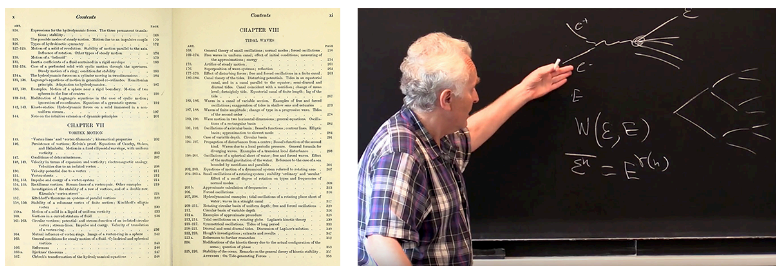
ტურბულენტობა - თეორია

10 იანვ. 2017 წ.

> *``I am an old man now, and when I die and go to heaven there are two matters on which I hope for enlightenment. One is quantum electrodynamics, and the other is the turbulent motion of fluids. And about the former I am rather optimistic.''*
>
> Sir Horas Lamb



სურ 1: მარცხნივ: H. Lamb, ``Hydrodynamics'', (1879-1945), მარჯვნივ Alexander Polyakov, Niels Bohr Institute, August 2016.

- რა არის ტურბულენტობა?
- როგორ ავღწეროთ ტურბულენტობა?
- რას ნიშნავს ტურბულენტობის ამოცანის ამოხსნა?
- ...

2D/3D Turbulence

$$d/dt\omega – nu\Delta\omega + (u\nabla)\omega – (\omega\nabla)u = \nabla \times f$$

3D: ωZ $(\omega\nabla)uZ^2$

$$d/dtZ \propto Z^2$$

ამონახსნის "გაბერვა";

შეზღუდვები: ინვარიანტები - სპირალობა, ...

1 რეინოლდსის გასაშუალოება

Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) equations:
დინების სიჩქარე: $u_i = \bar{u}_i + u'_i$
საშუალო სიდიდე: $\bar{u}_i$
ტურბულენტური პულსაცია: u'_i
კვაზისტაციონალური ტურბულენტობა:

$$\bar{u}_i(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} u_i(\mathbf{r},t)dt \ , \quad (t \gg \Delta t) \ , \tag{1}$$

$$\bar{u}'_i(\mathbf{r},t) = 0 \ . \tag{2}$$

საშუალო კვადრატული გადახრა - ტურბულენტური კორელაციები:

$$\overline{u'_i u'_j} \neq 0 \ , \ \overline{u'_i u'_i} \neq 0 \ , \ \overline{u'_i p'} \neq 0 \ . \tag{3}$$

რეინოლდსის საშუალო და კორელაცია:

$$\overline{u_i u_j} = ... = \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j} \tag{4}$$

• ალტერნატიული მიდგომა (მაგ. ზებგერითი ტურბულენტობა) ფავრეს გასაშუალოება:

$$\widetilde{u_i} \equiv \frac{\overline{\rho u_i}}{\bar{\rho}} = ... = \bar{u}_i + \frac{\overline{\rho' u'_i}}{\bar{\rho}} \ . \tag{5}$$

1.1 ტურბულენტობის ტიპები

ერთგვაროვანი ტურბულენტობა: ტურბულენტური პულსაციების კორელაციური სიდიდეები ინვარიანტულია კოორდინატთა ღერძების ტრანსილაციების მიმართ.

$$\overline{u'_i(\mathbf{r},t)u'_j(\mathbf{r},t)} = \overline{u'_i(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r},t)u'_j(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r},t)} \ . \tag{6}$$

ანალოგიურად ნებისმიერი რიგის კორელაციებისათვის: $\overline{u'_i u'_j u'_k ...}$.

