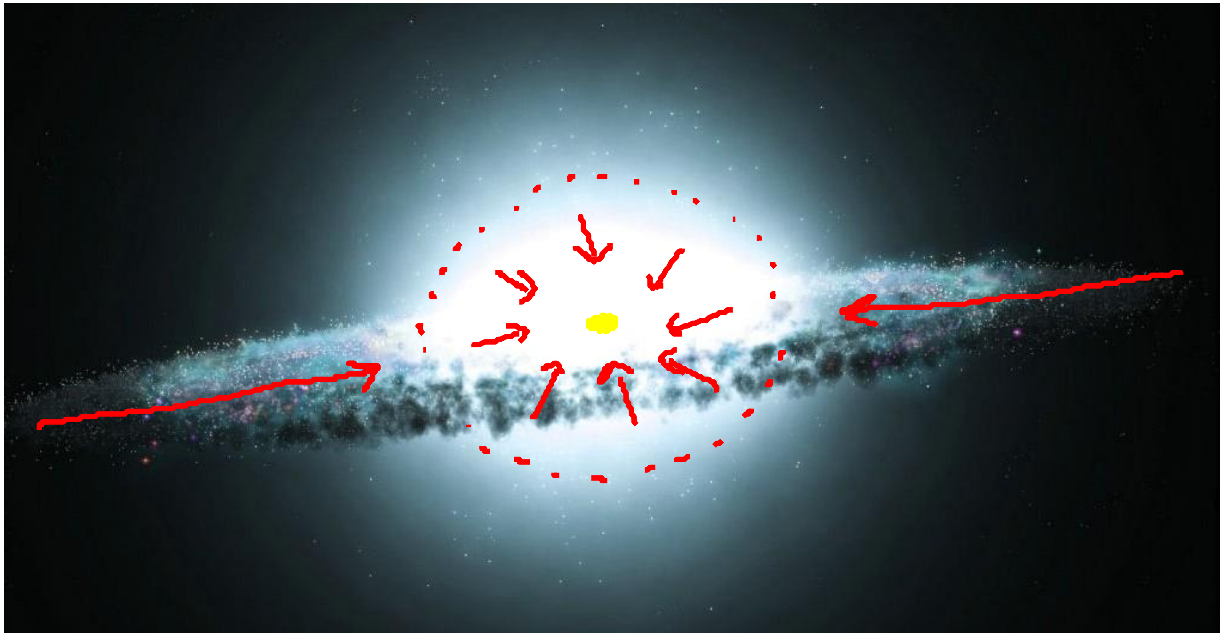
ლექცია 4

სიმეტრიული დინებები

სფერული სიმეტრია

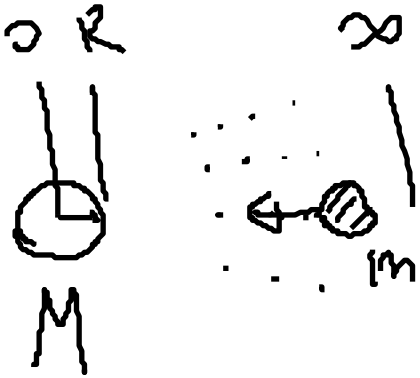


სფერული აკრეცია
სფერული ვარსკვლავური ქარი
სფერული აფეთქება (blast wave)

სფერული დინება:
მოძრაობა სიმძიმის ველში
ბრუნვის გარეშე
ბრუნვა: ბრუნვის ღერძი: ცილინდრული სიმეტრია;

მასიური აკრეციული დისკების
ცენტრალური ნაწილი
პროტოვარსკვლავური აკრეცია

გამოსხივების სიმძლავრე



$$\begin{cases} U_\infty = 0 \\ U_R = -\dfrac{GM\Delta m}{R} \end{cases}$$

$$\Delta U = U_\infty - U_R$$

$$L = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{GM}{R}\,\frac{\Delta m}{\Delta t}$$

აკრეციის ტემპი (accretion rate):

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt}$$

გამოსხივების სიმძლავრე:

$$L = \frac{GM\dot{m}}{R}$$

ბონდის დინება (Bondi accretion)

