)} \quad (\text{პუნქტირიანი წითელი}).$$

$$\frac{k_E}{k_X} = 1.$$

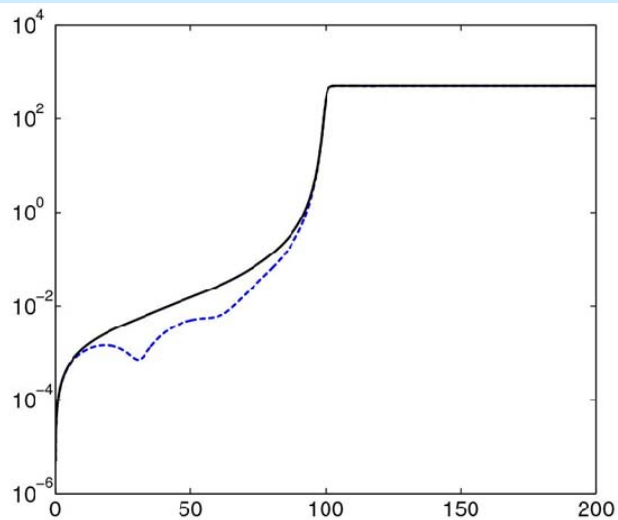


სურ. 8: ნორმალიზირებული სპექტრალური ენერგიები:

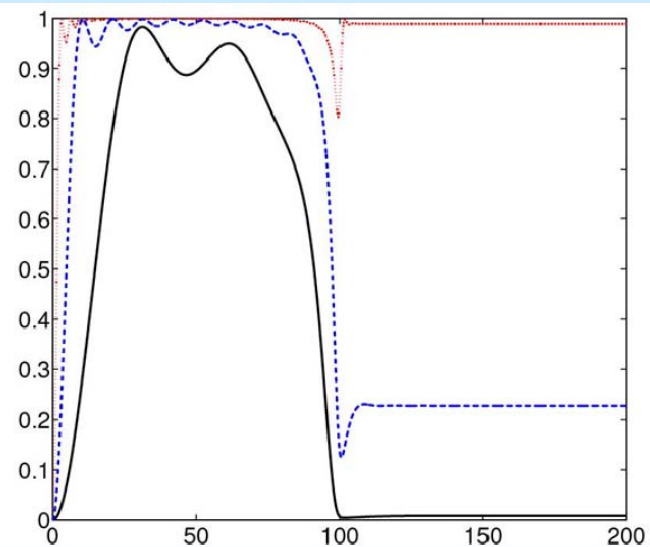
$$\frac{E_P(\nu)}{E(0)} \quad (\text{უწყვეტი შავი}),$$

$$\frac{E_F(\nu)}{E(0)} \quad (\text{წყვეტილი ლურჯი}),$$

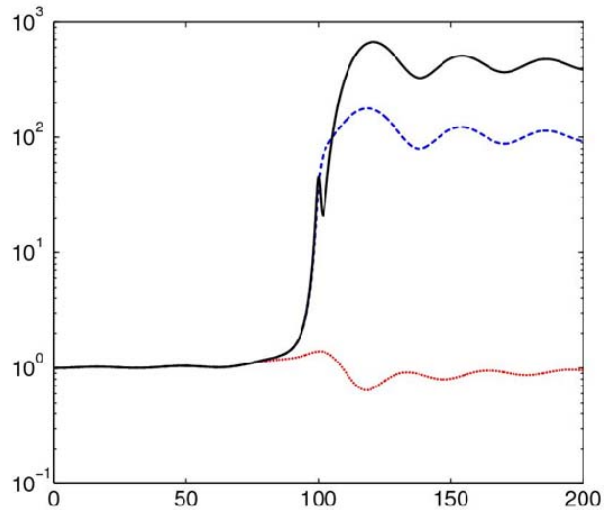
$$\frac{k_E}{k_X} = 10.$$



სურ. 9: $|Z_{\omega}^+|$ (უწყვეტი შავი) და $|Z_{\omega}^-|$ (წყვეტილი ლურჯი)



სურ. 10: დისბალანსის ხარისხი, $\alpha_s = 1 - \frac{|Z_{\omega}^+|^2}{|Z_{\omega}^-|^2}$
 $Q_A = 0.1$ (უწყვეტი შავი),
 $Q_A = 0.3$ (წყვეტილი ლურჯი) და
 $Q_A = 1$ (პუნქტირიანი წითელი).

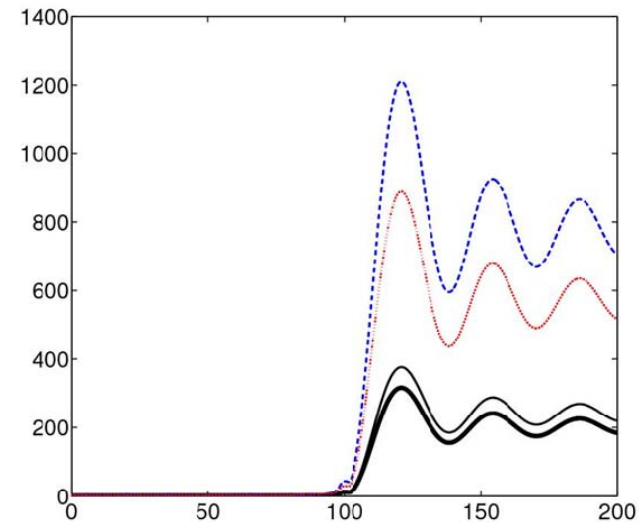


სურ. 11: ნორმალიზირებული სპექტრალური ენერგია, $\frac{E(\nu)}{E(0)}$

$\frac{R_p}{R_{sp}} = 0$ (უწყვეტი შავი),

$\frac{R_p}{R_{sp}} = 1$ (წყვეტილი ლურჯი)

$\frac{R_p}{R_{sp}} = 10$ (პუნქტირიანი წითელი).