იზოტროპული ტურბულენტობა: ტურბულენტობის სტატისტიკა ინვარიანტულია კოორდინატთა ღერძების არეკვლისა და ბრუნვების მიმართ.

$$\overline{(u'_x)^2} = \overline{(u'_y)^2} = \overline{(u'_z)^2} \ . \tag{7}$$

1.2 მოძრაობის განტოლებები უკუმშვადი სითხისათვის

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} + a_j \ , \tag{8}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \ , \tag{9}$$

სადაც a_j აღწერს სითხეზე მოქმედ გარეშე ძალებს და შესაძლებელია სიმკვრივის პულსაციების უგულვებელყოფა $\rho' \ll \bar{\rho}$.

უწყვეტობა:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \ , \tag{10}$$

კონვექციური წევრი:

$$u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_i} = ... = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{u}_i u'_j + u'_i \bar{u}_j + u'_i u'_j \right) \ , \tag{11}$$

დროითი გასაშუალოება:

$$\overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} = ... = \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{u}_j + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{u'_i u'_j} \right) \ , \tag{12}$$

RANS ($\bar{a}_j = 0$):

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} \ ,} \tag{13}$$

სადაც რეინოლდსის დაძაბულობის ტენზორი განისაზღვრება ტურბულენტური ფლუქტუაციების კორელაციით:

$$T_{ij} \equiv -\rho \overline{u'_i u'_j} \ . \tag{14}$$

რეინოლდსის გასაშუალოებული განტოლებებით მიღებული იერარქია კინეტიკის BBGKY იერარქიის მსგავსია ერგოდული ტურბულენტობის მიახლოებაში, ანუ როდესაც ანსამბლზე გასაშუალოებული სიდიდეები უდრიან დროში გასაშუალოებული სიდიდეების მნიშვნელობებს. ფენომენოლოგიური აღწერისას ხშირად რეინოლდსის ტენზორის დიაგონალური ელემენტები განიხილებიან როგორც ტურბულენტური წნევის კომპონენტები, ხოლო არადიაგონალური კომპონენტები - ტურბულენტური სიბლანტის კოეფიციენტები. ამ აღწერით, ტურბულენტური წნევა, ისევე როგორც სიბლანტე, შეიძლება იყოს ანიზოტროპული:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_x & \nu_{xy} & \nu_{xz} \\ \nu_{yx} & \mathcal{P}_y & \nu_{yz} \\ \nu_{zx} & \nu_{zy} & \mathcal{P}_z \end{pmatrix} \ .$$

1.3 რეინოლდსის დაძაბულობის ტენზორის ტრანსპორტი

Eq. (8) - Eq. (13) განტოლებების გამოკლებით:

$$\frac{\partial u'_j}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \bar{u}'_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \bar{u}'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{u'_i u'_j} \right) \ , \tag{15}$$

Eq. (15) u'_k-ზე გამრავლებით და მირებული განტოლების $j-k$ გადანაცვლებულ განტოლებასთან აჯამვით მივიღებთ:

$$\frac{\partial u'_j u'_k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial u'_j u'_k}{\partial x_i} + \bar{u}'_i u'_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \bar{u}'_i u'_j \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i u'_j u'_k}{\partial x_i} = \tag{16}$$

$$= -\frac{1}{\rho} \left(u'_k \frac{\partial p'}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_k} \right) + \nu \left(u'_k \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_i \partial x_i} + u'_j \frac{\partial^2 u'_k}{\partial x_i \partial x_i} \right) + u'_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_i} + u'_j \frac{\partial \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_i} \ .$$

დამხმარე გარდაქმნები:

$$u'_k \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_i \partial x_i} + u'_j \frac{\partial^2 u'_k}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 u'_j u'_k}{\partial x_i \partial x_i} - 2 \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \ , \tag{17}$$

$$u'_k\frac{\partial p'}{\partial x_j}+u'_j\frac{\partial p'}{\partial x_k}=-p'\left(\frac{\partial u'_k}{\partial x_j}+\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\delta_{ij}p'u'_k+\delta_{ik}p'u'_j\right)\ . \tag{18}$$