უწყვეტობის განტოლება სფერულ კოორდინატებში:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \rho U_r\right) + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\rho U_\varphi\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\, U_\theta\right) = 0$$

სფერული სიმეტრია: $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$

იზოთერმული დინება: $T = const,$

$$P = P(T, \rho) \quad : \quad \begin{cases} P = P(r) \\ \rho = \rho(r) \end{cases}$$

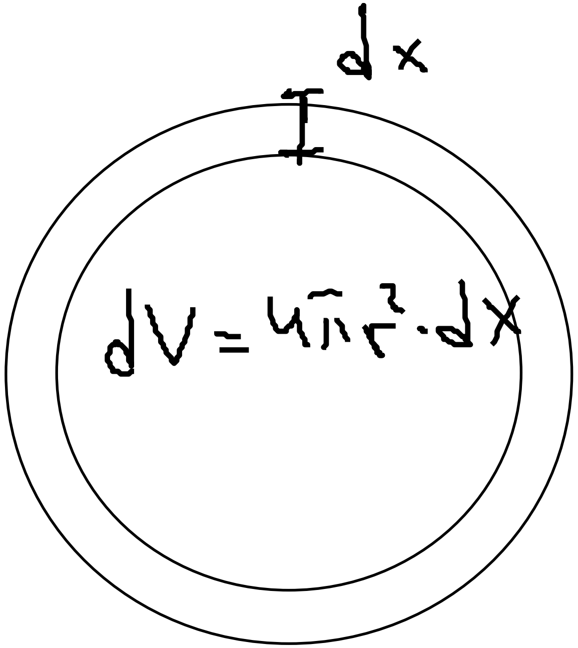
ბონდის დინება

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \rho v_r\right) = 0$$

სტაციონალური შემთხვევა: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. $\quad (v \neq 0)$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \rho v_r\right) = 0$$

$m = \rho V \qquad \frac{dm}{dt} = \dot{m} = \rho \frac{dV}{dt} + \cancel{V \frac{d\rho}{dt}}$



$$\dot{m} = \rho \cdot 4\pi r^2 \frac{dx}{dt} = 4\pi r^2 \rho v_r$$

ბონდის დინება

მუდმივი აკრეციის ტემპი: $\frac{\partial}{\partial r}\left(\dot{m}\right) = 0, \qquad \dot{m} = const(r)$

მოძრაობის განტოლება (ეილერის განტოლება სფერულ კოორდინატებში).
რადიალური კომპონენტი:

$$\frac{D}{Dt} v_r - \frac{v_\varphi^2 + v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + g_r .$$

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

ბონდის დინება

სფერულად სიმეტრიული სტაციონალური შემთხვევა: $\frac{\partial}{\partial t} = 0, \ \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$

რადიალური დინება: $\vec{v} = (v_r, v_\varphi, v_\theta); \quad v_\varphi = v_\theta = 0$

$$\frac{D}{Dt} v_r - \frac{\cancel{v_\varphi^2} + \cancel{v_\theta^2}}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + g_r$$

$$\frac{D}{Dt} \equiv \cancel{\frac{\partial}{\partial t}} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_\varphi \frac{1}{r\sin\theta} \cancel{\frac{\partial}{\partial \varphi}} + \frac{1}{r} \cancel{\frac{\partial}{\partial \theta}}$$

ბონდის დინება

$$v_r \frac{\partial}{\partial r}(v_r) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + g_r$$

გრავიტაციული აჩქარება:

$$g_r = -\frac{GM}{r^2}$$

მდგომარეობის განტოლება:

$$P = P(\rho). \qquad \frac{\partial P}{\partial r} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)\frac{\partial \rho}{\partial r}$$

ბგერის სიჩქარე:

$$C_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s$$

ბონდის დინება

$$v_r \frac{\partial}{\partial r}(v_r) + \frac{c_s^2}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}(\rho) + \frac{GM}{r^2} = 0 .$$

უწყვეტობის განტოლება: $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \rho v_r\right) = 0,$

$$\rho \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + r^2 v_r \frac{\partial}{\partial r}(\rho) = 0 ,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{1}{r^2 v_r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) ,$$