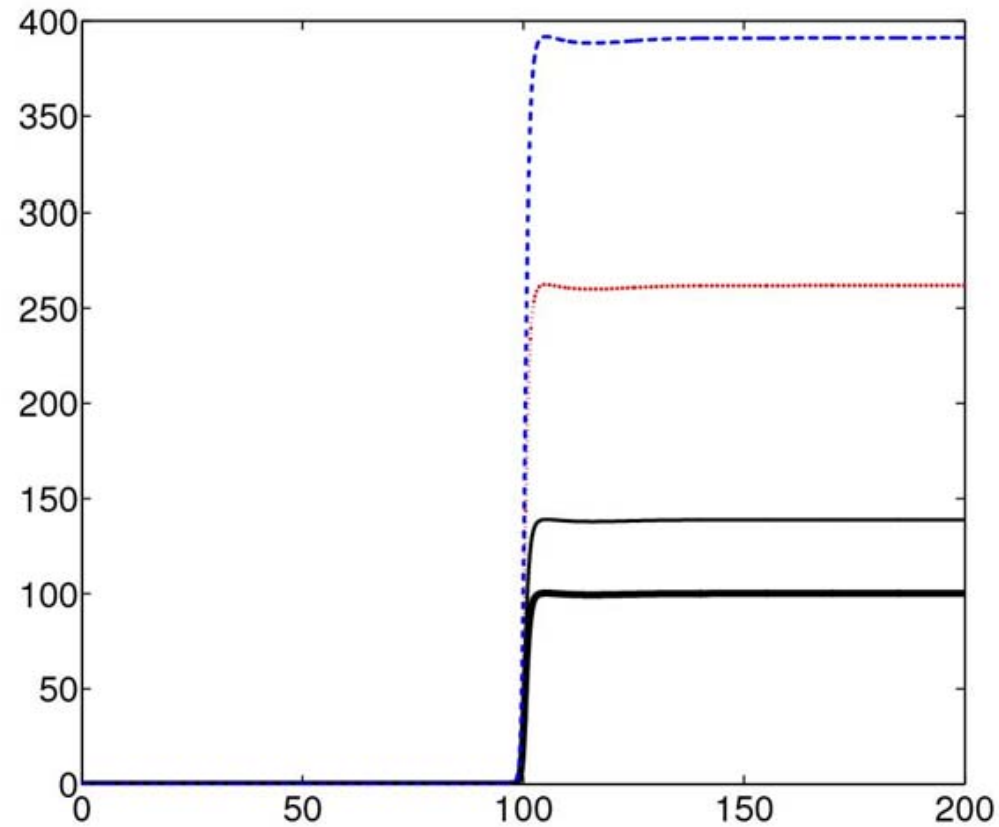
სურ. 12: ნორმალიზირებული სპექტრალური ენერგია, $\frac{E_p(\nu)}{E(0)}$

$Z_p^-(0) = 0$ (მსხვილი უწყვეტი შავი),

$Z_p^-(0) = 1$ (უწყვეტი შავი),

$Z_p^-(0) = t$ (წყვეტილი ლურჯი),

$Z_p^-(0) = -1$ (პუნქტირიანი წითელი).



სურ. 13: ნორმალიზირებული სპექტრალური ენერგია, $\frac{E_p(t)}{E(0)}$,

$Z_p^-(0) = 0$ (მსხვილი უწყვეტი შავი),

$Z_p^-(0) = 1$ (უწყვეტი შავი), $Z_p^-(0) = t$ (წყვეტილი ლურჯი), $Z_p^-(0) = -1$ (პუნქტირიანი წითელი).

შედეგები

აღვენის ტალღების ზეარეკვლა ურთიერთსაპირისპიროდ მოძრავი ტალღების წრფივი ურთიერთქმედების შედეგია.

საწინააღმდეგოდ მიმართული ფსევდო აღვენის ტალღები (P-AW) დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან, ხოლო საწინააღმდეგოდ მიმართული წანაცვლებითი აღვენის ტალღები (S-AW) კი ერთმანეთთან არ ურთიერთქმედებენ.

S-AW ასიმეტრიულად არიან დაკავშირებული P-AW-თან, და აქვთ გავლენა P-AW-ის წრფივ დინამიკაზე.

S-AW -ის ტრანზიენტული ზრდა საგრძნობლად ნაკლებია P-AW-ზე.

შედეგები

დინების მიმართულების პატარა ტალღური რიცხვის მქონე ტალღები განიცდიან დიდ ტრანზიენტულ ზრდას და თანაც უფრო დაბალანსებულები არიან.

ყველაზე დიდი ენერჯის ზრდა და ზეარეკვლა ხდება ორგანზომილებიან შემთხვევაში ტალღის გავრცელების მიმართულების მქონე ტალღური რიცხვის ნულთან ტოლობისას.