Eqs. (17,18) Eq. (16)-ში ჩასმით და გასაშუალოებით მივიღებთ რეინოლდსის დაძაბულობის ტენზორის განტოლებას:

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)T_{jk}=R^{\mathrm{s}}_{jk}+R^{\mathrm{diss}}_{jk}+R^{\mathrm{psr}}_{jk}+R^{\mathrm{diff}}_{jk}\ .} \tag{19}$$

სადაც განტოლების მარჯვენა მხარე გაყოფილია წყაროს

$$R^{\mathrm{s}}_{jk}=\rho\left(\overline{u'_iu'_k}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}+\overline{u'_iu'_j}\frac{\partial\bar{u}_k}{\partial x_i}\right) \tag{20}$$

დისიპაციურ:

$$R^{\mathrm{diss}}_{jk}=2\nu\rho\overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_i}\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} \tag{21}$$

წნევის კორელაციის (pressure strain rate correlation)

$$R^{\mathrm{psr}}_{jk}=-p'\left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}+\frac{\partial u'_k}{\partial x_j}\right) \tag{22}$$

და დიფუზიურ წევრებად:

$$R^{\mathrm{diff}}_{jk}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu\frac{\partial}{\partial x_i}T_{jk}+\overline{\rho u'_iu'_ju'_k}+\overline{p'(\delta_{ij}u'_k+\delta_{ik}u'_j)}\right)\ . \tag{23}$$

ჩვეულებრივ რეინლოდსის დაძაბულობის ტენზორის ფორმას ძირითადად განსაზღვრავენ წყაროსა და დისიპაციის წევრები.

1.4 ტურბულენტური პულსაციების ენერგია

ტურბულენტობის ენერგია უკუმშვად მიახლოებაში:

$$E=\frac{\rho}{2}\overline{\left((u'_x)^2+(u'_x)^2+(u'_x)^2\right)}=\frac{\rho}{2}\overline{u'_iu'_i}\ . \tag{24}$$

შესაბამისად ტურბულენტობის ენერგია შეიძლება გამოისახოს რეინოლდსის დაძაბულობის ტენზორის შპურით:

$$E=-\frac{1}{2}T_{ii}\ . \tag{25}$$

რეინოლდსის დაძაბულობის ტენზორის განტოლებაში $k\to j$ კუმშვით და გარდაქმნებით:

$$\overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}}=\overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right)}-\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\overline{\left(u'_iu'_j\right)} \tag{26}$$

მივიღებთ ტურბულენტუბის ენერგიის განტოლებას:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=T_{ij}\frac{\partial\bar{u}'_j}{\partial x_i}-\bar{\epsilon}+\frac{\partial}{\partial x_i}D_{ijk}\ ,} \tag{27}$$

სადაც

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

და $\bar{\epsilon}$ ტურბულენტობის კინეტიკური ენერგიის დისიპაციის ფუნქციაა:

$$\bar{\epsilon} \equiv \nu\rho \overline{\left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} \tag{28}$$

ხოლო D_{ijk} ენერგიის დიფუზიის ტენზორი:

$$D_{ijk} = -\rho\overline{u'_i u'_j u'_k} - \overline{p' u'_i} + \nu \frac{\partial E}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \ . \tag{29}$$

2 ტურბულენტობის არალოკალურობა

ორწერტილოვანი კორელაცია:

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) = \overline{u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)} \equiv \langle u_i u_j \rangle \ . \tag{30}$$

3 კოლმოგოროვის თეორია K41

Turbulence Decay
Helical/nonhelical turbulence
Loytsiansky integral;
Intermitency

4 Numerical turbulence

Burgulence;

5 MHD turbulence

Alfven wave turbulence; Elsassers;

6 Weak turbulence approach

Triades;

7 Turbulence in Astrophysics

Phenomenology:
Accretion disks;
Molecular clouds;
Cosmic magnetic fields;