ბონდის დინება

$$v_r \frac{\partial}{\partial r} v_r - \frac{c_s^2}{r^2 v_r} \underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right)}_{=} + \frac{GM}{r^2} = 0,$$

$$r^2 \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r \cdot 2r$$

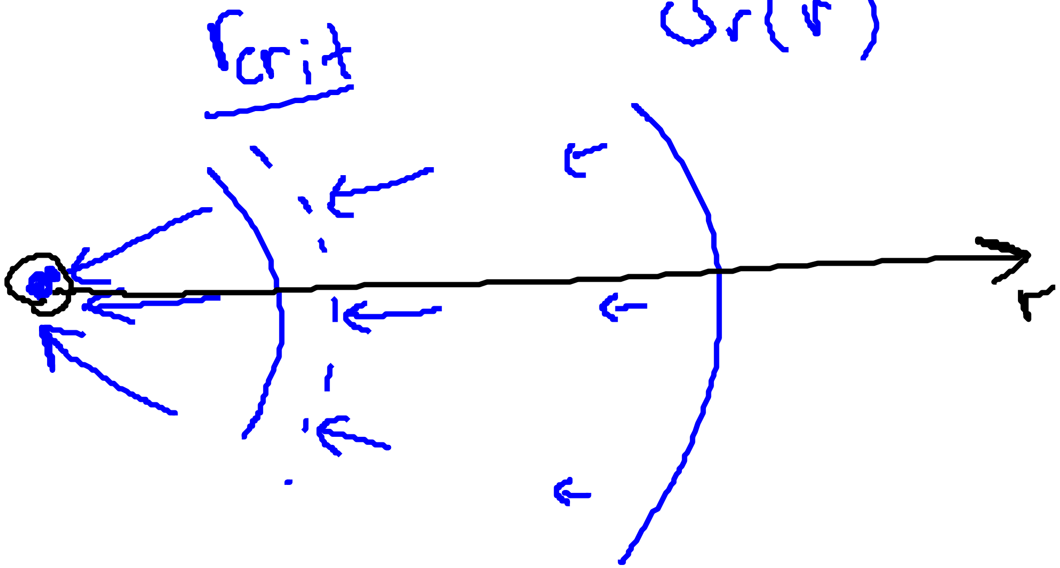
$$v_r \frac{\partial}{\partial r} v_r - \frac{c_s^2}{v_r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2 c_s^2}{r} + \frac{GM}{r^2} = 0$$

$$\left(1 - \frac{c_s^2}{v_r^2}\right) v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} = - \frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{2 c_s^2 r}{GM}\right)$$

ბონდის დინება

$$\boxed{\left(1-\frac{C_s^2}{U_r^2}\right)\frac{\partial U_r^2}{\partial r}=-\frac{2GM}{r^2}\left(1-\frac{2C_s^2 r}{GM}\right)}$$

$$r_{cr}=\frac{GM}{2C_s^2} \qquad U_r(r_{cr})=C_s(r_{cr})$$



$C_s=C_s(r)$

$U_r=U_r(r)$

ამონახსნები

$$\left(1-\frac{C_s^2}{v_r^2}\right)\frac{\partial v_r^2}{\partial r} = -\frac{2GM}{r^2}\left(1-\frac{2C_s^2 r}{GM}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_r^2}{C_s^2}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\ln\left(\frac{v_r^2}{C_s^2}\right)\right) = -\frac{2GM}{r^2}\left(1-\frac{2C_s^2 r}{GM}\right)C_s^{-2}$$

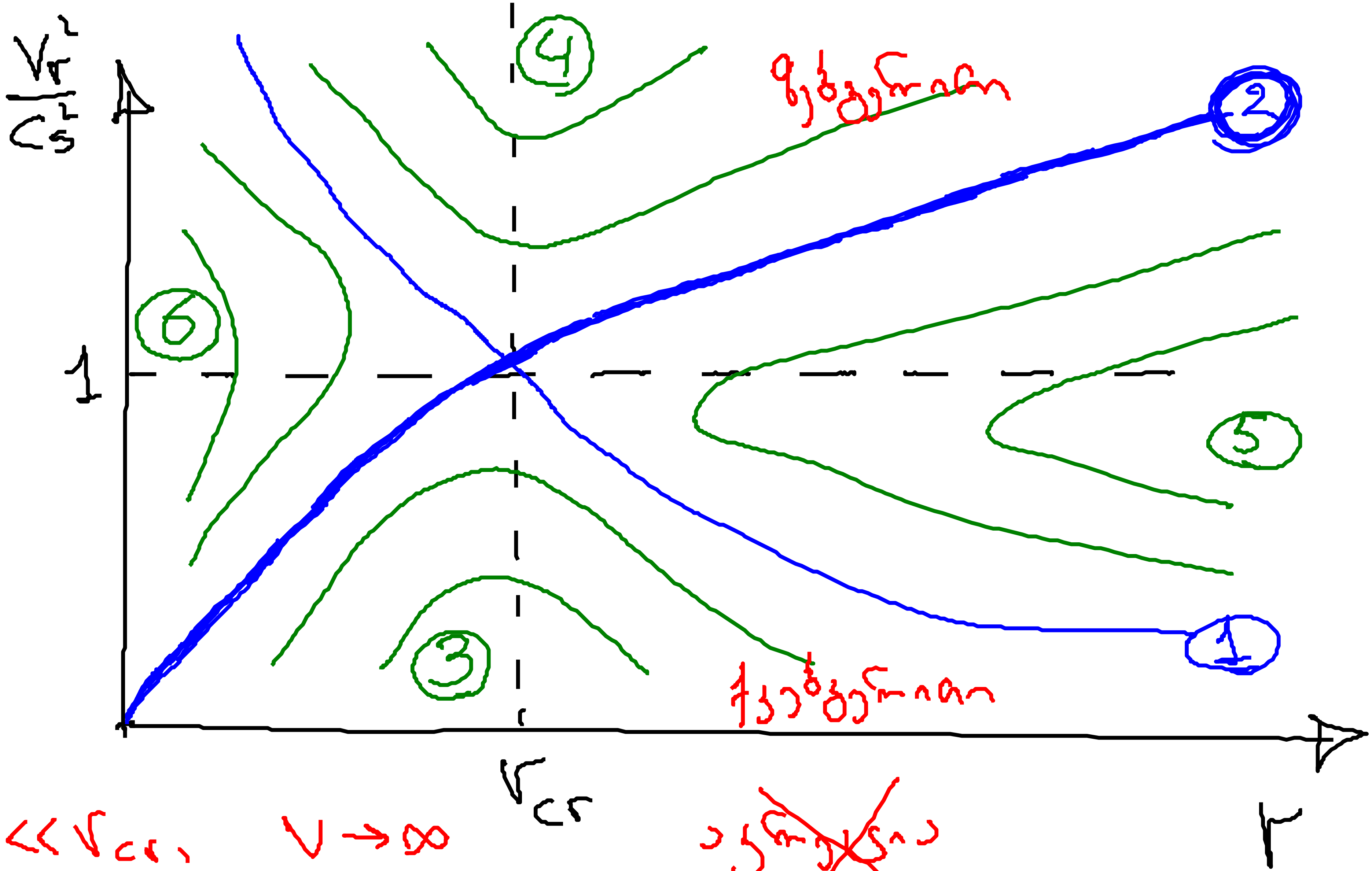
მახის რიცხვი: $\mathcal{M} \equiv \frac{v_r}{C_s}$

იზოთერმული შემთხვევა: $C_s = \text{const},$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\mathcal{M}^2 - \ln\mathcal{M}^2\right\} = -4\frac{r_{cr}^2}{r^2}\left(1-\frac{r}{r_{cr}}\right)$$

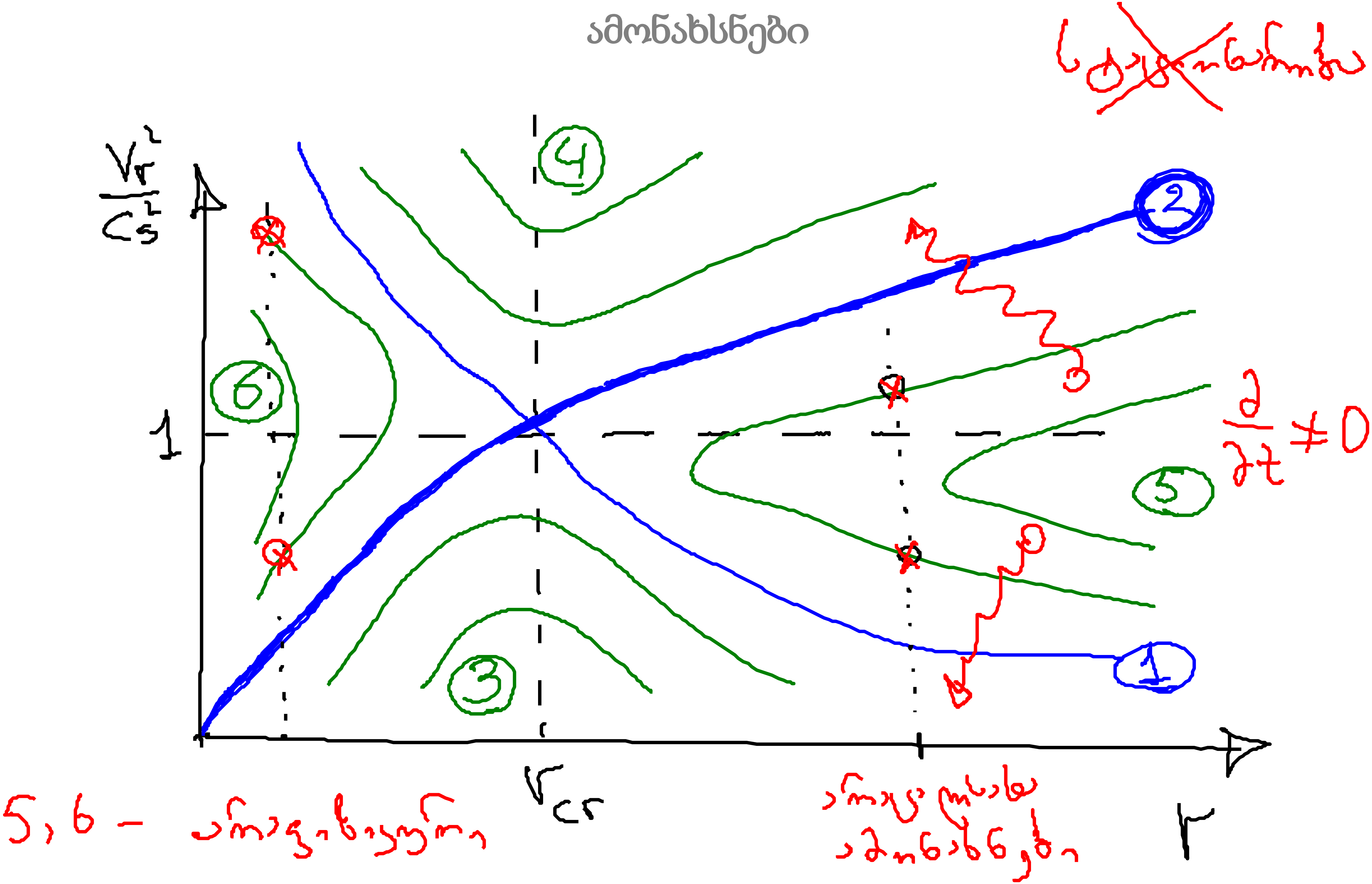
ამონახსნები

3, 4,



$r \ll r_{cr}$, $v \to \infty$

ამონახსნები



ინვარიანტი

მოძრაობის განტოლება: $$v_r \frac{\partial}{\partial r}(v_r) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} + g_r \qquad g_r = -\frac{GM}{r^2}$$

უწყვეტობის განტოლება: $$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \rho v_r\right) = 0,$$

პოლიტროპული მდგომარეობის განტოლება: $$P = K \cdot \rho^{\gamma}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\gamma K \rho^{\gamma-1}\frac{\partial \rho}{\partial r} = -\gamma K \rho^{\gamma-2}\frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\partial}{\partial r}\left(K\rho^{\gamma-1}\right)$$

$$C_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = K\gamma\rho^{\gamma-1} \qquad \| \qquad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\partial}{\partial r}\left(C_s^2\right)$$

ინვარიანტი

$$U_r \frac{\partial}{\partial r} U_r = - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial r} C_s^2 - \frac{GM}{r^2} \qquad \Big\| \quad \underline{C_s^2 = C_s^2(r)}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{U_r^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} C_s^2 - \frac{GM}{r} \right\} = 0$$

ბერნულის განზოგადოებული თეორემა.

ბერნულის ინტეგრალი:

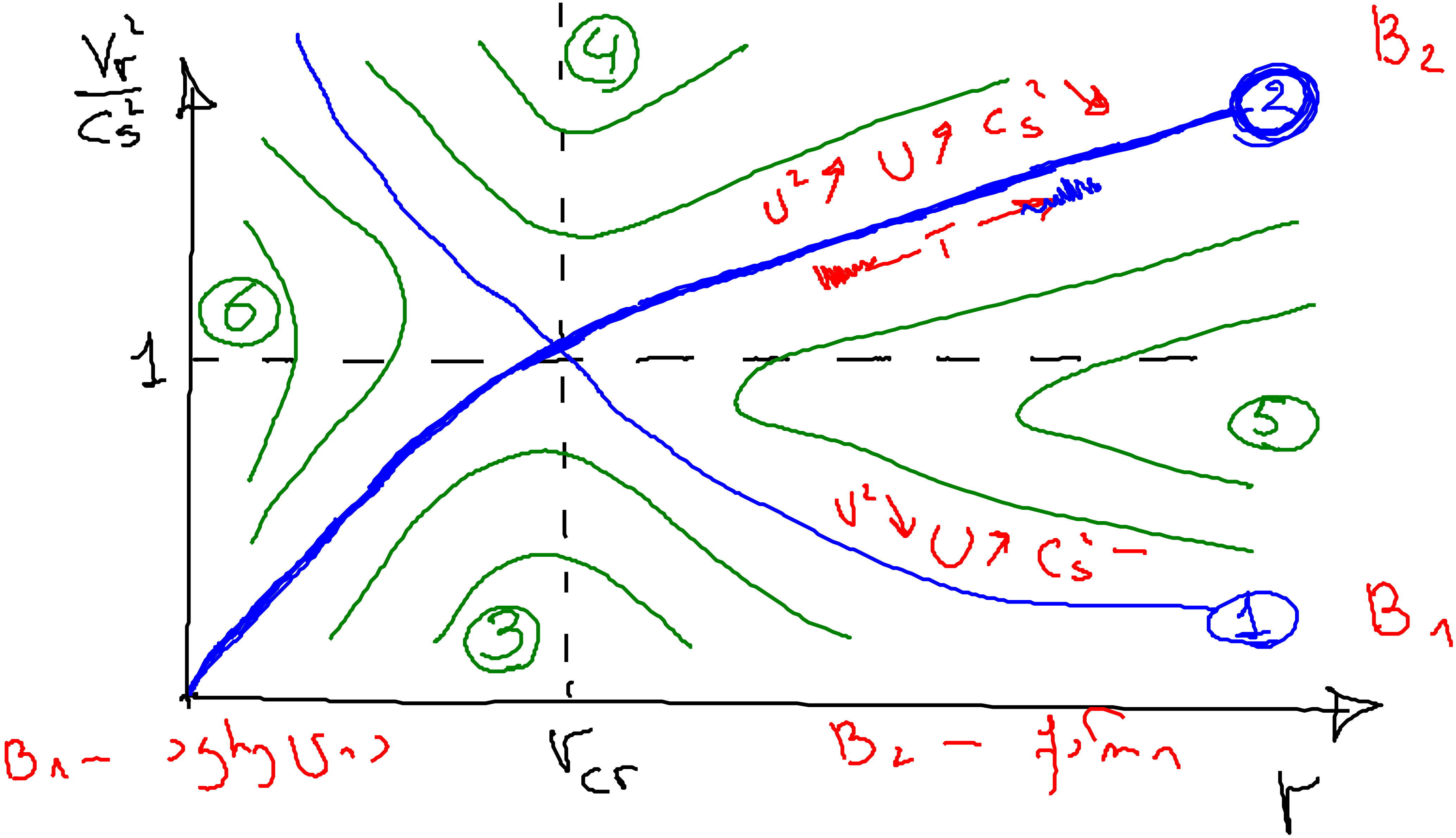
$$B \equiv \frac{U_r^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} C_s^2 - \frac{GM}{r}$$

კინეტიკ ენთალპია. გრავ.-პოტენც

$\frac{v^2}{2} + c_s^2 - \frac{1}{r}$

ამონახსნები

1, 2



აკრეციის ტემპი

$$r = r_\infty : \quad B = \cancel{\frac{v_\infty^2}{2}} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} c_\infty^2$$

$$r = r : \quad B = \frac{v_r^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} c_s^2 - \frac{GM}{r}$$

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(c_s^2 - c_\infty^2 \right) = \frac{GM}{r}$$

აკრეციის ტემპი

უწყვეტობის განტოლება: $\dot{m} = 4\pi r^2 \rho v$ $v^2 = \frac{(\dot{m})^2}{16\pi^2 r^4 \rho^2}$

ქვებგერითი აკრეცია: $\boxed{v(r_{cr}) = c_{cr}}$

აკრეციის ტემპი

$$\frac{v_c^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} v_c^2 - \frac{\gamma}{\gamma-1} c_\infty^2 = \frac{GM}{r} = 2 c_{cr}^2$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} - 2 = \frac{\gamma-1+2\gamma-4\gamma+4}{2(\gamma-1)} = \frac{\gamma+3}{2(\gamma-1)}$$

$$\frac{\gamma+3}{2(\gamma-1)} v_{cr}^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} c_\infty^2$$

$$\boxed{v_{cr}^2 = \frac{2\gamma}{\gamma+3} c_\infty^2}$$

აკრეციის ტემპი

$$c_s^2 = K\gamma\rho^{\gamma-1} \quad ; \quad \frac{c_{cr}^2}{c_\infty^2} = \frac{2\gamma}{\gamma+3}$$

$$\rho_{cr}^{\gamma-1} = \rho_\infty^{\gamma-1} \cdot \frac{2\gamma}{\gamma+3}$$

$$\rho_{cr} = \rho_\infty \left(\frac{2\gamma}{\gamma+3}\right)^{1/(\gamma-1)}$$

აკრეციის ტემპი

$$\dot{m} = 4\pi r^2 \rho v = const.$$

$$\rho_{cr} v_{cr} = \rho_\infty \left(\frac{2\gamma}{\gamma+3}\right)^{1/(\gamma-1)} \cdot c_{cr} \cdot \frac{G^2 M^2}{4 c_{cr}^4}$$

$$r_{cr} = \frac{GM}{2 c_s^2}$$

$$\dot{m} = \pi \rho_\infty \left(\frac{2\gamma}{\gamma+3}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot G^2 M^2 \; c_{cr}^{-3}$$

აკრეციის ტემპი

მაქსიმალური აკრეციის ტემპი

$$\dot{m} = \pi G^2 M^2 \rho_\infty c_\infty^{-3} \cdot \left(\frac{2\gamma}{\gamma+3}\right)^{\frac{1}{\gamma-1} - \cancel{\frac{2}{3}}\,\frac{3}{2}}$$

$$\dot{m} = \pi G^2 M^2 \frac{\rho_\infty}{c_\infty^3} \left(\frac{2\gamma}{\gamma+3}\right)^{\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)}}$$

Pringle, King *“Astrophysical Flows”* 2007

Chapter 3: Spherical symmetric flows
3.1
3.1.1
3.1.2

3.2
3.2.2.